Schaum

FÍSICA GENERAL

NOVENA EDICIÓN

- EL perfecto aliado para obtener mejores calificaciones
- Cubre los temas fundamentales del curso; sirve de suplemento para cualquier texto escolar
- Enseña una manera efectiva de resolver problemas.
- 984 problemas totalmente resueltos
- Ideal para estudiar por tu propia cuenta.

McGraw Hill

Schaum

BEST SELLERS INTERNACIONALES

FÍSICA GENERAL

NOVENA EDICIÓN

Frederick J. Bueche

- El perfecto aliado para obtener mejores calificaciones.
- Cubre los temas fundamentales del curso; sirve de suplemento para cualquier texto escolar.
- Enseña una manera efectiva de resolver problemas.
- 984 problemas totalmente resueltos.
- Ideal para estudiar por tu propia cuenta.

Más de 30 millones de ejemplares VENDIDOS de la serie Schaum en el mundo

Mc Graw Hill

Física General

Novena edición

FREDERICK J. BUECHE, Ph.D.
University of Dayton

EUGENE HECHT, Ph.D.
Adelphi University

Traductor
Ing. José Hernán Pérez Castellanos
Instituto Politécnico Nacional

Revisor técnico
Ing. Roberto Hugo Hernández Luna
Departamento de ciencias
ITESM Campus Estado de México

Nicolas E. Hernandez Reyes

McGRAW-HILL

MÉXICO • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MADRID
NUEVA YORK • SAN JUAN • SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI
SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TORONTO

FREDERICK J. BUECHE, distinguido y célebre profesor de la Universidad de Dayton, recibió su doctorado en física en la Universidad de Cornell. Ha publicado cerca de 100 artículos de investigación sobre la física de polímeros altos. Además es autor de un libro a nivel posgrado sobre física macromolecular. Sin embargo, sus mayores esfuerzos los ha concentrado en la enseñanza de la física. En 1965 publicó por primera vez su libro *Principios de física*, que actualmente se encuentra en su quinta edición y sigue siendo muy utilizado. El doctor Bueche es autor de otros cinco libros de texto para principiantes en el estudio de física, de varios libros de trabajo y guías de estudio.

EUGENE HECHT es profesor de tiempo completo del Departamento de Física de la Universidad Adelphi, en Nueva York, donde imparte con placer esta materia (recientemente los estudiantes lo eligieron Profesor del Año). Es autor de ocho libros, incluido la tercera edición de *Óptica*, publicado por Addison Wesley, que ha sido un texto líder en este campo por casi dos décadas. El doctor Hecht también ha publicado el libro *Óptica*, de la serie Schaum, y dos trabajos muy importantes: *Física: Álgebra/Trigonometría,* 2ª. edición, y *Física: Cálculo,* ambos editados por Brooks/Cole. Su libro *la extravagante cerámica Biloxi,* escrito en torno al artesano estadounidense G. E. Ohr, recibió el premio Libro de Arte del Año 1989. El profesor Hecht ha dictado numerosas conferencias tanto de arte como de física en museos y universidades de todo el mundo.

Gerente de producto: Ricardo Martín del Campo Mora
Supervisor de edición: Luis Amador Valdez Vázquez
Supervisor de producción: Juan Jose García Guzmán
Supervisor de diseño de portada: Jean Paul Krammer Reyna

FÍSICA GENERAL
Novena edición

McGRAW-HILL INTERAMERICANA EDITORES, S.A. de C.V.
A subsidiary of The McGraw-Hill Companies
Cedro No. 512, Col. Atlampa
C.P. 06450, Delegación Cuauhtémoc,
México, D.F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN 970-10-3455-4
ISBN 970-10-2385-4
(ISBN 968-422-795-7 tercera edición)
(ISBN 968-451-330-5 segunda edición)

Translated from the ninth english edition of
SCHAUM'S OUTLINE COLLEGE PHYSICS

ISBN 0-07-008941-8

34567890 09876532104

Impreso en México Printed in Mexico

Esta obra se terminó de
Imprimir en Febrero del 2004 en
Programas Educativos S.A.de C.V.
Calz. Chabacano No.65-A
Col. Asturias C.P.06850 Méx. D.F.
Empresa certificada por el Instituto Mexicano
de Normalización y Certificado A.C.Bajo la
Norma ISO-9002, 1994/NMX-CC-04 1995 con
él núm. De registro RSC-048 y bajo la Norma
ISO-14001:1996/SAA-1998, con el Núm;
de Registro RSAA-003

Prefacio

El curso introductorio de física, conocido también como "física general" o "física universitaria", suele ser una materia que se imparte en dos semestres en donde se tratan los temas clásicos con algunas adiciones de física moderna. De hecho, el nombre de "física universitaria" se ha convertido en un eufemismo para referirse a la física introductoria *sin cálculo*. La *Física General de la Serie de Schaum* se concibió para cubrir este curso, ya sea impartido en educación media superior o a nivel universitario. El conocimiento matemático necesario incluye álgebra básica, principios de trigonometría y una parte muy pequeña de análisis vectorial. Consideramos que el lector ya tiene una modesta comprensión del álgebra. En el apéndice B, se presenta una revisión general de trigonometría que puede ser muy útil. Aun así, las conceptos se desarrollan en el tema correspondiente. Lo mismo sucede para el análisis vectorial.

En cierto sentido, el aprendizaje de la física es diferente del que corresponde a la mayor parte de las demás disciplinas. La física tiene un vocabulario especial que constituye un lenguaje propio, un lenguaje que se transcribe de inmediato a una forma simbólica que se analiza y amplía con lógica y precisión matemáticas. Las palabras como energía, cantidad de movimiento, corriente, flujo, interferencia, capacitancia, etc., tienen significados científicos muy específicos. Deben aprenderse con exactitud porque la disciplina se edifica capa por capa; a menos que el lector sepa con precisión lo que es la velocidad, no puede saber lo que son la aceleración y la cantidad de movimiento y, sin ellos, no puede saber lo que es fuerza, y así sucesivamente. Cada capítulo de este libro se inicia con un resumen conciso de las ideas, definiciones, relaciones, leyes, reglas y ecuaciones importantes que están asociadas con el tema a discusión. Todo este material constituye la armadura conceptual del discurso, y su dominio constituye un reto en sí mismo y por sí mismo, pero la física es algo más que simplemente recitar estos principios.

Todo físico que ha intentado alguna vez enseñar esta maravillosa materia ha escuchado el lamento generalizado de los estudiantes: "Entiendo todo; lo único que no puedo resolver son los problemas". Sin embargo, la mayor parte de los profesores creen que "resolver" los problemas es la culminación decisiva de la experiencia completa, es la prueba final de la comprensión y la competencia. La maquinaria conceptual de las definiciones y las reglas, como también las leyes, toda se reúne en el proceso de resolución de problemas como en ninguna otra parte. Es más, hasta donde los problemas reflejen las realidades de nuestro mundo, el estudiante aprende una habilidad de inmenso valor práctico. Ésta no es una tarea fácil; llevar a cabo el análisis de un problema incluso moderadamente complejo exige una vigilancia intelectual extraordinaria y la atención incansable para razonar más allá de tan sólo "saber cómo hacerlo". Al aprender a tocar un instrumento musical, el estudiante debe conocer lo básico, y a continuación, practicar, practicar, practicar. Una sola nota falsa en una sonata se puede pasar por alto; sin embargo, un solo error en un cálculo se puede propagar a través de todo el esfuerzo realizado y dar lugar a una respuesta que es por completo errónea. El objeto de este libro es el saber hacerlo bien.

Aun cuando se ha añadido una selección de problemas nuevos, la revisión de la novena edición de este texto se ha concentrado en la modernización del trabajo y en la mejora de la pedagogía. Con ese fin, se ha simplificado la notación y se ha hecho coherente a todo lo largo del texto. Por ejemplo, ahora la fuerza se simboliza por F y sólo F; de este modo, la fuerza centrípeta es F_C, el peso es F_W, la tensión es F_T, la fuerza normal es F_N, la fricción es F_f, etcétera. El trabajo (W) nunca volverá a confundirse con el peso (F_W), y el periodo (T) nunca se tomará equivocadamente por la tensión (F_T). Para acoplarse mejor a lo que suele escribirse en el salón de clase, un vector ahora se indica por un símbolo en negrita con una flecha diminuta arriba de él. La idea de las cifras significativas (véase el apéndice A) se cumple con toda escrupulosidad en todos los problemas. Se han revisado casi todas las definiciones, para hacerlas más precisas o para reflejar una perspectiva más moderna. Se han vuelto a trazar todos los dibujos, de modo que ahora son más exactos, realistas y fáciles de leer.

Si el lector tiene algún comentario acerca de esta edición, quiere hacer sugerencias para la siguiente o le gustaría compartir sus problemas favoritos, envíelos a E. Hecht, Adelphi University, Physics Department, Garden City, NY 11530.

Freeport, NY EUGENE HECHT

Contenido

capítulo 1

Introducción a los vectores

UNA CANTIDAD ESCALAR tiene sólo magnitud. Muchos conceptos físicos, como la longitud, el tiempo, la temperatura, la masa, la densidad, la carga y el volumen, son escalares; cada uno tiene una escala o tamaño, pero no una dirección asociada. Cantidades escalares típicas son el número de estudiantes en un salón de clases, la cantidad de azúcar en un frasco, el costo de una casa, etc.

Los escalares, siendo simples números, se suman como cualquier número. Dos dulces en una caja más siete en otra suman nueve dulces.

UNA CANTIDAD VECTORIAL tiene magnitud y dirección. Muchos conceptos físicos, como el desplazamiento, la velocidad, la aceleración, la fuerza y la cantidad de movimiento, son cantidades vectoriales. Por ejemplo, un *desplazamiento vectorial* puede ser un cambio en la posición desde un punto a otro que se localiza a 2 cm y en la *dirección x* desde el primero. Como otro ejemplo, una cuerda que jala hacia el norte a un poste da lugar a una *fuerza vectorial* de 20 newtons (N) que actúa sobre dicho poste en dirección norte. Un newton equivale a 0.225 libras (1 N = 0.225 lb). Similarmente, un automóvil que se mueve hacia el sur a 40 km/h tiene una *velocidad vectorial* de 40 km/h en dirección sur.

Una cantidad vectorial se puede representar por una flecha dibujada a escala. La longitud de la flecha es proporcional a la magnitud de la cantidad vectorial (2 cm, 20 N, 40 km/h en los ejemplos anteriores). La dirección de la flecha representa la dirección de la cantidad vectorial.

Tipográficamente los vectores se representan por negrillas, tal como **F**. Cuando son manuscritas, se utiliza cualquiera de las siguientes notaciones: $\vec{\mathbf{F}}$ y $\underset{\sim}{\mathbf{F}}$. Un vector no está por completo definido hasta que se establecen algunas reglas para su comportamiento.

LA RESULTANTE de un número de vectores similares (fuerza vectorial, por ejemplo) es aquel vector que tendrá el mismo efecto que todos los vectores juntos.

SUMA GRÁFICA DE VECTORES (MÉTODO DEL POLÍGONO): Este método para encontrar la resultante $\vec{\mathbf{R}}$ de varios vectores ($\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{\mathbf{B}}$ y $\vec{\mathbf{C}}$) consiste en empezar en un punto conveniente y dibujar (a escala y en la dirección apropiada) cada vector en turno. Se pueden tomar en cualquier orden de sucesión: $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{C}} + \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{R}}$. El extremo posterior de cada flecha se une a la punta de la flecha precedente como se muestra en la Fig. 1-1.

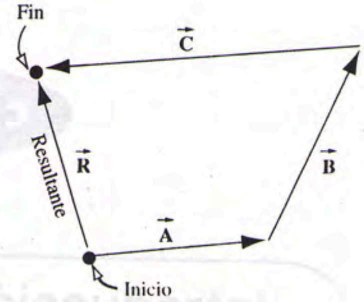


Fig. 1-1

La resultante se representa por una flecha cuyo extremo posterior se localiza en el punto de inicio y su punta termina en la punta del último vector que se ha sumado. Si $\vec{R}$ es la resultante, $R = |\vec{R}|$ es el tamaño o *magnitud* de esa resultante.

MÉTODO DEL PARALELOGRAMO para sumar dos vectores: La resultante de dos vectores que actúan a cualquier ángulo se puede representar por la diagonal de un paralelogramo. Los dos vectores se dibujan como los lados del paralelogramo y la resultante es su diagonal, como se muestra en la Fig. 1-2. La dirección de la resultante es alejarse del origen de los dos vectores.

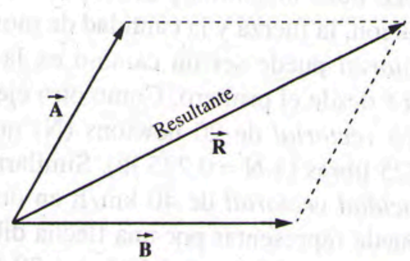


Fig. 1-2

SUSTRACCIÓN DE VECTORES: Para restar un vector $\vec{B}$ de un vector $\vec{A}$, invierta la dirección de $\vec{B}$ y súmelo al vector $\vec{A}$, esto es, $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$.

LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS se definen respecto a un ángulo recto. Para el triángulo recto de la Fig. 1-3, se define

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{B}{C}, \quad \cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{A}{B}, \quad \tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{B}{A}$$

Frecuentemente se usan en las formas

$$B = C \text{ sen } \theta \qquad A = C \cos \theta \qquad B = A \tan \theta$$

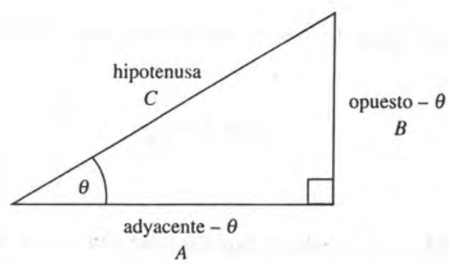


Fig. 1-3

LA COMPONENTE DE UN VECTOR se define como su valor efectivo en una dirección dada. Por ejemplo, la componente x de un desplazamiento es el desplazamiento paralelo al eje x producido por el mismo desplazamiento. Un vector en tres dimensiones se puede considerar como la resultante de sus vectores componentes a lo largo de cualquiera de sus tres direcciones *mutuamente perpendiculares* (*componentes rectangulares*). De manera análoga, un vector en dos dimensiones se puede resolver en dos vectores componentes que actúan a lo largo de dos direcciones mutuamente perpendiculares. En la figura 1-4, se muestra el vector $\vec{\mathbf{R}}$ y sus componentes vectoriales x y y, $\vec{\mathbf{R}}_x$ y $\vec{\mathbf{R}}_y$, los cuales tienen las magnitudes

$$|\vec{\mathbf{R}}_x| = |\vec{\mathbf{R}}| \cos\theta \qquad \text{y} \qquad |\vec{\mathbf{R}}_y| = |\vec{\mathbf{R}}| \text{ sen}\theta$$

o, lo que es equivalente

$$R_x = R \cos \theta \qquad \text{y} \qquad R_y = R \text{ sen } \theta$$

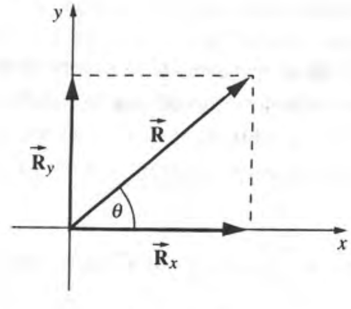


Fig. 1-4

MÉTODO DE COMPONENTES PARA SUMAR VECTORES: Cada vector se separa en sus componentes en las direcciones *x*, *y* y *z*, tomando las componentes en dirección negativa como negativas. La componente *x* de la resultantes $\vec{\mathbf{R}}$ se denota por R_x y es igual a la suma algebraica de todas las componentes *x*. Las componentes *y* y *z* de la resultante se calculan de la misma forma. Conocidas las componentes, se puede calcular la magnitud de la resultante con la ecuación

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

En dos dimensiones, el ángulo que forma la resultante con el eje *x* se puede calcular con la relación

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x}$$

LOS VECTORES UNITARIOS tienen una magnitud de uno y se representan por un símbolo en negrita coronado con un acento circunflejo. Los vectores unitarios especiales $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ se asignan a los ejes *x*, *y* y *z*, respectivamente. Un vector $3\hat{\mathbf{i}}$ representa un vector de 3 unidades de magnitud en la dirección $+x$, mientras que $-5\hat{\mathbf{k}}$ representa un vector de 5 unidades de magnitud en la dirección $-z$. Un vector $\vec{\mathbf{R}}$ que tenga en las direcciones *x*, *y* y *z* componentes R_x, R_y y R_z, respectivamente, se puede escribir como $\vec{\mathbf{R}} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}} + R_z\hat{\mathbf{k}}$.

EL DESPLAZAMIENTO: Cuando un objeto se mueve de un punto en el espacio hacia otro, el desplazamiento es el vector que va de la ubicación inicial a la final. Es independiente de la distancia real recorrida.

PROBLEMAS RESUELTOS

1.1 Utilice el método gráfico para calcular la resultante de los desplazamientos 2.0 m a 40° y 4.0 m a 127°, los ángulos se miden como es costumbre, respecto a la dirección positiva del eje *x*. Dé su respuesta con dos cifras significativas. (En relación con las cifras significativas, véase el apéndice A.)

Escoja los ejes x y *y* como se muestra en la Fig. 1-5 y dibuje a escala los desplazamientos, uno a continuación del otro a partir del origen. Note que todos los ángulos se miden a partir de la dirección positiva del eje $+x$. El vector resultante $\vec{\mathbf{R}}$ se traza desde el origen al punto final del último vector, como se muestra. Para encontrar la magnitud se mide su longitud con la misma escala que se utilizó para trazar las longitudes de los dos desplazamientos, así se obtiene 4.6 m. Con un transportador se mide el ángulo θ, que resulta ser de 101°. Entonces el desplazamiento resultante es de 4.6 m y forma un ángulo de 101° con la dirección positiva del eje *x*.

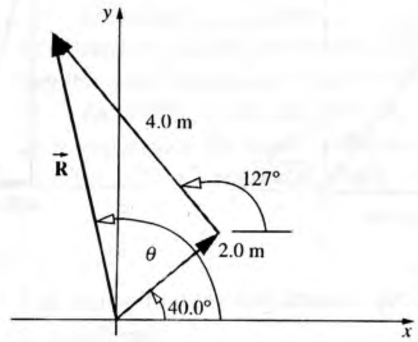


Fig. 1-5

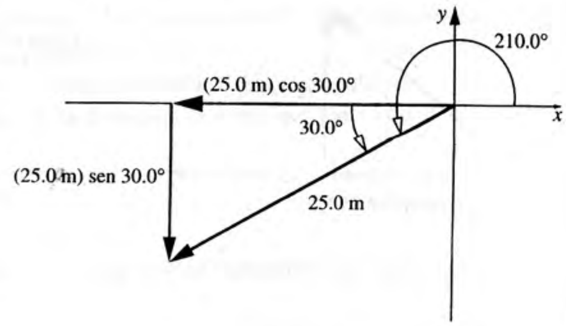


Fig. 1-6

1.2 Calcular las componentes x y y de un desplazamiento de 25.0 m y que forma un ángulo de 210.0° con la dirección positiva del eje x.

El vector desplazamiento y sus componentes se muestran en la Fig. 1-6. Las componentes son

$$\text{componente } x = -(25.0 \text{ m}) \cos 30.0° = -21.7 \text{ m}$$

$$\text{componente } y = -(25.0 \text{ m}) \text{ sen } 30.0° = -12.5 \text{ m}$$

Note que cada componente apunta en la dirección negativa de las coordenadas y por lo mismo se deben tomar como negativas.

1.3 Resolver el problema 1.1 utilizando las componentes rectangulares.

Separar cada vector en sus componentes rectangulares, como se muestra en la Fig. 1.7*a* y *b*. (El vector original se marca con dos rayitas para indicar que se va a separar en sus componentes.) Las componentes de la resultante son:

$$R_x = 1.53 \text{ m} - 2.41 \text{ m} = -0.88 \text{ m} \qquad R_y = 1.29 \text{ m} + 3.19 \text{ m} = 4.48 \text{ m}$$

Note que a las componentes que apuntan en la dirección negativa se les ha asignado un valor negativo.
En la Fig. 1-7*c* se muestra la resultante; donde se puede ver que

$$R = \sqrt{(0.88 \text{ m})^2 + (4.48 \text{ m})^2} = 4.6 \text{ m} \qquad \tan\phi = \frac{4.48 \text{ m}}{0.88 \text{ m}}$$

Entonces, $\phi = 79°$, de donde $\theta = 180° - \phi = 101°$. De donde, $\vec{\mathbf{R}} = 4.6$ m —101° RESPECTO DEL EJE x+; recuerde que los vectores deben tener expresadas sus direcciones de manera explícita.

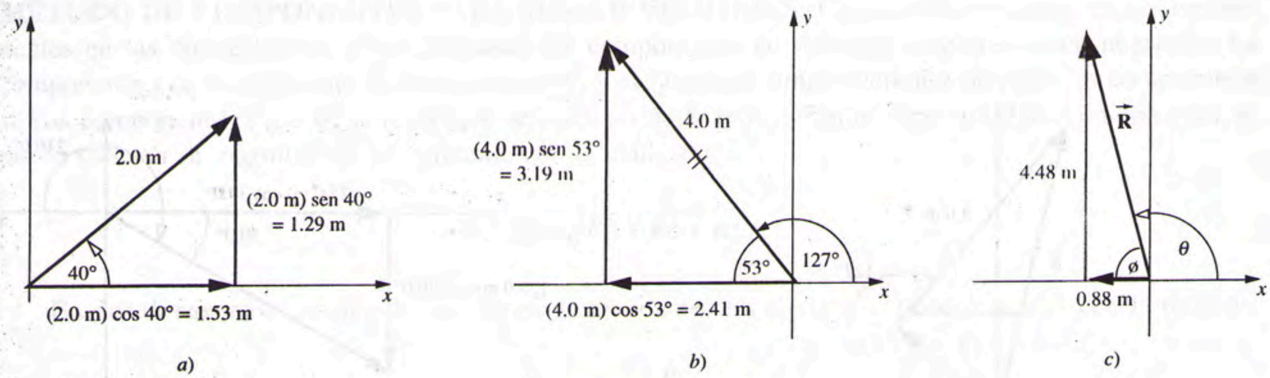


Fig. 1-7

1.4 Utilice el método del paralelogramo para sumar las siguientes fuerzas vectoriales: 30 N a 30° y 20 N a 140°. Recuerde que los números como 30 N y 20 N tienen dos cifras significativas.

Las fuerzas vectoriales se muestran en la Fig. 1-8*a*. Construir un paralelogramo donde los vectores son los lados, como se indica en la Fig. 1-8*b*. La diagonal representa la resultante $\vec{R}$. Midiendo, se encuentra que $\vec{R}$ tiene 30 N a 72°.

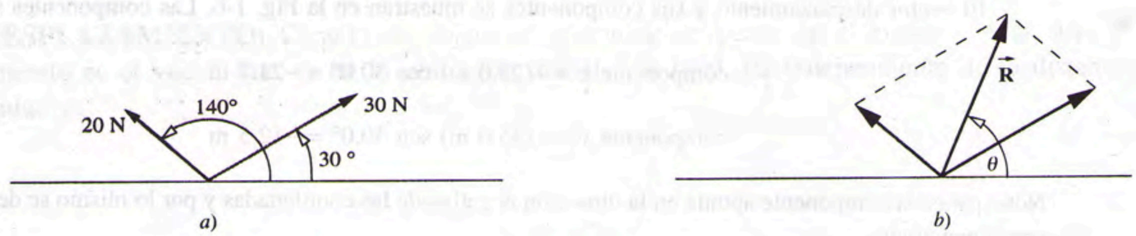


Fig. 1-8

1.5 Cuatro fuerzas coplanares actúan sobre un cuerpo en un punto *O* como se muestra en la Fig. 1-9*a*. Encontrar la resultante por el método gráfico.

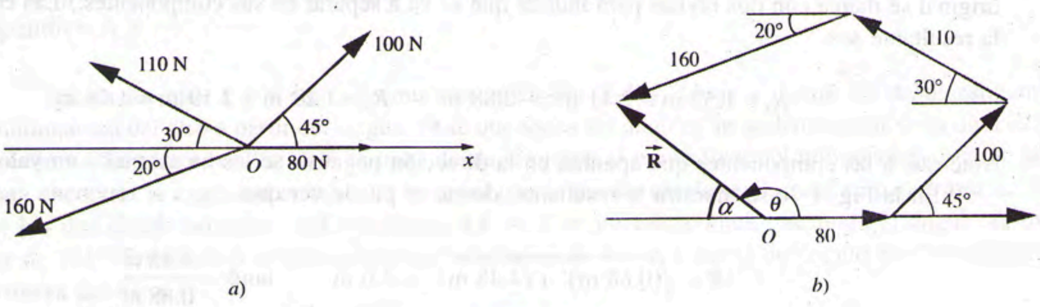


Fig. 1-9

Empezando en el punto O, se trazan en turno los cuatro vectores como se ilustra en la Fig. 1-9*b*. El extremo inicial de cada vector se coloca en el extremo final del precedente. La flecha trazada desde O al extremo final del último vector, es la resultante de la suma de vectores.

En el dibujo a escala de la Fig. 1-9*b* se mide R, obteniéndose 119 N. El ángulo $\alpha = 37°$ se midió con un transportador. El ángulo que forma la resultante con la dirección positiva del eje x está dado por $\theta - 180° - 37° = 143°$. La resultante será 119 N a 143°.

1.6 Las cinco fuerzas coplanares que se muestran en la Fig. 1-10*a* actúan sobre un objeto. Encontrar la resultante.

1) En primer término calcular las componentes x y y de la fuerza. Estas componentes son:

Fuerza	Componente x	Componente y
19.0 N	19.0 N	0 N
15.0 N	(15.0 N) cos 60.0° = 7.50 N	(15.0 N) sen 60.0° = 13.0 N
16.0 N	–(16.0 N) cos 45.0° = –11.3 N	(16.0 N) sen 45.0° = 11.3 N
11.0 N	–(11.0 N) cos 30.0° = –9.53 N	–(11.0 N) sen 30.0° = –5.50 N
22.0 N	0 N	–22.0 N

Note que los signos + y – indican la dirección.

2) Las componentes de la resultante $\vec{\mathbf{R}}$ son $R_x = \sum F_x$ y $R_y = \sum F_y$, donde $\sum F_x$ se lee "la suma de todas las componentes x de la fuerza". Entonces

$$R_x = 19.0\ \text{N} + 7.50\ \text{N} - 11.3\ \text{N} - 9.53\ \text{N} + 0\ \text{N} = +5.7\ \text{N}$$
$$R_y = 0\ \text{N} + 13.0\ \text{N} + 11.3\ \text{N} - 5.50\ \text{N} - 22.0\ \text{N} = -3.2\ \text{N}$$

3) La magnitud de la resultante es

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 65\ \ \text{N}$$

4) Finalmente, se traza la resultante como se muestra en la Fig. 1-10*b* y se mide el ángulo. Como se puede ver

$$\tan\phi = \frac{3.2\,\text{N}}{5.7\,\text{N}} = 0.56$$

de donde $\phi = 29°$. Entonces $\theta = 360° - 29° = 331°$. La resultante es 6.5 N a 331° (o –29°) o bien, $\vec{\mathbf{R}} = 6.5$ N —331° RESPECTO DEL EJE X+.

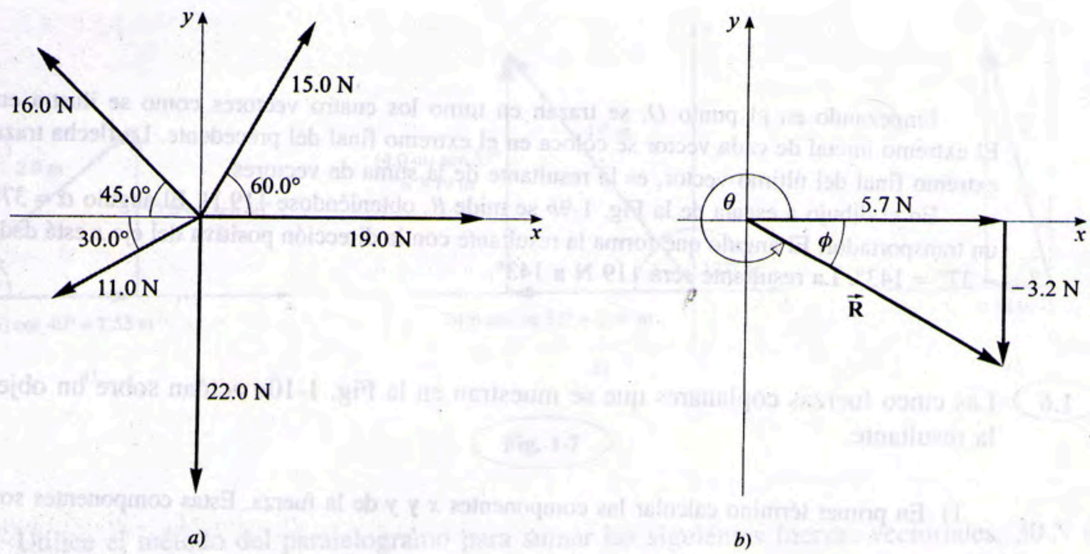


Fig. 1-10

1.7 **Resolver el problema 1.5 por el método de componentes. Dé su respuesta de la magnitud hasta dos cifras significativas.**

Los vectores y sus componentes son:

Fuerza	Componente x	Componente y
80 N	80 N	0
100 N	(100 N) cos 45° = 71 N	(100 N) sen 45° = 71 N
110 N	−(110 N) cos 30° = −95 N	(110 N) sen 30° = 55 N
160 N	−(160 N) cos 20° = −150 N	−(160 N) sen 20° = −55 N

Note los signos de cada componente. El cálculo de la resultante es como se indica:

$$R_x = \Sigma F_x = 80\text{ N} + 71\text{ N} - 95\text{ N} - 150\text{ N} = -94\text{ N}$$
$$R_y = \Sigma F_y = 0 + 71\text{ N} + 55\text{ N} - 55\text{ N} = 71\text{ N}$$

La resultante se muestra en la Fig. 1-11; donde se puede ver que

$$R = \sqrt{(94\text{ N})^2 + (71\text{ N})^2} = 1.2 \times 10^2\text{ N}$$

Y tan $\alpha = (71\text{ N})/(94\text{ N})$, de donde $\alpha = 37°$. Por lo tanto, la resultante es 118 N a 180° − 37° = 143° o bien $\vec{R}$ = 118 N —143° RESPECTO DEL EJE $x+$.

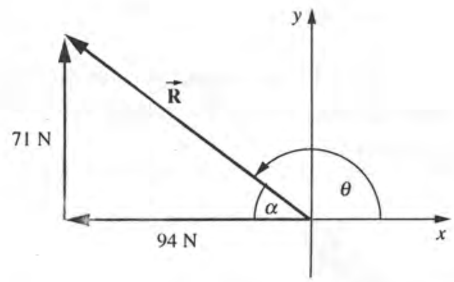


Fig. 1-11

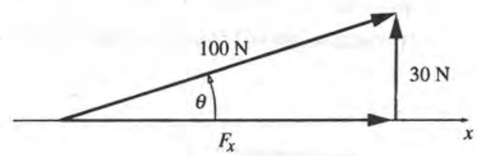


Fig. 1-12

1.8 Una fuerza de 100 N forma un ángulo de θ con el eje x y tiene una componente y de 30 N. Calcular la componente x de la fuerza y el ángulo θ. (Recuerde que el número 100 N tiene tres cifras significativas, mientras 30 N sólo tiene dos.)

En la Fig. 1-12 se han esquematizado los datos. Se desea encontrar F_x y θ. Sabemos que

$$\text{sen } \theta = \frac{30 \text{ N}}{100 \text{ N}} = 0.30$$

de donde $\theta = 17.46°$, o para dos cifras significativas, $\theta = 17°$. Entonces, usando el cos θ, se obtiene

$$F_x = (100 \text{ N}) \cos 17.46° = 95 \text{ N}$$

1.9 Un niño jala un trineo con una cuerda aplicando una fuerza de 60 N. La cuerda forma un ángulo de 40° respecto al piso. *a*) Calcular el valor efectivo de la componente horizontal del jalón que tiende a poner en movimiento al trineo en dirección paralela al piso. *b*) Calcular la fuerza que tiende a levantar verticalmente al trineo.

En la Fig. 1-13 se muestran las componentes de la fuerza de 60 N y éstas son 39 N y 46 N. *a*) El jalón paralelo al piso es la componente horizontal, 46 N. *b*) La fuerza de levantamiento es la componente vertical, 39 N.

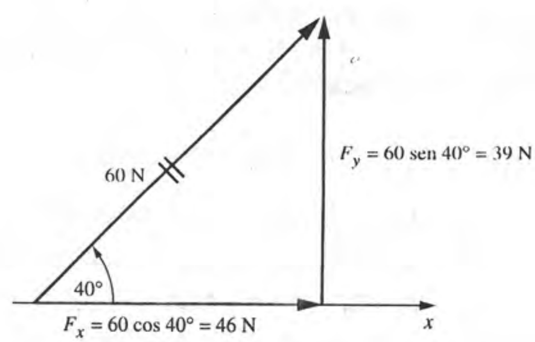


Fig. 1-13

1.10 Un carro cuyo peso es F_W se encuentra en una rampa que forma un ángulo θ con la horizontal. ¿Qué tan grande es la fuerza perpendicular que debe resistir la rampa para que no se rompa bajo el peso del carro?

Como se muestra en la Fig. 1-14, el peso del carro es una fuerza $\vec{\mathbf{F}}_W$ que lo jala directamente hacia abajo. Tomar las componentes de $\vec{\mathbf{F}}$ a lo largo del plano y perpendicular a éste. La rampa debe balancear la componente de la fuerza $F_W \cos\theta$ para que el carro no la rompa.

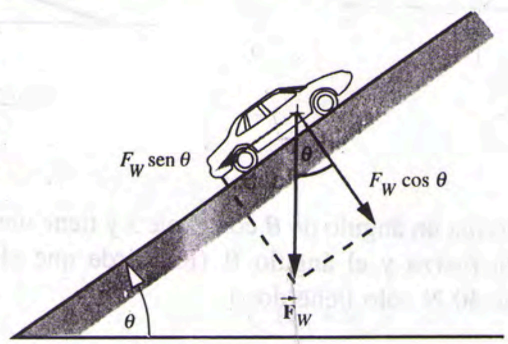


Fig. 1-14

1.11 Representar analíticamente las fuerzas que se muestran en las Figs. 1-7*c*, 1-10*b*, 1-11 y 1-13, esto es, escribirlas en la forma $\vec{\mathbf{R}} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}} + R_z\hat{\mathbf{k}}$ (ignorar las unidades).

Recuerde que los signos más y menos se utilizan para indicar la dirección a lo largo de los ejes coordenados. Se puede escribir

Para la Fig. 1-7*c*: $\vec{\mathbf{R}} = -0.88\hat{\mathbf{i}} + 4.48\hat{\mathbf{j}}$

Para la Fig. 1-10*b*: $\vec{\mathbf{R}} = 5.7\hat{\mathbf{i}} - 3.2\hat{\mathbf{j}}$

Para la Fig. 1-11: $\vec{\mathbf{R}} = -94\hat{\mathbf{i}} + 71\hat{\mathbf{j}}$

Para la Fig. 1-13: $\vec{\mathbf{R}} = 46\hat{\mathbf{i}} + 39\hat{\mathbf{j}}$

1.12 Tres fuerzas que actúan sobre una partícula están dadas por $\vec{\mathbf{F}}_1 = (20\hat{\mathbf{i}} - 36\hat{\mathbf{j}} + 73\hat{\mathbf{k}})$ N, $\vec{\mathbf{F}}_2 = (-17\hat{\mathbf{i}} + 21\hat{\mathbf{j}} - 46\hat{\mathbf{k}})$ N y $\vec{\mathbf{F}}_3 = (-12\hat{\mathbf{k}})$ N. Encontrar las componentes de la resultante y calcular su magnitud hasta dos cifras significativas.

Se sabe que

$$R_x = \Sigma F_x = 20\text{ N} - 17\text{ N} + 0\text{ N} = 3\text{ N}$$
$$R_y = \Sigma F_y = -36\text{ N} + 21\text{ N} + 0\text{ N} = -15\text{ N}$$
$$R_z = \Sigma F_z = 73\text{ N} - 46\text{ N} - 12\text{ N} = 15\text{ N}$$

Como $\vec{\mathbf{R}} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}} + R_z\hat{\mathbf{k}}$, se obtiene que

$$\vec{\mathbf{R}} = 3\hat{\mathbf{i}} - 15\hat{\mathbf{j}} + 15\hat{\mathbf{k}}$$

Para dos cifras significativas, por el teorema tridimensional de Pitágoras se encuentra que

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{459} = 21\ \text{N}$$

1.13 Por el método gráfico calcular las siguientes operaciones vectoriales de suma y resta donde $\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{\mathbf{B}}$ y $\vec{\mathbf{C}}$ son los vectores que se muestran en la Fig. 1-15: *a*) $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$; *b*) $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}$; *c*) $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$; *d*) $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{C}}$.

Siga la Fig. 1-15 desde *a*) hasta *d*). En *c*), $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{A}} + (-\vec{\mathbf{B}})$; como puede ver, para sustraer $\vec{\mathbf{B}}$ de $\vec{\mathbf{A}}$, la dirección de $\vec{\mathbf{B}}$ se invierte sumándose vectorialmente con $\vec{\mathbf{A}}$. En forma similar, en *d*) $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} + (-\vec{\mathbf{C}})$, donde $-\vec{\mathbf{C}}$ es igual en magnitud pero de sentido opuesto a $\vec{\mathbf{C}}$.

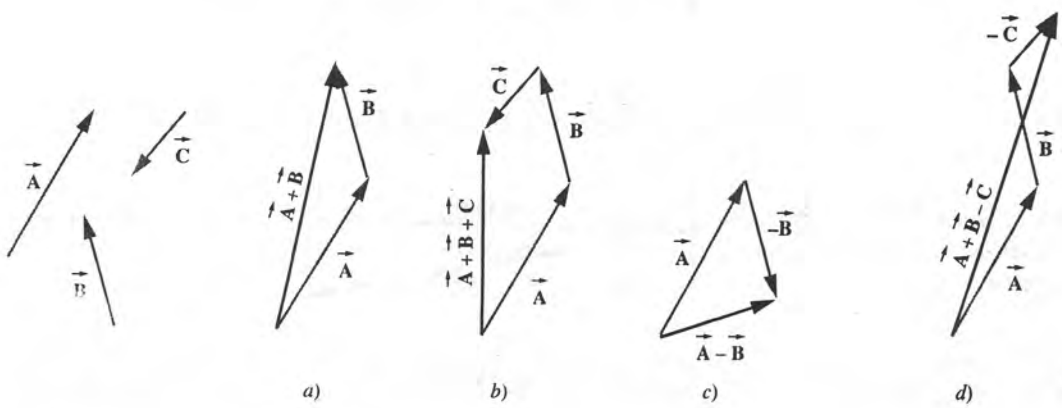


Fig. 1-15

1.14 Si $\vec{\mathbf{A}} = -12\hat{\mathbf{i}} + 25\hat{\mathbf{j}} + 13\hat{\mathbf{k}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = -3\hat{\mathbf{j}} + 7\hat{\mathbf{k}}$ calcule la sustracción de $\vec{\mathbf{B}}$ menos $\vec{\mathbf{A}}$.

Desde un punto de vista algebraico, se tiene

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}} &= (-3\hat{\mathbf{j}} + 7\hat{\mathbf{k}}) - (-12\hat{\mathbf{i}} + 25\hat{\mathbf{j}} + 13\hat{\mathbf{k}}) \\ &= -3\hat{\mathbf{j}} + 7\hat{\mathbf{k}} + 12\hat{\mathbf{i}} - 25\hat{\mathbf{j}} - 13\hat{\mathbf{k}} = 12\hat{\mathbf{i}} - 28\hat{\mathbf{j}} - 6\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

Note que $12\hat{\mathbf{i}} - 25\hat{\mathbf{j}} - 13\hat{\mathbf{k}}$ es el vector $\vec{\mathbf{A}}$ al que se ha invertido la dirección. Por lo tanto, en esencia, invierta $\vec{\mathbf{A}}$ y sume a $\vec{\mathbf{B}}$.

1.15 Un bote puede navegar con una rapidez de 8 km/h en agua tranquila en un lago. En el agua corriente de un río, en su movimiento relativo respecto a la corriente se puede mover a 8 km/h. Si la rapidez del río es 3 km/h, ¿qué tan rápido se mueve el bote respecto a un árbol que se encuentra en la ribera cuando viaja *a*) contra la corriente y *b*) en favor de la corriente?

a) Si el agua estuviera quieta, la rapidez del bote al pasar el árbol sería de 8 km/h. Pero la corriente lo arrastra en la dirección opuesta a 3 km/h. Por lo que la rapidez relativa del bote respecto al árbol es 8 km/h − 3 km/h = 5 km/h.

b) En este caso, la corriente arrastra al bote en la misma dirección en que se mueve. Entonces la rapidez respecto al árbol es 8 km/h + 3 km/h = 11 km/h.

1.16 Un avión viaja en dirección este con una rapidez de crucero de 500 km/h. Si el viento sopla en dirección sur con una rapidez de 90 km/h, ¿cuál es la dirección y rapidez relativa del avión respecto al suelo?

La velocidad resultante del avión es la suma de las dos velocidades, 500 km/h en dirección ESTE y 90 km/h en dirección SUR. Las componentes de la velocidad resultante se muestran en la Fig. 1-16. La velocidad resultante es

$$R = \sqrt{(500 \text{ km/h})^2 + (90 \text{ km/h})^2} = 508 \text{ km/h}$$

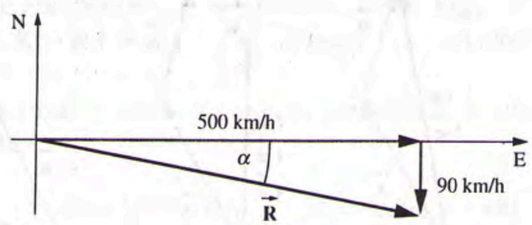


Fig. 1-16

y el ángulo α

$$\tan \alpha = \frac{90 \text{ km/h}}{500 \text{ km/h}} = 0.18$$

de donde $\alpha = 10°$. La velocidad relativa del avión respecto al suelo es 508 km/h a 10° dirección sureste.

1.17 Con la misma velocidad de crucero que en el problema 1.16, ¿en qué dirección debe viajar el avión para que la velocidad resultante tenga una dirección este relativa a la Tierra?

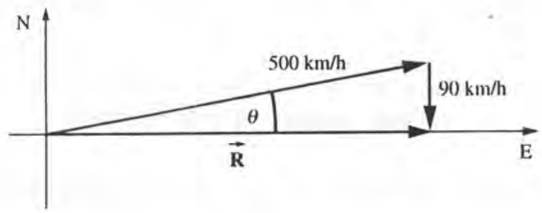


Fig. 1-17

La suma de la velocidad de crucero del avión y la del viento será la velocidad resultante del avión respecto a la Tierra. Esto se muestra en el diagrama vectorial de la Fig. 1-17, donde la velocidad resultante apunta en dirección este como se pide en el enunciado del problema. Tomando en cuenta que la velocidad del viento se da en dos cifras significativas se puede ver que sen $\theta = (90 \text{ km/h})(500 \text{ km/h})$, de donde $\theta = 10°$. El avión debe viajar con una dirección de 10° noreste para que se pueda mover en dirección este respecto a la Tierra.

Para poder calcular la velocidad del avión en dirección este se puede ver que $R = (500 \text{ km/h}) \cos \theta = 4.9 + 10^5 \text{ km/h}$.

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

1.18 Partiendo del centro de una ciudad, un automóvil viaja hacia el este hasta recorrer 80.0 km y, a continuación, da vuelta hacia al sur y recorre 192 km, en donde se le termina la gasolina. Determine el desplazamiento del automóvil detenido a partir del centro de la ciudad. *Resp.* 208 km — 67.4° HACIA EL SURESTE

1.19 Se coloca una pequeña tortuga en el origen de una cuadrícula *xy* dibujada sobre una hoja grande de papel. Cada cuadro tiene 1.0 cm por 1.0 cm. La tortuga vaga sobre el papel durante un rato y, por último, se detiene en el punto (24, 10); es decir, 24 cuadros a lo largo del eje *x* y 10 cuadros a lo largo del eje *y*. Determine el desplazamiento de la tortuga, desde el origen hasta el punto en el que se detiene. *Resp.* 26 cm — 23° ARRIBA DEL EJE *X*

1.20 Un insecto comienza a moverse en un punto *A*, se arrastra 8.0 cm al este, 5.0 cm al sur, 3.0 cm al oeste, y 4.0 cm al norte hasta un punto *B*. *a*) ¿Qué tan retirado se encuentra el punto *B* del *A* en dirección norte y en dirección este? *b*) Calcular el desplazamiento de *A* a *B* gráfica y algebraicamente. *Resp.* *a*) 5.0 cm al ESTE, 1.0 cm al NORTE; *b*), 5.10 cm a 11.3° al SURESTE

1.21 Calcular las componentes *x* y *y* de los siguientes desplazamientos en el plano *xy*: *a*) 300 cm a 127° y *b*) 500 cm a 220°. *Resp.* *a*) −180 cm, 240 cm; *b*) −383 cm, −321 cm

1.22 Dos fuerzas actúan sobre un objeto puntual de la siguiente forma: 100 N a 170.0° y 100 N a 50.0°. Calcular su resultante. *Resp.* 100 N a 110°

1.23 Partiendo del origen de coordenadas, se realizan los siguientes desplazamientos en el plano *xy* (esto es, los desplazamientos son coplanares): 60 mm en dirección $+y$, 30 mm en dirección $-x$, 40 mm a 150°, y 50 mm a 240°. Calcular el desplazamiento resultante gráfica y algebraicamente. *Resp.* 97 mm a 158°

1.24 Calcule algebraicamente la resultante de las siguientes fuerzas coplanares: 100 N a 30°, 141.4 N a 45°, y 100 N a 240°. Compruebe su resultado aplicando el método gráfico. *Resp.* 0.15 kN a 25°

1.25 Calcule algebraicamente la resultante de los siguientes desplazamientos coplanares: 20.0 m a 30.0°, 40.0 m a 120.0°, 25.0 m a 180.0°, 42.0 m a 270° y 12.0 m a 315.0°. Compruebe su respuesta resolviendo gráficamente. *Resp.* 20.1 m a 197°

1.26 Dos fuerzas, 80 N y 100 N que forman un ángulo de 60° entre sí, empujan un objeto. *a*) ¿Qué fuerza reemplazará a las dos fuerzas? *b*) ¿Qué fuerza (llamada *equilibrante*) balanceará a ambas fuerzas? Resolver algebraicamente. *Resp.* *a*) $\vec{R}$: 0.16 kN a 34° respecto a la fuerza de 80 N; *b*) $-\vec{R}$: 0.16 kN a 214° respecto a la fuerza de 80 N

1.27 Calcular algebraicamente *a*) la resultante y *b*) la equilibrante (véase el problema 1.26) de las siguientes fuerzas coplanares: 300 N a 0°, 400 N a 30° y 400 N a 150°. *Resp.* *a*) 0.50 kN a 53°; *b*) 0.50 kN a 233°

1.28 La componente *x* de un desplazamiento es de 450 m. Calcular el desplazamiento si éste forma un ángulo de 70° con dicha componente. ¿Cuál es el valor de la componente *y*? *Resp.* 1.3 km, 1.2 km

1.29 ¿Qué desplazamiento se debe sumar a otro de 50 cm en la dirección $+x$ para que el desplazamiento resultante sea de 85 cm a 25°? *Resp.* 45 cm a 53°

1.30 Véase la Fig 1-18. Exprese, en términos de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, los vectores *a*) $\vec{P}$, *b*) $\vec{R}$, *c*) $\vec{S}$ y *d*) $\vec{Q}$. *Resp.* *a*) $\vec{A}+\vec{B}$; *b*) $\vec{B}$; *c*) $-\vec{A}$; *d*) $\vec{A}-\vec{B}$

1.31 Véase a la Fig. 1-19. Exprese, en términos de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, los vectores *a*) $\vec{E}$, *b*) $\vec{D}-\vec{C}$ y *c*) $\vec{E}+\vec{D}-\vec{C}$. *Resp.* *a*) $-\vec{A}-\vec{B}$ o $-(\vec{A}+\vec{B})$; *b*) $\vec{A}$; *c*) $-\vec{B}$

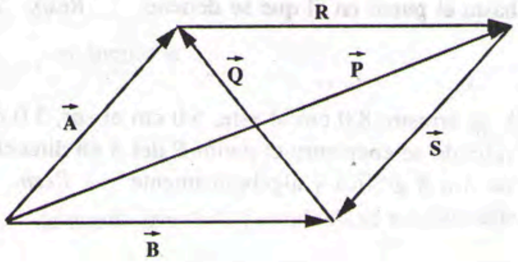


Fig. 1-18

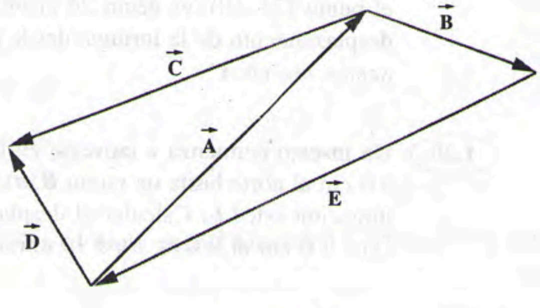


Fig. 1-19

1.32 Un niño frena una carreta para impedir que ruede hacia atrás en un camino inclinado que forma un ángulo de 20° con la horizontal. Si la carreta pesa 150 N, ¿con qué fuerza debe jalar el niño la palanca del freno si ésta es paralela a la pendiente? *Resp.* 51 N

1.33 Repita el problema 1.32 si la palanca del freno forma un ángulo de 30° con la pendiente. *Resp.* 59 N

1.34 Calcular *a*) $\vec{\mathbf{A}}+\vec{\mathbf{B}}+\vec{\mathbf{C}}$, *b*) $\vec{\mathbf{A}}-\vec{\mathbf{B}}$ y *c*) $\vec{\mathbf{A}}-\vec{\mathbf{C}}$ si $\vec{\mathbf{A}}=7\hat{\mathbf{i}}-6\hat{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{B}}=-3\hat{\mathbf{i}}+12\hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{\mathbf{C}}=4\hat{\mathbf{i}}-4\hat{\mathbf{j}}$. *Resp.* *a*) $8\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}$; *b*) $10\hat{\mathbf{i}}-18\hat{\mathbf{j}}$; *c*) $3\hat{\mathbf{i}}-2\hat{\mathbf{j}}$

1.35 Calcular la magnitud y el ángulo de $\vec{\mathbf{R}}$ si $\vec{\mathbf{R}}=7.0\hat{\mathbf{i}}-12\hat{\mathbf{j}}$. *Resp.* 14 a −60°

1.36 ¿Qué desplazamiento se debe sumar a otro de $(25\hat{\mathbf{i}}-16\hat{\mathbf{j}})$ m para que el desplazamiento sea de 7.0 m y apunte en la dirección $+x$? *Resp.* $(-18\hat{\mathbf{i}}+16\hat{\mathbf{j}})$ m

1.37 Una fuerza de $(15\hat{\mathbf{i}}-16\hat{\mathbf{j}}+27\hat{\mathbf{k}})$ N se suma a otra de $(23\hat{\mathbf{j}}-40\hat{\mathbf{k}})$ N. ¿Cuál es la magnitud de la resultante? *Resp.* 21 N

1.38 Un trailer se mueve en dirección norte con una rapidez de 70 km/h. El humo que sale por el tubo de escape, localizado arriba del tractor, forma atrás del trailer un ángulo de 20° en dirección sureste. Si el viento sopla en dirección este, ¿cuál es la rapidez del viento en ese lugar? *Resp.* 25 km/h

1.39 Un barco viaja en dirección este a 10 km/h. ¿Cuál debe ser la rapidez de un segundo barco que viaja en dirección 30° al noreste si siempre se localiza al norte del primer barco? *Resp.* 20 km/h

1.40 Un bote que se impulsa con una rapidez de 0.50 m/s en agua tranquila, atraviesa un río que tiene 60 m de ancho. El río fluye con una rapidez de 0.30 m/s. *a*) ¿Con qué ángulo, respecto a la perpendicular a la corriente, se debe dirigir el bote? *b*) ¿Qué tiempo le lleva al bote cruzar el río? *Resp.* *a*) 37° río arriba; *b*) 1.5×10^2 s

1.41 Un borracho descuidado juega con una pistola en un avión que se dirige al este a 500 km/h. El borracho dispara la pistola directamente hacia el techo del avión. La bala sale de la pistola con una rapidez de 1000 km/h. Respecto a un observador en tierra, ¿qué ángulo forma la dirección de la bala con la vertical? *Resp.* 26.6°

capítulo 2

Movimiento uniformemente acelerado

LA RAPIDEZ es una cantidad escalar. Si un objeto requiere de un tiempo t para recorrer una distancia x, entonces

$$\textit{Rapidez promedio} = \frac{\text{distancia total recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

o

$$v_{prom} = \frac{x}{t}$$

Aquí la distancia es el recorrido total del objeto a lo largo de su trayectoria. Esto es lo que mide el odómetro de un automóvil.

LA VELOCIDAD es una magnitud vectorial. Si un objeto experimenta un desplazamiento vectorial $\vec{\mathbf{x}}$ en un tiempo t, tenemos que

$$\textit{Velocidad promedio} = \frac{\text{desplazamiento vectorial}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

$$\vec{\mathbf{v}}_{prom} = \frac{\vec{x}}{t}$$

La dirección del vector velocidad es la misma que la del vector desplazamiento. Las unidades de velocidad (y rapidez) son unidades de longitud divididas entre unidades de tiempo, tales como m/s o km/h.

LA ACELERACIÓN mide la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo. Por consiguiente

$$\textit{Aceleración promedio} = \frac{\text{cambio en la velocidad vectorial}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

$$\vec{\mathbf{a}}_{prom} = \frac{\vec{\mathbf{v}}_f - \vec{\mathbf{v}}_0}{t}$$

donde $\vec{\mathbf{v}}_0$ es la velocidad inicial, $\vec{\mathbf{v}}_f$ es la velocidad final, y t es el tiempo transcurrido durante el cambio. Las unidades de aceleración son unidades de velocidad divididas entre unidades de tiempo. Algunos ejemplos son (m/s)/s (o bien m/s^2) y (km/h)/s (o bien km/h · s). Nótese que la aceleración es una cantidad vectorial, y tiene la dirección del cambio de velocidad $\vec{\mathbf{v}}_f - \vec{\mathbf{v}}_0$. No obstante, es un lugar común hablar de la magnitud de la aceleración diciendo solamente aceleración, siempre que no exista ambigüedad.

EL MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO es una situación excepcionalmente importante. En este caso, el *vector aceleración es constante* y su línea de acción está a lo largo del vector desplazamiento, así que las direcciones del vector $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{a}}$ se pueden indicar con signos positivos o negativos. Si el desplazamiento se representa con x (positivo si va en sentido positivo, y negativo si el sentido es negativo), el movimiento puede describirse con las *cinco ecuaciones de movimiento* para el movimiento uniformemente acelerado:

$$x = v_{prom}t$$

$$v_{prom} = \frac{v_f + v_0}{2}$$

$$a = \frac{v_f - v_0}{t}$$

at = vf − v0
v0 + at = vf

$$v_f^2 = v_0^2 + 2as$$

$$x = v_0t + \tfrac{1}{2}at^2$$

Con frecuencia, x se reemplaza con y o con s y algunas veces v_f se escribe simplemente como v.

LA DIRECCIÓN ES IMPORTANTE y debe escogerse el sentido positivo cuando se analiza un movimiento a lo largo de una línea recta. A cualquier dirección se le puede asignar el sentido positivo. Si un desplazamiento, velocidad o aceleración se plantea en sentido opuesto, éste debe tomarse como negativo.

VELOCIDAD INSTANTÁNEA es la velocidad promedio evaluada durante un intervalo de tiempo que se aproxima a cero. De esta manera, si un objeto realiza un desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{x}}$ en un tiempo Δt, entonces para el objeto,

$$\vec{\mathbf{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\mathbf{x}}}{\Delta t}$$

donde la notación significa que la relación $\Delta\vec{\mathbf{x}}/\Delta t$ debe calcularse durante un intervalo de tiempo Δt que se aproxime a cero.

LA INTERPRETACIÓN GRÁFICA del movimiento rectilíneo (en la dirección del eje de las x) es como sigue:

- La *velocidad instantánea* de un objeto en determinado tiempo en una gráfica de x contra t, es igual al valor de la pendiente de la línea tangente, en ese tiempo. Puede ser positiva, negativa o cero.
- La *aceleración instantánea* de un objeto en determinado tiempo en una gráfica de υ contra t, es el valor de la pendiente de la línea tangente, en ese tiempo.
- Para un movimiento con velocidad constante, la gráfica de x contra t es una línea recta. Para el movimiento de aceleración constante, la gráfica de υ contra t, es también una línea recta.
- En general (es decir, movimiento bidimensional o tridimensional), la pendiente en cualquier momento de la gráfica de la distancia contra el tiempo es la rapidez (o magnitud de la velocidad).

ACELERACIÓN DEBIDA A LA GRAVEDAD (g): La aceleración de un cuerpo que se mueve sólo por la atracción gravitacional es g, la aceleración gravitacional (o de caída libre), la cual tiene dirección vertical hacia abajo. En la superficie de la Tierra tiene un valor de $g = 9.81\ \text{m/s}^2$ ($= 32.2\ \text{pies/s}^2$); este valor sufre ligeras variaciones de un lugar a otro. Sobre la superficie de la Luna, el valor de la aceleración de caída libre es $1.6\ \text{m/s}^2$.

COMPONENTES DE LA VELOCIDAD: Supóngase que un objeto se mueve con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ que forma algún ángulo θ hacia arriba del eje x, como sería inicialmente el caso de una pelota lanzada al aire. Entonces esa velocidad tiene las componentes vectoriales x y y (véase la Fig. 1-4) de $\vec{\mathbf{v}}_x$ y $\vec{\mathbf{v}}_y$. Las componentes escalares correspondientes de la velocidad son

$$\upsilon_x = \upsilon \cos\theta \qquad \text{y} \qquad \upsilon_y = \upsilon \operatorname{sen}\theta$$

y puede resultar que éstos sean números positivos o negativos, dependiendo de θ. Como regla, si $\vec{\mathbf{v}}$ está en el primer cuadrante, $\upsilon_x > 0$ y $\upsilon_y > 0$; si $\vec{\mathbf{v}}$ está en el segundo cuadrante, $\upsilon_x < 0$ y $\upsilon_y > 0$; si $\vec{\mathbf{v}}$ está en el tercer cuadrante, $\upsilon_x < 0$ y $\upsilon_y < 0$; por último, si $\vec{\mathbf{v}}$ está en el cuarto cuadrante, $\upsilon_x > 0$ y $\upsilon_y < 0$. Debido a que estas cantidades tienen signos y, por lo tanto, direcciones implicadas a lo largo de ejes conocidos, es común referirse a ellas como velocidades. El lector encontrará ese uso en muchos textos, pero no sin desventajas pedagógicas. En lugar de ello, se evitará aplicar el término "velocidad" a todo, excepto a una cantidad vectorial (escrita en negritas con una flecha arriba) cuya dirección se expresa de manera explícita. De este modo, para un objeto que se mueve con una velocidad $\vec{\mathbf{v}} = 100$ m/s —hacia el OESTE, el *valor escalar de la velocidad a lo largo de eje x* es $\upsilon_x = -100$ m/s, y la *rapidez* (o *magnitud de la velocidad,* siempre positiva) es $\upsilon = 100$ m/s.

LOS PROBLEMAS DE PROYECTILES pueden resolverse fácilmente si se desprecia el rozamiento (fricción) con el aire. Para simplificar el problema se puede considerar el movimiento del proyectil como dos movimientos independientes: uno horizontal con $a = 0$ y $\upsilon_f = \upsilon_0 = \upsilon_{prom}$ (es decir, con velocidad constante), y un movimiento vertical con $a = g = 9.81\ \text{m/s}^2$ dirigido hacia abajo.

PROBLEMAS RESUELTOS

2.1 Cambie las unidades de la rapidez de 0.200 cm/s a km/año.

$$0.200\,\frac{\text{cm}}{\text{s}} = \left(0.200\,\frac{\cancel{\text{cm}}}{\cancel{\text{s}}}\right)\left(10^{-5}\,\frac{\text{km}}{\cancel{\text{cm}}}\right)\left(3600\,\frac{\cancel{\text{s}}}{\cancel{\text{h}}}\right)\left(24\,\frac{\cancel{\text{h}}}{\cancel{\text{d}}}\right)\left(365\,\frac{\cancel{\text{d}}}{\text{año}}\right) = 63.1\,\frac{\text{km}}{\text{año}}$$

d t

2.2 Un corredor completa una vuelta alrededor de una pista de 200 m en un tiempo de 25 s. ¿Cuáles fueron: *a*) la rapidez promedio, y *b*) la velocidad promedio del corredor?

a) De la definición,

$$\text{Rapidez promedio} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{200\text{ m}}{25\text{ s}} = 8.0\text{ m/s}$$

b) Ya que el punto final de la carrera fue el punto de partida, el vector desplazamiento, del principio al punto final, tiene una longitud cero. Entonces, $\vec{\mathbf{v}}_{prom} = \vec{\mathbf{s}}/t$,

$$\left|\vec{\mathbf{v}}_{prom}\right| = \frac{0\text{ m}}{25\text{ s}} = 0\text{ m/s}$$

$v_0=0$ a =

2.3 Un objeto parte del reposo con una aceleración constante de 8.00 m/s² a lo largo de una línea recta. Encuéntrense *a*) la rapidez después de 5.00 s, *b*) la rapidez promedio para el intervalo de 5.00 s y *c*) la distancia total recorrida en los 5.00 s.

Nótese que nos interesa sólo el movimiento para los primeros 5.00 s. Consideremos la dirección del movimiento en dirección del eje x positivo. Se sabe que $v_0 = 0$, $t = 5.00$ s, y que $a = 8.00\text{ m/s}^2$, Así que el movimiento es uniformemente acelerado y pueden aplicarse las cinco ecuaciones de movimiento.

a) $$v_{fx} = v_{0x} + at = 0 + (8.00\text{ m/s}^2)(5.00\text{ s}) = 40.0\text{ m/s}$$

b) $$v_{prom} = \frac{v_{0x} + v_{fx}}{2} = \frac{0 + 40.0}{2}\text{ m/s} = 20.0\text{ m/s}$$

c) $$x = v_{0x}t + \tfrac{1}{2}at^2 = 0 + \tfrac{1}{2}(8.00\text{ m/s}^2)(5.00\text{ s})^2 = 100\text{ m} \quad \text{o bien}$$
$$x = v_{prom}t = (20.0\text{ m/s})(5.00\text{ s}) = 100\text{ m}$$

2.4 La rapidez de un camión se incrementa uniformemente desde 15 km/h hasta 60 km/h en 20 s. Determínense, *a*) la rapidez promedio, *b*) la aceleración y *c*) la distancia recorrida, todo en unidades de metros y segundos.

Para los primeros 20 s de viaje, tomaremos la dirección del movimiento en la dirección de +x, y tenemos:

$$v_{0x} = \left(15 \frac{\cancel{km}}{\cancel{h}}\right)\left(1000 \frac{m}{\cancel{km}}\right)\left(\frac{1}{3600} \frac{\cancel{h}}{s}\right) = 4.17 \text{ m/s}$$

$$v_{fx} = 60 \text{ km/h} = 16.7 \text{ m/s}$$

a) $$b_{prom} = \tfrac{1}{2}(v_{0x} + v_{fx}) = \tfrac{1}{2}(4.17 + 16.7) \text{ m/s} = 10 \text{ m/s}$$

b) $$a = \frac{v_{fx} - v_{0x}}{t} = \frac{(16.7 - 4.17) \text{ m/s}}{20 \text{ s}} = 0.63 \text{ m/s}^2$$

c) $$x = v_{prom}t = (10.4 \text{ m/s})(20 \text{ s}) = 208 \text{ m} = 0.21 \text{ km}$$

2.5 **La gráfica del movimiento de un objeto a lo largo de una línea recta se muestra en la Fig. 2-1. Determine la velocidad instantánea del objeto en los puntos *A* y *B*. ¿Cuál es la velocidad promedio del objeto? ¿Cuál es su aceleración?**

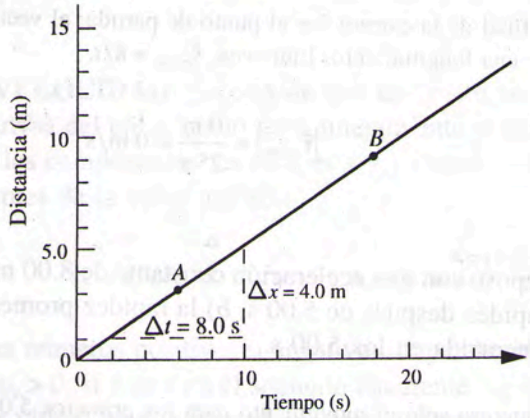


Fig. 2-1

En virtud de que la velocidad es determinada por la pendiente de la línea tangente $\Delta x/\Delta t$, tracemos una tangente a la curva en el punto *A*. La línea tangente es la misma curva en este caso. Por el triángulo mostrado en *A*, tenemos

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4.0 \text{ m}}{8.0 \text{ s}} = 0.50 \text{ m/s}$$

Ésta es también la velocidad en el punto *B* y en todos los otros puntos sobre la línea recta de la gráfica. Por lo tanto, tenemos que $a = 0$ y $v_x = 0.50 \text{ m/s} = v_{prom}$.

2.6 El movimiento de un objeto a lo largo del eje x está graficado en la Fig. 2-2. Describa su movimiento.

La velocidad de un objeto en cualquier instante es igual a la pendiente de la tangente en el punto correspondiente a ese instante. Dado que la pendiente de la tangente es cero en el intervalo de $t = 0$ s hasta $t = 2.0$ s, el objeto permanece en reposo durante ese intervalo de tiempo. Cuando $t = 2.0$ s, el objeto inicia un movimiento en dirección del eje $+x$ con velocidad constante (la pendiente de la tangente es positiva y constante). Para el intervalo de $t = 2.0$ s hasta $t = 4.0$ s,

$$\upsilon_{prom} = \text{pendiente} = \frac{\text{elevación}}{\text{tiempo}} = \frac{x_f - x_0}{t_f - t_0} = \frac{3.0\text{ m} - 0\text{ m}}{4.0\text{ s} - 2.0\text{ s}} = \frac{3.0\text{ m}}{2.0\text{ s}} = 1.5\text{ m/s}$$

Entonces, la velocidad promedio es $\vec{\mathbf{v}}_{prom} = 1.5$ m/s —DIRECCIÓN x POSITIVA.

Durante el intervalo $t = 4.0$ s hasta $t = 6.0$ s, el objeto está en reposo, la pendiente de la tangente a la gráfica es cero y x no cambia en ese intervalo de tiempo.

De $t = 6.0$ s hasta $t = 10$ s y más allá, el objeto se mueve en dirección del eje $-x$; por lo que la pendiente de la tangente y la velocidad son negativas. Tenemos

$$\upsilon_{prom} = \text{pendiente} = \frac{x_f - x_0}{t_f - t_0} = \frac{-2.0\text{ m} - 3.0\text{ m}}{10.0\text{ s} - 6.0\text{ s}} = \frac{-5.0\text{ m}}{4.0\text{ s}} = -1.3\text{ m/s}$$

Entonces, la velocidad promedio es $\vec{\mathbf{v}}_{prom} = 1.3$ m/s —DIRECCIÓN x NEGATIVA.

2.7 El movimiento vertical de un objeto está graficado en la Fig. 2-3. Describa su movimiento cualitativamente y calcule la velocidad instantánea en los puntos A, B y C.

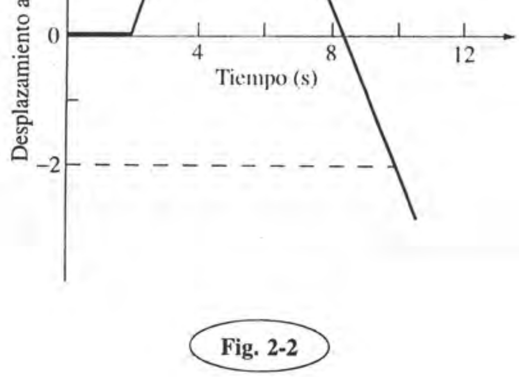


Fig. 2-2

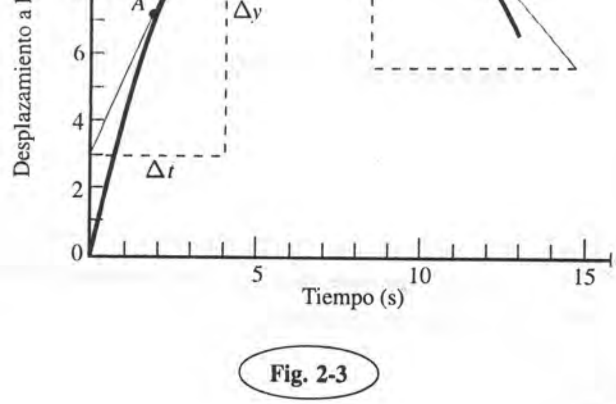


Fig. 2-3

Recordando que la velocidad está dada por la pendiente de la tangente en una gráfica, se puede observar que el objeto tiene una velocidad para $t = 0$. Al elevarse, ésta decrece y finalmente es cero en el punto B. (La pendiente de la tangente ahí es cero.) Entonces comienza a caer hacia abajo incrementando su velocidad.

En el punto A, tenemos

$$\upsilon_A = \text{pendiente} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{12.0\ \text{m} - 3.0\ \text{m}}{4.0\ \text{s} - 0\ \text{s}} = \frac{9.0\ \text{m}}{4.0\ \text{s}} = 2.3\ \text{m/s}$$

La velocidad en el punto A es positiva, ya que está en dirección del eje $+y$: $\vec{v}_A = 2.3\ \text{m/s}$ —HACIA ARRIBA. Para los puntos B y C,

$$\upsilon_B = \text{pendiente} = 0\ \text{m/s}$$

$$\upsilon_C = \text{pendiente} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{5.5\ \text{m} - 13.0\ \text{m}}{15.0\ \text{s} - 8.5\ \text{s}} = \frac{-7.5\ \text{m}}{6.5\ \text{s}} = -1.2\ \text{m/s}$$

Es negativa, ya que la velocidad en C está en dirección del eje $-y$: $\vec{v}_C = 1.2\ \text{m/s}$ —HACIA ABAJO. Recuerde que la velocidad es una cantidad vectorial y que la dirección debe de especificarse de manera explícita.

2.8 Se deja caer una pelota, inicialmente en reposo, desde una altura de 50 m sobre el nivel del suelo. *a*) ¿Cuál será la rapidez de la pelota justo en el momento anterior al choque contra el suelo? *b*) ¿Cuánto tiempo requiere para llegar al suelo?

Si ignoramos la fricción con el aire, la pelota se acelera uniformemente hasta llegar al suelo. Su aceleración se dirige hacia abajo y tiene un valor de 9.81 m/s^2. Tomando como positiva la dirección de la caída, para el recorrido se tiene:

$$y = 50.0\ \text{m} \qquad a = 9.81\ \text{m/s}^2 \qquad \upsilon_0 = 0$$

$Vf^2 - V_0^2 = 2aX$

a) $\upsilon_{fy}^2 = \upsilon_{0y}^2 + 2ay = 0 + 2(9.81\ \text{m/s}^2)\ (50.0\ \text{m}) = 981\ \text{m}^2/\text{s}^2$

y por lo tanto, $\upsilon_f = 31.3\ \text{m/s}$.

b) De la definición $a = (\upsilon_{fy} - \upsilon_{0y})/t$,

$$t = \frac{\upsilon_{fy} - \upsilon_{0y}}{a} = \frac{(31.3 - 0)\ \text{m/s}}{9.81\ \text{m/s}^2} = 3.19\ \text{s}$$

(Podríamos haber considerado la dirección positiva *hacia arriba*. ¿Tendrían algún cambio los resultados?)

2.9 Un esquiador parte del reposo y se desliza 9.0 m hacia abajo, por una pendiente, en 3.0 s. ¿Cuánto tiempo, después del inicio, el esquiador habrá adquirido una velocidad de 24 m/s? Considérese la aceleración constante.

Primero, es necesario determinar la aceleración del esquiador a partir de los datos relativos a los 3.0 s de viaje. Para esto, tenemos: $t = 3.0$ s, $v_{0x} = 0$, y $x = 9.0$ m. Entonces, $x = v_{0x}t + \frac{1}{2}at^2$ nos da:

$$a = \frac{2x}{t^2} = \frac{18\text{ m}}{(3.0\text{ s})^2} = 2.0\text{ m/s}^2$$

Ahora bien, este valor de a puede emplearse para el recorrido mayor, desde el punto de partida hasta el lugar donde $v_{fx} = 24$ m/s. Para este recorrido tenemos, $v_{0x} = 0$, $v_{fx} = 24$ m/s, $a = 2.0$ m/s^2. Entonces de $v_f = v_0 + at$, obtenemos

$$t = \frac{v_{fx} - v_{0x}}{a} = \frac{24\text{ m/s}}{2.0\text{ m/s}^2} = 12\text{ s}$$

2.10 Un autobús que se mueve con rapidez de 20 m/s, comienza a detenerse a razón de 3.0 m/s cada segundo. Encuéntrese cuánto se desplaza antes de detenerse.

Se considera que la dirección del movimiento es en la dirección del eje $+x$. Para el trayecto considerado, tenemos $v_0 = 20$ m/s, $v_f = 0$ m/s^2, $a = -3.0$ m/s^2. Nótese que el autobús no incrementa su rapidez en la dirección del movimiento. En lugar de eso, disminuye su rapidez en la misma dirección, por lo que su aceleración es negativa (una desaceleración). Utilícese

$$v_{fx}^2 = v_{0x}^2 + 2ax$$

para calcular

$$x = \frac{-(20\text{ m/s})^2}{2(-3.0\text{ m/s}^2)} = 67\text{ m}$$

2.11 Un automóvil que se mueve a 30 m/s disminuye su rapidez uniformemente hasta un valor de 10 m/s en un tiempo de 5.0 s. Determínense *a*) la aceleración del automóvil y *b*) la distancia que recorre en el tercer segundo.

Sea la dirección del movimiento en dirección del eje $+x$.

a) Para el intervalo de 5.0 s, se tiene $t = 5.0$ s, $v_{0x} = 30$ m/s, $v_f = 10$ m/s. Usando $v_{fx} - v_{0x} + at$ se encuentra que

$$a = \frac{(10 - 30)\text{ m/s}}{5.0\text{ s}} = -4.0\text{m/s}^2$$

b) $x =$ (distancia recorrida en 3.0 s) – (distancia recorrida en 2.0 s)

$$x = (v_{0x}t_3 + \tfrac{1}{2}at_3^2) - (v_{0x}t_2 + \tfrac{1}{2}at_2^2)$$

$$x = v_{0x}(t_3 - t_2) + \tfrac{1}{2}a(t_3^2 - t_2^2)$$

Usando $\upsilon_{0x} = 30$ m/s^2, $a = -4.0$ m/s^2, $t_2 = 2.0$ s, $t_3 = 3.0$ s; nos da

$$x = (30 \text{ m/s})\ (1.0 \text{ s}) - (2.0 \text{ m/s}^2)\ (5.0 \text{ s}^2) = 2.0 \text{ m}$$

2.12 **La velocidad de un tren se reduce uniformemente desde 15 m/s hasta 7.0 m/s al recorrer una distancia de 90 m. *a*) Calcúlese la aceleración. *b*) ¿Qué distancia recorrerá el tren antes de alcanzar el reposo, si se considera que la aceleración permanece constante?**

Supóngase la dirección del movimiento en la dirección $+x$.

a) Se tiene que $\upsilon_{0x} = 15$ m/s, $\upsilon_{fx} = 7.0$ m/s, $x = 90$ m. Entonces $\upsilon_{fx}^2 = \upsilon_{0x}^2 + 2ax$, es decir

$$a = -0.98 \text{ m/s}^2$$

b) Ahora, las nuevas condiciones son: $\upsilon_{0x} = 7.0$ m/s, $\upsilon_f = 0$, $a = -0.98$ m/s^2, por consiguiente

$$\upsilon_{fx}^2 = \upsilon_{0x}^2 + 2ax$$

nos da

$$x = \frac{0 - (7.0 \text{ m/s})^2}{-1.96 \text{ m/s}^2} = 25 \text{ m}$$

2.13 **Una piedra se lanza verticalmente hacia arriba y se eleva a una altura de 20 m. ¿Con qué rapidez fue lanzada?**

Considérese el *ascenso* como positivo. La velocidad de la piedra es cero en el extremo superior de su trayectoria. Entonces, $\upsilon_{fy} = 0$, $y = 20$ m, $a = -9.81$ m/s^2. (El signo negativo obedece a que la aceleración debida a la gravedad es siempre hacia abajo y se considera que el *ascenso* es positivo.) Utilícese $\upsilon_{fx}^2 = \upsilon_{0x}^2 + 2ay$ para encontrar

$$\upsilon_{0y} = \sqrt{-2(-9.81 \text{ m/s}^2)\ (20 \text{ m})} = 20\text{m/s}$$

2.14 **Una piedra se lanza hacia arriba con una rapidez de 20 m/s. En su camino hacia abajo es atrapada en un punto situado a 5.0 m por encima del lugar desde donde fue lanzada. *a*) ¿Qué rapidez tenía cuando fue atrapada? *b*) ¿Cuánto tiempo tomó el recorrido?**

En la Fig. 2-4 se muestra la situación. Supóngase el *ascenso* como positivo. Entonces tenemos, para el recorrido que dura desde el instante en que es lanzada al instante en que es atrapada, $\upsilon_{0y} = 20$ m/s, $y = +5.0$ m (dado que el desplazamiento es hacia arriba), $a = -9.81$ m/s^2.

a) Utilícese $\upsilon_{fy}^2 = \upsilon_{0y}^2 + 2ay$ para encontrar

$$\upsilon_{fy}^2 = (20 \text{ m/s})^2 + 2(-9.81 \text{ m/s}^2)\ (5.0 \text{ m}) = 302 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$\upsilon_{fy} = \pm\sqrt{302 \text{ m}^2/\text{s}^2} = -17 \text{ m/s}$$

Se escoge el signo negativo porque la piedra va descendiendo, en el sentido negativo.

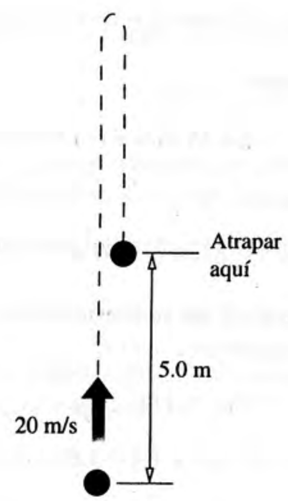


Fig. 2-4

b) Se usa $a = (v_{fy} - v_{0y})/t$ para encontrar

$$t = \frac{(-17.4 - 20)\ \text{m/s}}{-9.81\ \text{m/s}^2} = 3.8\ \text{s}$$

Adviértase la necesidad de usar el signo negativo para v_{fy}.

2.15 Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba en la Luna y regresa a su punto de partida en 4.0 s. La aceleración debida a la gravedad en ese lugar es de 1.60 m/s². Encuéntrese la rapidez inicial.

Considérese el *ascenso* como positivo. Para el recorrido de principio a fin, $y = 0$ (el punto de partida y el punto final son los mismos, por lo tanto, el desplazamiento es cero), $a = -1.60\ \text{m/s}^2$, $t = 4.0$ s. Utilícese $y = v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2$ para calcular

$$0 = v_{0y}(4.0\ \text{s}) + \tfrac{1}{2}(-1.60\ \text{m/s}^2)\,(4.0\ \text{s})^2$$

de donde $v_{0y} = 3.2$ m/s.

2.16 Se lanza una pelota de beisbol verticalmente hacia arriba en la superficie lunar con una rapidez inicial de 35 m/s. Calcúlense *a*) la máxima altura que alcanza la pelota, *b*) el tiempo que tarda en alcanzar esa altura, *c*) su velocidad después de 30 s de haberse lanzado, *y d*) cuando la pelota está a 100 m de altura.

Considérese el *ascenso* como positivo. En el punto más alto, la velocidad de la pelota es cero.

a) Siendo $g = 1.60\ \text{m/s}^2$ en la Luna, y dado que $v_{fx}^2 = v_{0x}^2 + 2ay$, tenemos

$$0 = (35\ \text{m/s})^2 + 2(-1.60\ \text{m/s}^2)y \quad \text{o} \quad y = 0.38\ \text{km}$$

b) De $v_{fy} = v_{0y} + at$ tenemos

$$0 = 35\ \text{m/s} + (-1.60\ \text{m/s}^2)t \quad \text{o} \quad t = 22\ \text{s}$$

c) De $v_{fy} = v_{0y} + at$ tenemos

$$v_{fy} = 35\ \text{m/s} + (-1.60\ \text{m/s}^2)\ (30\ \text{s}) \quad \text{o} \quad v_{fy} = -13\ \text{m/s}$$

El signo negativo se debe a que se consideró el *ascenso* como positivo y la velocidad v_f se dirige hacia abajo. La pelota desciende en $t = 30$ s.

d) Como tenemos que $y = v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2$

$$100\ \text{m} = (35\ \text{m/s})t + \tfrac{1}{2}(-1.60\ \text{m/s}^2)t^2 \quad \text{o} \quad 0.80t^2 - 35t + 100 = 0$$

Por el uso de la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

encontramos que $t = 3.1$ s y $t = 41$ s. Para $t = 3.1$ s la pelota tiene 100 m de altura en el ascenso y para $t = 41$ s, tiene la misma altura pero en el descenso.

2.17 Desde un globo que está a 300 m sobre el suelo y se eleva a 13 m/s, se deja caer una bolsa de lastre. Para la bolsa, encuéntrense *a*) la altura máxima que alcanza, *b*) su posición y velocidad después de 5.0 s de haberse desprendido, *c*) el tiempo que tarda en bajar y golpear el suelo.

La velocidad inicial de la bolsa es la misma que la del globo, 13 m/s en ascenso. El ascenso se considera como *positivo* y $y = 0$ en el punto del desprendimiento.

a) En el punto más alto, $v_f = 0$. De $v_{fy}^2 = v_{0y}^2 + 2ay$,

$$0 = (13\ \text{m/s})^2 + 2(-9.81\ \text{m/s}^2)y \quad \text{o} \quad y = 8.6\ \text{m}$$

La máxima altura es 300 + 8.6 m o 308.6 m o 0.31 km.

b) El punto final se toma en la posición para $t = 5.0$ s. Entonces, de la ecuación $y = v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2$,

$$y = (13\ \text{m/s})\ (5.0\ \text{s}) + \tfrac{1}{2}(-9.81\ \text{m/s}^2)\ (5.0\ \text{s})^2 = -57.5\ \text{m} \quad \text{o} \quad -58\ \text{m}$$

Así que la altura es de 300 − 58 − 242 m. También de la ecuación $v_{fy} + v_{0y} + at$,

$$v_{fy} = 13\ \text{m/s} + (-9.81\ \text{m/s}^2)(5.0\ \text{s}) = -36\ \text{m/s}$$

Es decir, la bolsa de lastre en su trayectoria de caída hacia abajo tiene una velocidad de 36 m/s.

c) En el instante anterior al choque contra el suelo, el desplazamiento de la bolsa es de −300 m. Entonces

$$y = \upsilon_{0y}t + \tfrac{1}{2}at^2 \qquad \text{nos da} \qquad -300\ \text{m} = (13\ \text{m/s})t + \tfrac{1}{2}(-9.81\ \text{m/s}^2)t^2$$

o $4.90\,t^2 - 13t - 300 = 0$. De la fórmula cuadrática se determina que $t = 9.3$ s y −6.6 s. Sólo el valor positivo del tiempo tiene significado físico, así que la respuesta es 9.3 s.

Podríamos haber considerado primero la fórmula cuadrática para determinar υ_f:

$$\upsilon_{fy}^2 = \upsilon_{0y}^2 + 2as \qquad \text{nos da} \qquad \upsilon_{fy}^2 = (13\ \text{m/s})^2 + 2(-9.81\ \text{m/s}^2(-300\ \text{m})$$

de donde $\upsilon_{fy} = \pm 77.8$ m/s. Entonces usando el valor negativo de υ_{fy} (¿por qué?) en $\upsilon_{fy} = \upsilon_{0y} + at$, obtenemos $t = 9.3$ s, como se hizo anteriormente.

2.18 Como se muestra en la Fig. 2-5, desde la cima de un risco de 80 m de alto se dispara un proyectil con una velocidad horizontal de 30 m/s. *a*) ¿Cuánto tiempo necesitará para chocar contra el suelo en la base del risco? *b*) ¿A qué distancia del pie del risco será el choque? *c*) ¿Con qué velocidad se estrellará?

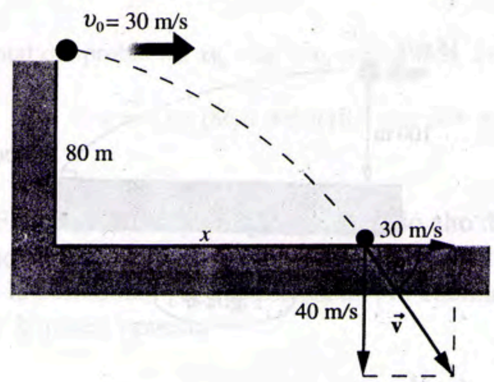


Fig. 2-5

a) Los movimientos horizontal y vertical son independientes uno del otro. Considérese primero el movimiento vertical. Tomando la caída como negativa, se tiene

$$y = \upsilon_{0y}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2$$

o bien

$$-80\ \text{m} = 0 + \tfrac{1}{2}(-9.81\ \text{m/s}^2)t^2$$

de donde $t = 4.04$ s o 4.0 s. Nótese que la velocidad inicial tiene componente vertical con valor igual a cero, así que $\upsilon_0 = 0$ para el movimiento vertical.

b) Ahora consideremos el movimiento horizontal. Para éste $a = 0$, y así $\upsilon_x = \upsilon_{0x} = \upsilon_{fx}$, 30 m/s. Entonces, utilizando el valor de t encontrado en *a*), tenemos

$$x = \upsilon_x t = (30 \text{ m/s})(4.04 \text{ s}) = 121 \text{ m} \quad \text{o} \quad 0.12 \text{ km}$$

c) La velocidad final tiene una componente horizontal de 30 m/s, pero su componente vertical al tiempo $t = 4.04$ s está dada por $\upsilon_{fy} = \upsilon_{0y} + a_y t$, así que

$$\upsilon_{fy} = 0 + (-9.8 \text{ m/s}^2)(4.04 \text{ s}) = -40 \text{ m/s}$$

La resultante de esas dos componentes la llamamos $\vec{\mathbf{v}}$ en la Fig. 2-5; tenemos

$$\upsilon = \sqrt{(40 \text{ m/s})^2 + (30 \text{ m/s})^2} = 50 \text{ m/s}$$

El ángulo θ que se muestra en la figura, está dado por $\tan\theta = 40/30$, de donde $\theta = 53°$. De donde, $\vec{\mathbf{v}} = 50$ m/s —53° HACIA ABAJO DEL EJE X.

2.19 Un piloto acróbata vuela a 15 m/s en dirección paralela al suelo plano que se encuentra 100 m debajo, como se muestra en la Fig. 2-6. ¿A qué distancia x del objetivo debe estar el avión para que, si se deja caer un saco de harina, choque con el blanco?

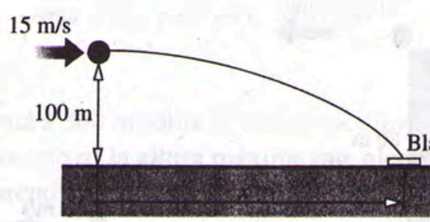


Fig. 2-6

Siguiendo el mismo procedimiento que en el problema 2.18, se utiliza $y = \upsilon_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2$ para obtener

$$-100 \text{ m} = 0 + \tfrac{1}{2}(-9.81 \text{ m/s}^2)t^2 \quad \text{o} \quad t = 4.52 \text{ s}$$

Ahora se aplica $x = \upsilon_x t = (15 \text{ m/s})(4.52 \text{ s}) = 67.8$ m o 68 m.

2.20 Se lanza una pelota de beisbol con una velocidad inicial de 100 m/s con un ángulo de 30.0° en relación con la horizontal, como se muestra en la Fig. 2-7. ¿A qué distancia del punto de lanzamiento alcanzará la pelota su nivel inicial?

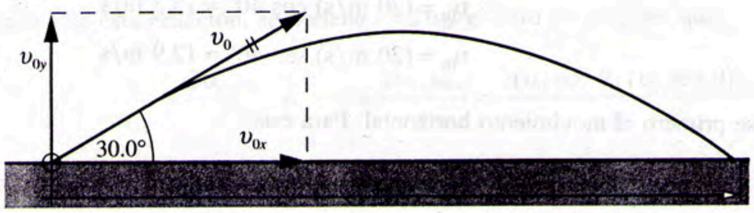


Fig. 2-7

Conviene dividir el problema en dos partes; una horizontal y otra vertical, para lo cual

$$v_{0x} = v_0 \cos 30.0° = 86.6 \text{ m/s} \qquad \text{y} \qquad v_{0y} = v_0 \text{ sen } 30.0° = 50.0 \text{ m/s}$$

donde el *ascenso* se toma como positivo.

Para la parte vertical del problema, $y = 0$, ya que la pelota regresa a su altura original; entonces

$$y = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \qquad \text{o} \qquad 0 = (50.0 \text{ m/s}) + \frac{1}{2}(-9.81 \text{ m/s}^2)t$$

y $t = 10.2$ s.

Para la parte horizontal del problema, $v_{0x} = v_{fx} = v_x = 86.6$ m/s. De donde

$$x = v_x t = (86.6 \text{ m/s})(10.2 \text{ s}) = 884 \text{ m}$$

2.21 Como se muestra en la Fig. 2-8, se lanza una pelota desde lo alto de un edificio hacia otro más alto, localizado a una distancia de 50 m. La velocidad inicial de la pelota es de 20 m/s, con una inclinación de 40° sobre la horizontal. ¿A qué distancia, por encima o por debajo de su nivel inicial, golpeará la pelota sobre la pared opuesta?

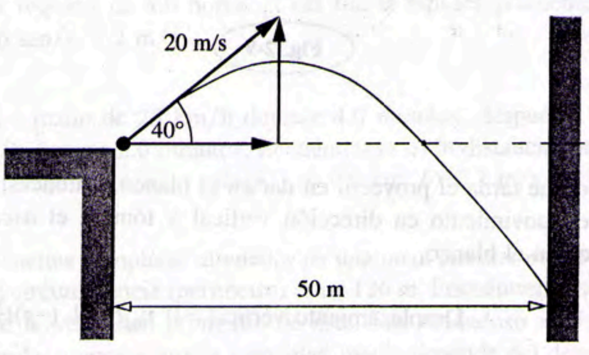


Fig. 2-8

50
86,6

Se tiene

$$v_{0x} = (20\ \text{m/s})\cos 40° = 15.3\ \text{m/s}$$
$$v_{0y} = (20\ \text{m/s})\,\text{sen}\ 40° = 12.9\ \text{m/s}$$

Considérese primero el movimiento horizontal. Para éste,

$$v_{0x} = v_{fx} = v_x = 15.3\ \text{m/s}$$

Entonces $x = v_x t$, por lo que

$$50\ \text{m} = (15.3\ \text{m/s})t \qquad \text{o} \qquad t = 3.27\ \text{s}$$

En el movimiento vertical, tomando la *caída* como positiva, tenemos

$$y = v_{0y}t + \tfrac{1}{2}\,a_y t^2 = (-12.9\ \text{m/s})(3.27\ \text{s}) + \tfrac{1}{2}\,(9.81\ \text{m/s}^2)(3.27\ \text{s})^2 = 105\ \text{m} = 0.11\ \text{km}$$

Debido a que el valor de y es positivo y como se consideró positiva la *caída*, la pelota golpeará a una distancia de 0.11 km por debajo de su nivel inicial.

2.22 *a*) Encuéntrese el alcance x de una pistola que dispara un proyectil con una velocidad v y con un ángulo de elevación θ. *b*) Encuéntrese el ángulo de elevación θ de la pistola que puede disparar un proyectil con una velocidad de salida de 120 m/s y alcanzar un blanco localizado en el mismo nivel, pero a una distancia de 1300 m. (Véase la Fig. 2-9.)

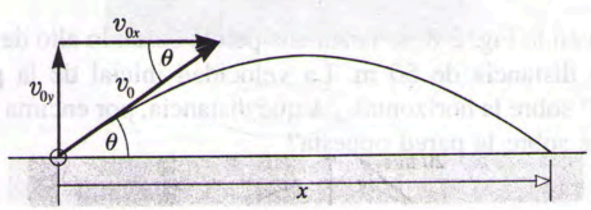


Fig. 2-9

a) Sea t el tiempo que tarda el proyectil en dar en el blanco. Entonces, $x = v_{0x}t$ o $t = x/v_{0x}$. Considérese aisladamente el movimiento en dirección vertical y tómese el *ascenso* como positivo. Cuando el proyectil golpea en el blanco,

$$\text{Desplazamiento vertical} = 0\quad v_{0y}t + \tfrac{1}{2}\,(-g)t^2$$

Despejando t de esta ecuación, se obtiene $t = 2\upsilon_{0y}/g$. Pero $t = x/\upsilon_{0x}$ así que

$$\frac{x}{\upsilon_{0x}} = \frac{2\upsilon_{0y}}{g} \quad \text{o} \quad x = \frac{2\upsilon_{0x}\upsilon_{0y}}{g} = \frac{2(\upsilon_0 \cos\theta)(\upsilon_0 \operatorname{sen}\theta)}{g}$$

Para simplificar la ecuación anterior puede emplearse la expresión $2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta = \operatorname{sen} 2\theta$. Después de sustituir,

$$x = \frac{\upsilon_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g}$$

El alcance máximo corresponde a $\theta = 45°$, ya que $\operatorname{sen} 2\theta$ tiene un valor máximo de 1 cuando $2\theta = 90°$, por lo tanto $\theta = 45°$.

b) De la ecuación de alcance encontrada en *a*), se tiene

$$\operatorname{sen} 2\theta = \frac{gx}{\upsilon_0^2} = \frac{(9.81\ \text{m/s}^2)(1300\ \text{m})}{(120\ \text{m/s})^2} = 0.885$$

Por consiguiente, $2\theta = \arcsen 0.885 = 62°$, así que $\theta = 31°$.

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

2.23 Tres niños que se encuentran en un lote de estacionamiento lanzan un cohete que se eleva en el aire a lo largo de un arco de 380 m de longitud, en 40 s. Determine su rapidez promedio. *Resp.* 9.5 m/s

2.24 Según los datos de su computadora, un robot partió de su base y viajó 1200 m con una rapidez promedio de 20.0 m/s. ¿Cuánto duró su recorrido? *Resp.* 60.0 s

$v =$ $\quad v = \frac{x}{t}$; $v = \frac{1200}{20} =$

2.25 El odómetro de un automóvil registra una lectura de 22 687 km al principio de un viaje y 22 791 km al final del mismo. El viaje requirió de 4.0 horas. ¿Cuál fue la rapidez promedio del automóvil en km/h? ¿Y en m/s? *Resp.* 26 km/h, 7.2 m/s

2.26 Un automóvil viaja a razón de 25 km/h durante 4.0 minutos, después a 50 km/h durante 8.0 minutos, y finalmente a 20 km/h durante 2.0 minutos. Encuéntrense *a*) la distancia total recorrida en km y *b*) la rapidez promedio de todo el viaje en m/s. *Resp.* *a*) 9.0 km; *b*)10.7 m/s u 11 m/s

2.27 Un corredor da 1.5 vueltas completas alrededor de una pista circular en un tiempo de 50 s. El diámetro de la pista es de 40 m y su circunferencia (perímetro) es de 126 m. Encuéntrense *a*) la rapidez promedio del corredor y *b*) la magnitud de la velocidad promedio de éste. Sea cuidadoso aquí; la rapidez media depende de la distancia total recorrida, mientras que la velocidad media depende del desplazamiento al final de una vuelta determinada. *Resp.* *a*) 3.8 m/s; *b*) 0.80 m/s

2.28 Durante una carrera en una pista ovalada, un automóvil viaja con una rapidez promedio de 200 km/h. *a*) ¿Qué distancia recorrió en 45.0 min? *b*) Determine su velocidad promedio al final de su tercera vuelta. *Resp.* *a*) 150 km; *b*) cero

2.29 La siguiente tabla de datos describe la posición de un objeto a lo largo del eje x como una función del tiempo. Grafíquense los datos y calcúlese la velocidad instantánea del objeto para *a*) $t = 5.0$ s, *b*) 16 s y *c*) 23 s. *Resp.* *a*) 0.018 m/s en la dirección x positiva; *b*) 0 m/s; *c*) 0.013 m/s en la dirección x negativa

t(s)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
x(cm)	0	4.0	7.8	11.3	14.3	16.8	18.6	19.7	20.0	19.5	18.2	16.2	13.5	10.3	6.7

2.30 Para el objeto cuyo movimiento se describe en el problema 2.29 calcúlese su velocidad en los siguientes tiempos: *a*) 3.0 s, *b*) 10 s, y *c*) 24 s. *Resp.* *a*) 1.9 cm/s en la dirección x positiva, *b*) 1.1 cm/s en la dirección x positiva; *c*) 1.5 cm/s en la dirección x negativa

2.31 Para el objeto cuyo movimiento está graficado en la Fig. 2-3, calcúlese su velocidad instantánea en los siguientes tiempos: *a*) 1.0 s, *b*) 4.0 s y *c*) 10 s. *Resp.* *a*) 3.3 m/s en la dirección y positiva; *b*) 1.0 m/s en la dirección y positiva; *c*) 0.83 m/s en la dirección y negativa

2.32 Un cuerpo con velocidad inicial de 8.0 m/s, se mueve a lo largo de una línea recta con aceleración constante y corre 640 m en 40 s. Para el intervalo de 40 s, calcúlense *a*) la velocidad promedio, *b*) la velocidad final y *c*) la aceleración. *Resp.* *a*) 16 m/s; *b*) 24 m/s; *c*) 0.40 m/s^2

2.33 Un autobús parte del reposo y se mueve con una aceleración constante de 5.0 m/s^2. Encuéntrense su rapidez y la distancia recorrida después de transcurridos 4.0 s. *Resp.* 20 m/s, 40 m

2.34 Una caja se desliza hacia abajo sobre un plano inclinado con aceleración uniforme. Parte del reposo y alcanza una rapidez de 2.7 m/s en 3.0 s. Encuéntrense *a*) la aceleración y *b*) la distancia a que se mueve en los primeros 6.0 s. *Resp.* *a*) 0.90 m/s^2; *b*) 16 m

2.35 Un automóvil acelera uniformemente mientras pasa por dos puntos marcados que están separados 30 m. El tiempo que tarda en recorrer la distancia entre los dos puntos es de 4.0 s y la rapidez del automóvil en el primer punto marcado es de 5.0 m/s. Encuéntrense la aceleración del automóvil y su rapidez al llegar al segundo punto marcado. *Resp.* 1.3 m/s^2, 10 m/s

2.36 La velocidad de un automóvil se incrementó uniformemente de 6.0 m/s a 20 m/s al recorrer una distancia de 70 m en línea recta. Calcúlense la aceleración y el tiempo transcurrido. *Resp.* 2.6 m/s^2, 5.4 s

2.37 Un aeroplano parte del reposo y acelera sobre el piso antes de elevarse, recorriendo 600 m en 12 s. Encuéntrense *a*) la aceleración, *b*) la rapidez al final de los 12 s y *c*) la distancia que recorre durante el duodécimo segundo. *Resp.* *a*) 8.3 m/s^2; *b*) 0.10 km/s; *c*) 96 m

2.38 Un tren que corre a 30 m/s frena uniformemente hasta detenerse en 44 s. Determínense la aceleración y la distancia recorrida hasta detenerse. *Resp.* $-0.68\ m/s^2$, 0.66 km o 6.6×10^2 m

2.39 Un objeto que se mueve a 13 m/s se detiene uniformemente a razón de 2.0 m/s por cada segundo durante un tiempo de 6.0 s. Determínense *a*) su rapidez final; *b*) su rapidez promedio durante los 6.0 s; y *c*) la distancia recorrida en los 6.0 s. *Resp.* *a*) 1.0 m/s; *b*) 7.0 m/s; *c*) 42 m

2.40 Un cuerpo cae libremente desde el reposo. Encuéntrense *a*) su aceleración, *b*) la distancia que recorre en 3.0 s, *c*) su velocidad después de caer 70 m, *d*) el tiempo necesario para alcanzar una rapidez de 25 m/s y *e*) el tiempo que tarda en caer 300 m. *Resp.* *a*) $9.81\ m/s^2$; *b*) 44 m; *c*) 37 m/s; *d*) 2.6 s; *e*) 7.8 s

2.41 Se deja caer una canica desde un puente y golpea el agua en un tiempo de 5.0 s. Calcúlense *a*) la rapidez con que choca contra el agua y *b*) la altura del puente. *Resp.* *a*) 49 m/s; *b*) 0.12 km o 1.2×10^2 m

2.42 Se arroja una piedra hacia abajo en línea recta con una velocidad inicial de 8.0 m/s y desde una altura de 25 m. Encuéntrense *a*) el tiempo que tarda en llegar al piso y *b*) la rapidez con la que choca contra el piso. *Resp.* *a*) 1.6 s; *b*) 24 m/s

2.43 Se lanza una pelota de beisbol hacia arriba con una rapidez de 30 m/s. *a*) ¿Cuánto tiempo tarda en subir? *b*) ¿A qué altura llegará? *c*) ¿Cuánto tiempo tardará, a partir de que se separa de la mano, en regresar a su punto de partida? *d*) ¿Cuándo tendrá una rapidez de 16 m/s? *Resp.* *a*) 3.1 s; *b*) 46 m; *c*) 6.1 s; *d*) 1.4 s y 4.7 s

2.44 Una botella que se deja caer desde un globo alcanza el piso en 20 s. Determínese la altura del globo si: *a*) estuviera en reposo en el aire, *b*) se encontrara ascendiendo con una rapidez de 50 m/s cuando se deja caer la botella. *Resp.* *a*) 2.0 km; *b*) 0.96 km

2.45 Se dejan caer dos pelotas al piso desde diferentes alturas. Una se deja caer 1.5 s después de la otra, pero ambas golpean el piso al mismo tiempo, 5.0 s después de dejar caer la primera. *a*) ¿Cuál es la diferencia de alturas a la cual se dejaron caer? *b*) ¿Desde qué altura se dejó caer la primera pelota? *Resp.* *a*) 63 m; *b*) 0.12 km

2.46 Mientras un ascensor se está moviendo hacia arriba por un cubo a una velocidad de 3.00 m/s, se suelta una tuerca de un tornillo. La tuerca golpea el fondo del cubo del ascensor en 2.00 s. *a*) ¿A qué altura con respecto al fondo del cubo se encuentra el ascensor cuando se desprendió la tuerca? *b*) ¿Qué tan lejos del fondo estaba la tuerca a los 0.25 s después de salirse de su sitio? *Resp.* *a*) 13.6 m; *b*) 14 m

2.47 Una canica rueda sobre una mesa con rapidez de 20 cm/s; la altura de la mesa es de 80 cm. *a*) ¿Cuánto tiempo necesita para chocar con el piso? *b*) ¿A qué distancia horizontal del borde de la mesa chocará contra el piso? *Resp.* *a*) 0.40 s; *b*) 8.1 cm

2.48 Un cuerpo con rapidez inicial de 40 m/s se lanza hacia arriba desde el nivel del piso, con un ángulo de 50° con la horizontal. *a)* ¿Cuánto tiempo transcurrirá antes de que el cuerpo choque contra el piso? *b)* ¿A qué distancia del punto de partida golpeará el piso? *c)* ¿Cuál será el ángulo con la horizontal al que se realizará el choque? *Resp.* *a)* 6.3 s: *b)* 0.16 km; *c)* 50°

2.49 Se lanza un cuerpo hacia abajo desde el punto más alto de un edificio de 170 m de altura, formando un ángulo de 30° con la horizontal. Su rapidez inicial es de 40 m/s. *a)* ¿Cuánto tiempo transcurrirá antes de que el cuerpo llegue al piso? *b)* ¿A qué distancia del pie del edificio golpeará? *c)* ¿Cuál será el ángulo con la horizontal al cual chocará? *Resp.* *a)* 4.2 s; *b)* 0.15 km

2.50 Una manguera que se encuentra tendida en el piso lanza una corriente de agua hacia arriba con un ángulo de 40° con la horizontal. La rapidez del agua es de 20 m/s cuando sale de la manguera. ¿A qué altura golpeará sobre una pared que se encuentra a 8.0 m de distancia? *Resp.* 5.4 m

2.51 Un bateador, en la Serie Mundial, conecta un *home run* bateando una pelota y dándole una velocidad de 40 m/s con un ángulo de 26° sobre la horizontal. Un jugador de campo, que tiene un alcance de 3.0 m sobre el suelo, se encuentra apoyado contra la pared de las gradas de sol, la cual está a 110 m del plato de *home.* La pelota estaba a l20 cm sobre el piso cuando fue bateada. ¿A qué altura por encima del guante del jugador de campo pasa la pelota? *Resp.* 6.0 m

2.52 Demuéstrese que el disparo de una pistola puede alcanzar el triple de altura cuando tiene un ángulo de elevación de 60° que cuando su ángulo es de 30°; pero que tendrá el mismo alcance horizontal.

2.53 Se lanza una pelota hacia arriba formando un ángulo de 30° con la horizontal y cae en la parte más alta de un edificio que está a 20 m de distancia. El borde superior se encuentra a 5.0 m por encima del punto de lanzamiento. ¿Con qué rapidez fue lanzada la pelota? *Resp.* 20 m/s

2.54 Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con rapidez v desde un punto que se encuentra a h metros sobre el piso. Demuéstrese que el tiempo que tarda la pelota en golpear el piso es: $(v/g)[1+\sqrt{1+(2hg/v^2)}]$.

capítulo 3

Leyes de Newton

LA MASA de un objeto es una medida de su inercia. Se llama *inercia* a la tendencia de un objeto en reposo a permanecer en este estado, y de un objeto en movimiento a continuarlo sin cambiar su velocidad. Durante varios siglos, los físicos habían encontrado útil concebir la masa como una representación de la cantidad de materia.

EL KILOGRAMO PATRÓN (ESTÁNDAR) es un objeto cuya masa se define como un kilogramo. Las masas de otros objetos se encuentran por comparación con esta masa. Un *gramo masa* equivale a 0.001 kg.

FUERZA, en general, es el agente del cambio. En mecánica, es aquello que cambia la velocidad de un objeto. La fuerza es una cantidad vectorial, que tiene magnitud y dirección. Una *fuerza externa* es aquélla cuya fuente se encuentra fuera del sistema que se está considerando.

LA FUERZA RESULTANTE que actúa sobre un objeto le proporciona una aceleración en la dirección de la fuerza. La aceleración es proporcional a la fuerza e inversamente proporcional a la masa del objeto. (A partir de la Teoría Especial de la Relatividad, ahora se sabe que este enunciado en realidad es una aproximación excelente, aplicable donde la magnitud de la velocidad es apreciablemente menor que la de la luz, c.)

EL NEWTON es la unidad de fuerza en el sistema SI. Un newton (1 N) es la fuerza resultante que le proporciona a 1 kg una aceleración de 1 m/s^2. La *dina* es una unidad de fuerza que equivale a 10^{-5} N. La *libra* fuerza equivale a 4.45 N.

PRIMERA LEY DE NEWTON: *Un objeto en reposo permanecerá en reposo; un objeto en movimiento seguirá moviéndose con velocidad constante, excepto en cuanto recibe la acción de una fuerza externa.* La fuerza es lo que cambia el movimiento.

SEGUNDA LEY DE NEWTON: Como la anunció Newton, la segunda ley se estructuró en términos del concepto de cantidad de movimiento. En el capítulo 8, se tratará un enunciado rigurosamente correcto. En este punto, el enfoque será sobre una variación menos fundamental, pero muy útil. Si la fuerza resultante (neta) $\vec{\mathbf{F}}$ que actúa sobre un objeto de masa m no es cero, el objeto se acelerará en la dirección de 1a fuerza. La aceleración $\vec{\mathbf{a}}$ es proporcional a 1a fuerza e inversamente proporcional a la masa del objeto. Con $\vec{\mathbf{F}}$ en newtons, m en kilogramos y $\vec{\mathbf{a}}$ en m/s^2, esta proporcionalidad se puede escribir como una ecuación:

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{m} \qquad \text{o} \qquad \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$$

Cuando se utiliza esta ecuación u otras derivadas de ésta, $\vec{\mathbf{F}}$, m y $\vec{\mathbf{a}}$ deben tener las unidades apropiadas. La aceleración $\vec{\mathbf{a}}$ tiene la misma dirección que la fuerza resultante $\vec{\mathbf{F}}$.

La ecuación vectorial $\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$ puede escribirse en términos de sus componentes como

$$\Sigma F_x = ma_x \qquad \Sigma F_y = ma_y \qquad \Sigma F_z = ma_z$$

donde las fuerzas son las componentes de las fuerzas externas que actúan sobre el objeto.

TERCERA LEY DE NEWTON: La materia *interactúa* con la materia; las fuerzas se presentan en pares. *Por cada fuerza que actúa sobre un cuerpo, existe otra igual, pero en sentido opuesto, actuando sobre algún otro cuerpo*. Con frecuencia se le llama a ésta, *ley de la acción y reacción*. Note que las fuerzas de acción y reacción actúan en diferentes cuerpos.

LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL: Dos masas m y m' interactúan gravitacionalmente y se atraen entre sí con fuerzas de igual magnitud. Para masas puntuales (o cuerpos con geometría esférica), la fuerza de atracción F_G está dada por

$$F_G = G\frac{mm'}{r^2}$$

donde r es la distancia entre los centros de las masas, y $G = 6.67 + 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$ cuando F_G está en newtons, m y m' están en kilogramos y r está en metros.

EL PESO de un cuerpo (F_W) es la fuerza gravitacional que atrae al cuerpo. En la Tierra, es la fuerza gravitacional que ejerce la Tierra sobre el cuerpo. Sus unidades son los newtons (en el SI) y libras (en el sistema británico). Debido a que la Tierra no es una esfera uniforme perfecta, y es más debido a su rotación, el peso medido por una balanza será diferente, de manera muy ligera, del que se acaba de definir.

RELACIÓN ENTRE MASA Y PESO: Un cuerpo de masa m en caída libre hacia la Tierra está bajo la acción de una sola fuerza, la atracción gravitacional, a la que llamamos peso F_W del objeto. La aceleración g que tiene un objeto en caída libre se debe a su peso F_W. Entonces, la ecuación $\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$ nos da la relación entre $F = F_W$, $a = g$ y m; esto es $F_W = mg$. Como en la superficie terrestre $g = 9.81$ m/s^2, un objeto de 1.00 kg pesa 9.81 N.

TENSIÓN DE UNA CUERDA ($\vec{\mathbf{F}}_T$) es la fuerza con la que la cuerda tira del objeto al cual está unida. La magnitud de la fuerza de tensión es la *tensión* (F_T).

FUERZA DE FRICCIÓN ($\vec{\mathbf{F}}_f$) es una fuerza tangencial sobre una superficie que se opone al deslizamiento de la superficie a través de una superficie adyacente. La fuerza de fricción es paralela a la superficie y opuesta, en sentido, a su movimiento. Un objeto empezará a resbalar sólo cuando la fuerza aplicada sobrepase la fuerza máxima de fricción estática.

FUERZA NORMAL ($\vec{\mathbf{F}}_N$) sobre una superficie que descansa (o se desliza) sobre una segunda superficie, es la componente perpendicular de la fuerza ejercida por la superficie de soporte sobre la superficie que está siendo soportada.

COEFICIENTE DE FRICCIÓN CINÉTICA (μ_c) se define para el caso en el que una superficie se desliza a través de otra con rapidez constante. Esto es:

$$\mu_c = \frac{\text{fuerza de fricción}}{\text{fuerza normal}} = \frac{F_f}{F_N}$$

COEFICIENTE DE FRICCIÓN ESTÁTICA (μ_e) se define para el caso donde una superficie está a punto de deslizarse a través de otra superficie. Esto es:

$$\mu_e = \frac{\text{fuerza de fricción crítica}}{\text{fuerza normal}} = \frac{F_f(\text{máx})}{F_N}$$

donde la fuerza de fricción crítica es la fuerza de fricción cuando el objeto está a punto de iniciar su desplazamiento.

ANÁLISIS DIMENSIONAL: Todas las cantidades mécanicas, tales como la aceleración y la fuerza, se pueden expresar en términos de tres dimensiones fundamentales: la longitud L, la masa M, y el tiempo T. Por ejemplo, la aceleración es una longitud (una distancia) dividida entre (tiempo)^2; decimos que sus *dimensiones* son L/T^2 que podemos escribir como $[LT^{-2}]$. Las dimensiones de volumen son $[L^3]$, y las de velocidad, $[LT^{-1}]$. Como la fuerza es la masa multiplicada por la aceleración, sus dimensiones son $[MLT^{-2}]$. El análisis dimensional es muy útil para ver si una ecuación está correctamente escrita, ya que cada término de una ecuación debe tener las mismas dimensiones. Por ejemplo, las dimensiones de la ecuación

$$s = v_0 t \qquad + \tfrac{1}{2}at^2$$

son

$$[L] \rightarrow [LT^{-1}][T] + [L/T^{-2}][T^2]$$

y cada término tiene dimensiones de longitud. Recuerde, *todos los términos en una ecuación deben tener las mismas dimensiones*. Por ejemplo, una ecuación no puede tener un término de volumen $[L^3]$ sumado con otro de área $[L^2]$, o tampoco un término de fuerza $[MLT^{-2}]$ puede restarse a un término de velocidad $[LT^{-1}]$; estos términos no tienen las mismas dimensiones.

OPERACIONES MATEMÁTICAS CON UNIDADES: En toda operación matemática, las unidades (por ejemplo, lb, cm, pies^3, mi/h, m/s^2) deben acompañar a los números y someterse a las mismas operaciones matemáticas.

Las cantidades no pueden sumarse o restarse directamente a menos que tengan las mismas unidades (así como las mismas dimensiones). Por ejemplo, si vamos a sumar algebraicamente 5 m (longitud) y 8 cm (longitud), primero se debe convertir m a cm, o cm a m. Sin embargo, cualquier tipo de cantidad se puede combinar con las operaciones de multiplicación o división, ya que las unidades, así como los números, obedecen a las leyes del álgebra en cuanto a elevar al cuadrado, simplificar, etc. De esta forma:

1) $6\ \text{m}^2 + 2\ \text{m}^2 = 8\ \text{m}^2 \qquad (\text{m}^2 + \text{m}^2 \rightarrow \text{m}^2)$

2) $5\ \text{cm} \times 2\ \text{cm}^2 = 10\ \text{cm}^3 \qquad (\text{cm} \times \text{cm}^2 \rightarrow \text{cm}^3)$

3) $2\ \text{m}^3 \times 1500\ \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 3000\ \text{kg} \qquad \left(\text{m}^3 \times \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3} \rightarrow \text{kg}\right)$

4) $2\ \text{s} \times 3\ \dfrac{\text{km}}{\text{s}^2} = 6\ \dfrac{\text{km}}{\text{s}} \qquad \left(\text{s} \times \dfrac{\text{km}}{\text{s}^2} \rightarrow \dfrac{\text{km}}{\text{s}}\right)$

5) $\dfrac{15\ \text{g}}{3\ \text{g/cm}^3} = 5\ \text{cm}^3 \qquad \left(\dfrac{\text{g}}{\text{g/cm}^3} \rightarrow \text{g} \times \dfrac{\text{cm}^3}{\text{g}} \rightarrow \text{cm}^3\right)$

PROBLEMAS RESUELTOS

3.1 Encuentre el peso de un cuerpo, si su masa en la Tierra es *a*) 3.00 kg, *b*) 200 g.

La relación general entre masa m y peso F_W es $F_W = mg$. En esta expresión, m debe estar en kilogramos, g en m/s^2, y F_W en newtons. Sobre la Tierra, $g = 9.81$ m/s^2. La aceleración debida a la gravedad varía de un lugar a otro en el universo.

a) $$F_W = (3.00\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2) = 29.4\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = 29.4\ \text{N}$$

b) $$F_W = (0.200\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2) = 1.96\ \text{N}$$

3.2 A un objeto de 20.0 kg que se mueve libremente se le aplica una fuerza resultante de 45.0 N en la dirección $-x$. Calcular la aceleración del objeto.

Si hacemos uso de la segunda ley en su forma de componentes, $\Sigma F_x = ma_x$, con $\Sigma F_x = -45.0$ N y $m = 20.0$ kg. Entonces

$$a_x = \frac{\Sigma F_x}{m} = \frac{-45.0\text{ N}}{20.0\text{ kg}} = -2.25\text{ N/kg} = -2.25\text{ m/s}^2$$

donde se ha usado 1 N = 1 kg · m/s^2. Como la fuerza resultante que actúa sobre el objeto está en la dirección $-x$ su aceleración también está en esa dirección.

3.3 El objeto que se muestra en la Fig. 3-1a pesa 50 N y está suspendido por una cuerda. Encuéntrese el valor de la tensión en la cuerda.

Para iniciar el análisis, primero aislemos el objeto. Dos fuerzas actúan sobre el objeto: la fuerza de la cuerda que jala hacia arriba y la fuerza que lo jala hacia abajo debida a la gravedad. La fuerza de tensión que ejerce la cuerda se denota por medio de F_T, y la fuerza que ejerce la gravedad, el peso del objeto, se denota por $F_W = 50$ N. Estas dos fuerzas se muestran en el diagrama de cuerpo libre en la Fig. 3-1b.

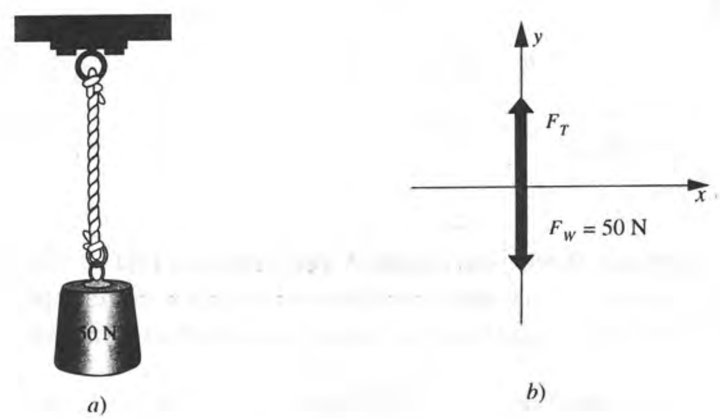


Fig. 3-1

Las fuerzas ya están en su forma de componentes por lo que es posible escribir la primera condición de equilibrio como:

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0 \qquad \text{se convierten en} \qquad 0 = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \qquad \text{se convierten en} \qquad F_T - 50\text{ N} = 0$$

de donde $F_T = 50$ N. Entonces, cuando una cuerda vertical sostiene un cuerpo en equilibrio, la tensión en la cuerda es igual al peso del cuerpo.

3.4 Un objeto de 5.0 kg se jala hacia arriba con una cuerda acelerándolo a 0.30 m/s². ¿Cuál debe ser la tensión en la cuerda?

El diagrama de cuerpo libre para el objeto se muestra en la Fig. 3-2. La tensión en la cuerda es F_T y el peso del objeto es $F_W = mg = (5.0\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) = 49.1\text{ N}$. Usando $\Sigma F_y = ma_y$, con la dirección *hacia arriba* tomada como positiva, se tiene

$$F_T - mg = ma_y \qquad \text{o} \qquad F_T - 49.1\text{ N} = (5.0\text{ kg})(0.30\text{ m/s}^2)$$

resolviendo para F_T se obtiene $F_T = 50.6\text{ N} = 51\text{ N}$. Como comprobación, podemos ver que F_T es mayor que F_W como debe ser si el cuerpo es acelerado hacia arriba.

a) *b)*

Fig. 3-2

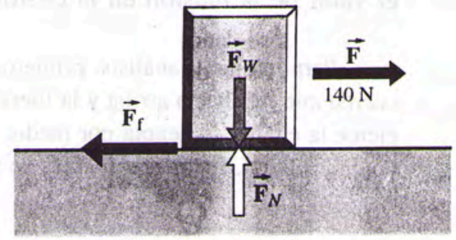


Fig. 3-3

3.5 Se necesita una fuerza horizontal de 140 N para jalar una caja de 60.0 kg sobre un piso horizontal con rapidez constante. ¿Cuál es el coeficiente de fricción entre el piso y la caja? Determine este resultado con tres cifras significativas aunque parezca poco práctico.

El diagrama de cuerpo libre para la caja se muestra en la Fig. 3-3. Como la caja no se mueve en dirección vertical, $a_y = 0$. Por lo tanto,

$$\Sigma F_y = ma_y \qquad \text{da} \qquad F_N - mg = (m)(0\text{ m/s}^2)$$

de donde se encuentra que $F_N = mg = (60.0\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) = 588.6\text{ N}$. Como la caja se mueve horizontalmente con rapidez constante, $a_x = 0$ entonces

$$\Sigma F_x = ma_x \qquad \text{da} \qquad 140\text{ N} - F_f = 0$$

de donde la fuerza de fricción es $F_f = 140\text{ N}$. Entonces tenemos

$$\mu_c = \frac{F_f}{F_N} = \frac{140\text{ N}}{588.6\text{ N}} = 0.238$$

3.6 La única fuerza que actúa sobre un objeto de 5.0 kg tiene por componentes $F_x = 20$ N y $F_y = 30$ N. Encuentre la aceleración del objeto.

Se utiliza $\Sigma F_x = ma_x$ y $\Sigma F_y = ma_y$ para obtener

$$a_x = \frac{\Sigma F_x}{m} = \frac{20 \text{ N}}{5.0 \text{ kg}} = 4.0 \text{ m/s}^2$$

$$a_y = \frac{\Sigma F_y}{m} = \frac{30 \text{ N}}{5.0 \text{ kg}} = 6.0 \text{ m/s}^2$$

Estas componentes de la aceleración se muestran en la Fig. 3-4. De la figura, se observa que

$$a = \sqrt{(4.0)^2 + (6.0)^2} \text{ m/s}^2 = 7.2 \text{ m/s}^2$$

y $\theta = \arctan(6.0/4.0) = 56°$.

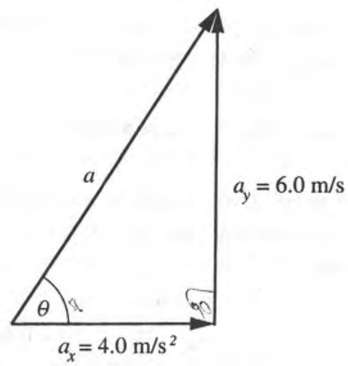


Fig. 3-4

3.7 Se desea aplicar una aceleración de 0.70 m/s^2 a un objeto de 600 N. ¿De qué magnitud debe ser la fuerza no balanceada que actúa sobre él?

Nótese que se da como dato el peso, pero no la masa. Considerando que el peso se determinó en la Tierra, se utiliza $F_W = mg$ para encontrar

$$m = \frac{F_W}{g} = \frac{600 \text{ N}}{9.81 \text{ m/s}^2} = 61 \text{ kg}$$

Ahora que conocemos la masa del objeto (61 kg) y se sabe la aceleración (0.70 m/s^2), se tiene

$$F = ma = (61 \text{ kg})(0.70 \text{ m/s}^2) = 43 \text{ N}$$

3.8 Una fuerza constante actúa sobre un objeto de 5.0 kg y disminuye su velocidad de 7.0 m/s a 3.0 m/s en un tiempo de 3.0 s. Encontrar la fuerza.

En primer término debemos calcular la aceleración del objeto, la que es constante ya que la fuerza es también constante. Tomando la dirección de la fuerza como positiva, del capítulo 2 tenemos

$$a = \frac{v_f - v_0}{t} = \frac{-4.0\ \text{m/s}^2}{3.0\ \text{s}} = -1.33\ \text{m/s}^2$$

Ahora podemos usar $F = ma$ con $m = 5.0$ kg:

$$F = (5.0\ \text{kg})(-1.33\ \text{m/s}^2) = -6.7\ \text{N}$$

El signo menos indica que la fuerza es una fuerza retardadora y que se opone al movimiento.

3.9 Un bloque de 400 g con velocidad inicial de 80 cm/s resbala sobre la cubierta de una mesa en contra de una fuerza de fricción de 0.70 N. *a*) ¿Qué distancia recorrerá resbalando antes de detenerse? *b*) ¿Cuál es el coeficiente de fricción entre el bloque y la cubierta de la mesa?

a) Consideremos la dirección del movimiento como positiva. La única fuerza no balanceada que actúa sobre el bloque es la fuerza de fricción, −0.70 N. Por tanto,

$$\Sigma F = ma \qquad \text{se convierte en} \qquad -0.70\ \text{N} = (0.400\ \text{kg})(a)$$

de donde $a = -1.75$ m/s². (Nótese que m siempre está en kilogramos.) Para encontrar la distancia a la que resbala el bloque, tenemos que $v_{0x} = 0.80$ m/s, $v_{fx} = 0$ y $a = -1.75$ m/s². Entonces de la ecuación $v_{fx}^2 = v_{0x}^2 = 2ax$ resulta

$$x = \frac{v_{fx}^2 - v_{0x}^2}{2a} = \frac{(0 - 0.64)\ \text{m}^2/\text{s}^2}{(2)(-1.75\ \text{m/s}^2)} = 0.18\ \text{m}$$

b) Como las fuerzas verticales que actúan sobre el cuerpo deben cancelarse, el empuje hacia arriba F_N de la cubierta debe ser igual al peso mg del bloque. Entonces

$$\mu_c = \frac{\text{fuerza de fricción}}{F_N} = \frac{0.70\ \text{N}}{(0.40\ \text{kg})\ (9.81\ \text{m/s}^2)} = 0.18$$

3.10 Un automóvil de 600 kg de peso se mueve en un camino nivelado a 30 m/s. *a*) ¿Qué tan grande es la magnitud de la fuerza retardadora (suponiéndola constante) que se requiere para detener el automóvil en una distancia de 70 m? *b*) ¿Cuál es el mínimo coeficiente de fricción entre las llantas y el camino para que esto suceda? Suponga que las ruedas no están trabadas, en cuyo caso se está tratando con fricción estática; no hay resbalamiento.

a) En primer término debemos encontrar la aceleración del automóvil a partir de una de las ecuaciones de movimiento. Con los datos $v_{0x} = 30$ m/s, $v_{fx} = 0$ y $x = 70$ m utilicemos la ecuación $v_{fx}^2 = v_{0x}^2 + 2ax$ para encontrar

$$a = \frac{v_{fx}^2 - v_{0x}^2}{2x} = \frac{0 - 900 \text{ m}^2/\text{s}^2}{140 \text{ m}} = -6.43 \text{ m/s}^2$$

Ahora puede escribirse,

$$F = ma = (600 \text{ kg})(-6.43 \text{ m/s}^2) = -3860 \text{ N} = -3.9 \text{ kN}$$

b) La fuerza calculada en *a*) es igual a la fuerza de fricción que existe entre las llantas y el camino. Por lo tanto, la magnitud de la fuerza de fricción sobre las llantas es $F_f = 3860$ N. El coeficiente de fricción está dado por $\mu_e = F_f/F_N$, donde F_N es la fuerza normal. En este caso, el camino empuja hacia arriba al automóvil con una fuerza igual al peso del automóvil. Así que,

$$F_N = F_W = mg = (600 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 5886 \text{ N}$$

$\vec{F}_N$ o $Y = m \cdot g$

entonces se tiene

$$\mu_e = \frac{F_f}{F_N} = \frac{3860}{5886} = 0.66$$

El coeficiente de fricción al menos debe ser de 0.66 para que el automóvil se detenga dentro de los 70 m.

3.11 Una locomotora de 8000 kg tira de un tren de 40.000 kg a lo largo de una vía nivelada con una aceleración $a_1 = 1.20$ m/s². ¿Con qué aceleración (a_2) tirará de un tren de 16.000 kg?

Para una fuerza dada de la locomotora, la aceleración es inversamente proporcional a la masa total. Entonces

$$a_2 = \frac{m_1}{m_2} a_1 = \frac{8000 \text{ kg} + 40\,000 \text{ kg}}{8000 \text{ kg} + 16\,000 \text{ kg}} (1.20 \text{ m/s}^2) = 2.40 \text{ m/s}^2$$

3.12 En la Fig. 3-5*a* un objeto de masa *m* está colgado de una cuerda. Calcular la tensión en la cuerda si el objeto se encuentra *a*) en reposo, *b*) se mueve con velocidad constante, *c*) se acelera hacia arriba con una aceleración $a = 3g/2$ y *d*) se acelera hacia abajo con $a = 0.75g$.

Dos fuerzas actúan sobre el objeto: la tensión F_T y la atracción gravitacional mg, tal y como se muestra en el diagrama de la Fig. 3-5*b*. Consideremos como positiva la dirección *hacia arriba* y escribamos $\Sigma F_y = ma_y$, en cada caso.

a) $a_y = 0$: $\quad F_T - mg = ma_y = 0 \quad$ o $\quad F_T = mg$

b) $a_y = 0$: $\quad F_T - mg = ma_y = 0 \quad$ o $\quad F_T = mg$

c)	$a_y = 3g/2$:	$F_T - mg = m(3g/2)$	o	$F_T = 2.5mg$
d)	$a_y = -3g/4$:	$F_T - mg = m(-3g/4)$	o	$F_T = 02.5mg$

Nótese que la tensión en la cuerda es menor que mg en el inciso *d*); sólo en este caso el objeto tiene una aceleración hacia abajo. ¿Podría explicar por qué $F_T = 0$ si $a_y = -g$?

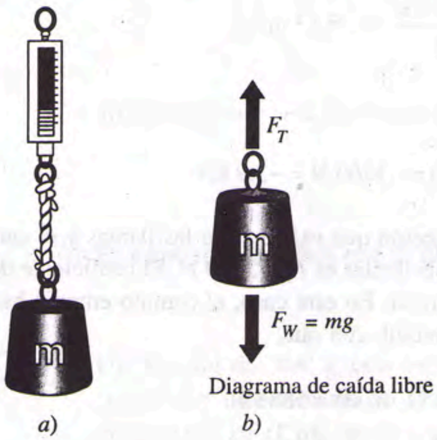


Fig. 3-5

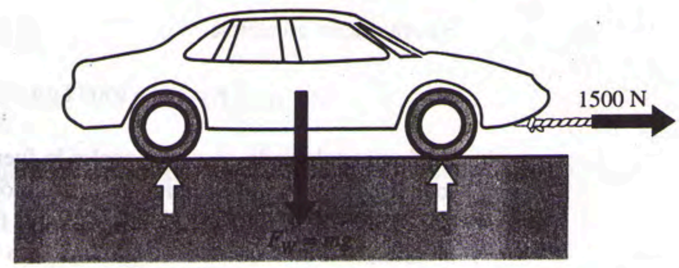


Fig. 3-6

3.13 Una cuerda de remolque se romperá si la tensión sobre ella excede los 1500 N. Se utilizará para remolcar un automóvil de 700 kg a lo largo de un piso nivelado. ¿Cuál es el valor máximo de la aceleración que se puede aplicar al automóvil con esta cuerda? (Recuerde que 1500 tiene cuatro cifras significativas; véase el apéndice A.)

Las fuerzas que actúan sobre el automóvil se muestran en la Fig. 3-6. Sólo son importantes las fuerzas en la dirección x, ya que las fuerzas en la dirección y se equilibran entre sí. Indicando la dirección positiva con el signo + y una pequeña flecha tenemos:

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ma_x \qquad \text{se convierte en} \qquad 1500\text{ N} = (700\text{ kg})(a)$$

de donde $a = 2.14\text{ m/s}^2$.

3.14 Calcular la mínima aceleración con la cual una mujer de 45 kg se desliza por una cuerda, si la tensión mínima que resiste la cuerda es 300 N.

El peso de la mujer es $mg = (45\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) = 441\text{ N}$. Como la cuerda únicamente soporta 300 N, la fuerza no balanceada F que actúa sobre la mujer debe ser de al menos 441 N −300 N = 141 N. La aceleración mínima en su movimiento de bajada es

$$a = \frac{F}{m} = \frac{141\text{ N}}{45\text{ kg}} = 3.1\text{ m/s}^2$$

3.15 Una caja de 70 kg resbala a lo largo de un piso debido a una fuerza de 400 N como se muestra en la Fig. 3-7. El coeficiente de fricción entre la caja y el piso cuando la caja resbala es de 0.50. Calcule la aceleración de la caja.

Como las fuerzas en la dirección y deben balancearse,

$$F_N = mg = (70\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) = 687\text{ N}$$

Pero la fuerza de fricción F_f está dada por

$$F_f = \mu_c F_N = (0.50)(687\text{ N}) = 344\text{ N}$$

Podemos escribir $\Sigma F_x = ma_x$ para la caja, tomando como positiva la dirección del movimiento:

$$400\text{ N} - 344\text{ N} = (70\text{ kg})(a) \qquad \text{o} \qquad a = 0.80\text{ m/s}^2$$

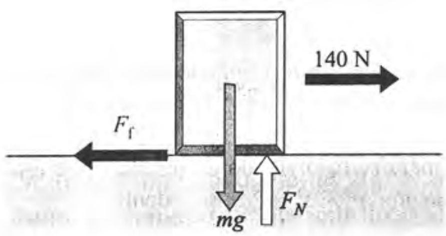


Fig. 3-7

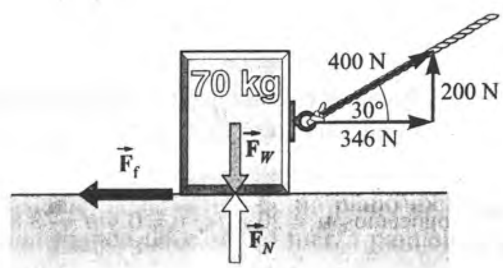


Fig. 3-8

3.16 Supóngase, como se muestra en la Fig. 3-8, que una caja de 70 kg se jala con una fuerza de 400 N que forma un ángulo de 30° con la horizontal. El coeficiente de fricción cinética es 0.50. Calcular la aceleración de la caja

Como la caja no tiene movimiento en la dirección vertical, tenemos que $\Sigma F_y = ma_y = 0$. En la Fig. 3-8, podemos ver que esta ecuación es

$$F_N + 200\text{ N} - mg = 0$$

Pero $mg = (70\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) = 687$ N, y se sigue que $F_N = 486$ N.

A continuación calculamos la fuerza de fricción que actúa sobre la caja:

$$F_f = \mu_c F_N = (0.50)(486\text{ N}) = 243\text{ N}$$

Ahora escribamos $\Sigma F_x = ma_x$ para la caja. Esto es

$$(346 - 243)\text{ N} = (70\text{ kg})(a_x)$$

de donde $a_x = 1.5\text{ m/s}^2$.

3.17 Un automóvil que se mueve a 20 m/s en un camino horizontal aplica repentinamente los frenos y finalmente llega al reposo. ¿Cuál es la distancia más corta en que puede detenerse si el coeficiente de fricción entre las llantas y el camino es 0.90? Suponga que todas las llantas frenan al mismo tiempo.

La fuerza de fricción en una llanta, denominada llanta 1, es

$$F_{f1} = \mu_e F_{N1} = \mu F_{W1}$$

donde F_{W1} es el peso que soporta la llanta 1. Obtenemos la fuerza de fricción total F_f sumando estos términos para las cuatro llantas.

$$F_f = \mu_e F_{W1} + \mu_e F_{W2} + \mu_e F_{W3} + \mu_e F_{W4} = \mu_e(F_{W1} + F_{W2} + F_{W3} + F_{W4}) = \mu_e F_W$$

donde F_W es el peso total del automóvil. (Note que se está suponiendo un frenado óptimo en cada llanta.) Esta fuerza de fricción es la única fuerza no balanceada sobre el automóvil (se desprecia la fricción del viento). Escribiendo $F = ma$ para el automóvil, reemplazando F por $-\mu_e F_W$ da $-\mu_e F_W = ma$, donde m es la masa del automóvil y la dirección positiva se considera como la dirección del movimiento. Como $F_W = mg$, la aceleración del automóvil es

$$a = \frac{\mu_e F_W}{m} = -\frac{\mu_e mg}{m} = -\mu_e g = (-0.90)(9.81\ \text{m/s}^2) = -8.8\ \text{m/s}^2$$

Podemos calcular qué tan lejos viajó el automóvil antes de pararse resolviendo un problema de movimiento. Conocemos $\upsilon_0 = 20$ m/s, $\upsilon_f = 0$ y $a = -8.8$ m/s², de la ecuación $\upsilon_f^2 - \upsilon_0^2 = 2ax$ se calcula

$$x = \frac{(0 - 400)\ \text{m}^2/\text{s}^2}{-17.6\ \text{m/s}^2} = 23\ \text{m}$$

Si el frenado no fuera uniforme en las cuatro llantas, la distancia necesaria para detenerse será más grande.

3.18 Como se muestra en la Fig. 3-9, una fuerza de 400 N empuja una caja de 25 kg. Partiendo del reposo, la caja alcanza una velocidad de 2.0 m/s en un tiempo de 4.0 s. Encontrar el coeficiente de fricción cinético entre la caja y el piso.

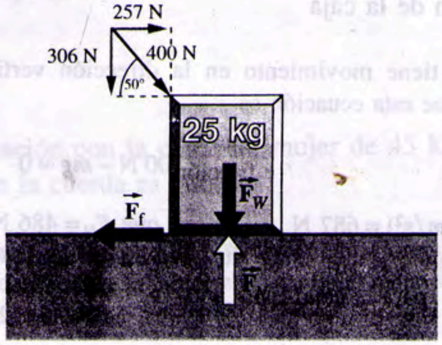


Fig. 3-9

Es necesario encontrar f usando la ecuación $F = ma$. Para esto primero se debe encontrar a con las ecuaciones de movimiento. Se tiene que $\upsilon_0 = 0$, $\upsilon_f = 2.0$ m/s, $t = 4.0$ s. Utilizando $\upsilon_f = \upsilon_0 + at$ se encuentra que

$$a = \frac{\upsilon_f - \upsilon_0}{t} = \frac{2.0 \text{ m/s}}{4.0 \text{ s}} = 0.50 \text{ m/s}^2$$

Ahora podemos escribir $\Sigma F_x = ma_x$, donde $a_x = a = 0.50$ m/s^2. De la Fig. 3-9, esta ecuación es

$$257 \text{ N} - F_f = (25 \text{ kg})(0.50 \text{ m/s}^2) \qquad \text{o} \qquad F_f = 245 \text{ N}$$

Queremos calcular $\mu = F_f/F_N$. Para calcular F_N escribimos $\Sigma F_y = ma_y = 0$, como no hay movimiento vertical. De la Fig. 3-9,

$$F_N - 306 \text{ N} - (25)(9.81) \text{ N} = 0 \qquad \text{o} \qquad F_N = 551 \text{ N}$$

Entonces

$$\mu_c = \frac{F_f}{F_N} = \frac{245}{551} = 0.44$$

3.19 Se tira de una vagoneta de 200 N con rapidez constante, hacia arriba de un plano inclinado que forma un ángulo de 30° con la horizontal. ¿Qué tan grande debe ser la fuerza paralela al plano inclinado, si se desprecian los efectos de la fricción?

La situación se muestra en la figura 3-10*a*. Debido a que la vagoneta se mueve a una velocidad constante a lo largo de una recta, su vector velocidad es constante. Por lo tanto, la vagoneta se encuentra en equilibrio de traslación y puede aplicarse al mismo la primera condición para el equilibrio.

Se aísla la vagoneta como el objeto. Tres fuerzas no despreciables actúan sobre ella: 1) el tirón de la gravedad F_W (su peso) dirigido directamente hacia abajo; 2) la fuerza F sobre la vagoneta, paralela al plano inclinado, para tirar de aquélla hacia arriba de este último, 3) el empuje F_N del plano inclinado que soporta la vagoneta. En la figura 3-10*b*, se muestran estas tres fuerzas en el diagrama de cuerpo libre.

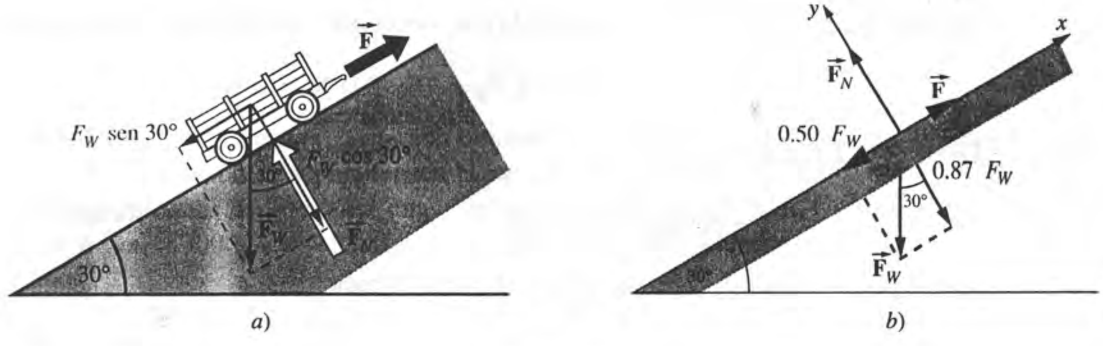


Fig. 3-10

Para situaciones en las que intervienen planos inclinados, es conveniente tomar el eje x paralelo al propio plano y el eje y perpendicular al mismo. Después de tomar las componentes a lo largo de estos ejes, se puede escribir la primera condición para el equilibrio:

$$\nearrow \Sigma F_x = 0 \qquad \text{queda} \qquad F - 0.50\,F_W = 0$$

$$\nwarrow \Sigma F_y = 0 \qquad \text{queda} \qquad F_N - 0.87\,F_W = 0$$

Si se resuelve la primera ecuación y se recuerda que $F_W = 200$ N, se encuentra que $F = 0.50\,F_W$. La fuerza de tracción requerida, con dos cifras significativas, es 0.10 kN.

3.20 Una caja de 20 kg reposa sobre un plano inclinado como se muestra en la Fig. 3-11. El coeficiente de fricción cinética entre la caja y el plano inclinado es 0.30. Calcular la aceleración con la que desciende la caja por el plano inclinado.

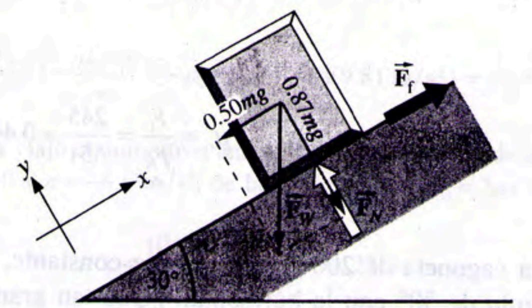


Fig. 3-11

Para resolver problemas de plano inclinado, los ejes x y y se toman como se muestra en la figura; el eje x paralelo al plano, el eje y perpendicular al plano. Encontraremos la aceleración escribiendo $\Sigma F_x = ma_x$. Primero se debe calcular la fuerza de fricción F_f. Si aplica el hecho de que cos 30° = 0.866,

$$F_y = ma_y = 0 \qquad \text{da} \qquad F_N - 0.87mg = 0$$

de donde $F_N = (0.87)(20\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) = 171$ N. Ahora podemos calcular F_f de la ecuación

$$F_f = \mu_c F_N = (0.30)(171\text{ N}) = 51\text{ N}$$

Escribiendo $\Sigma F_x = ma_x$, se tiene

$$F_f - 0.50mg = ma_x \qquad \text{o} \qquad 51\text{ N} - (0.50)(20)(9.81)\text{ N} = (20\text{ kg})(a_x)$$

de donde $a_x = -2.35$ m/s². La aceleración de la caja al bajar por el plano es 2.4 m/s².

3.21 Cuando una fuerza de 500 N empuja una caja de 25 kg como se muestra en la Fig. 3-12, la aceleración de la caja al subir por el plano es 0.75 m/s². Calcular el coeficiente de fricción cinética entre la caja y el plano.

Las fuerzas que actúan y sus componentes se muestran en la Fig. 3-12. Nótese cómo se han tomado los ejes x y y. Como la caja sube por el plano inclinado, la fuerza de fricción (siempre actúa retardando el movimiento) está dirigida hacia abajo.

Primero encontremos F_f escribiendo $\Sigma F_x = ma_x$. De la Fig. 3-12, al usar sen 40° = 0.643, se puede ver

$$383\text{ N} - F_f - (0.64)(25)(9.81)\text{ N} = (25\text{ kg})(0.75\text{ m/s}^2)$$

de donde F_f =207 N.

También se necesita F_N. Escribiendo $\Sigma F_y = ma_y = 0$, y al usar cos 40° = 0.766, obtenemos

$$F_N - 321\text{ N} - (0.77)(25)(9.81)\text{ N} = 0 \qquad \text{o} \qquad F_N = 510\text{ N}$$

Entonces:

$$\mu_c = \frac{F_f}{F_N} = \frac{207}{510} = 0.41$$

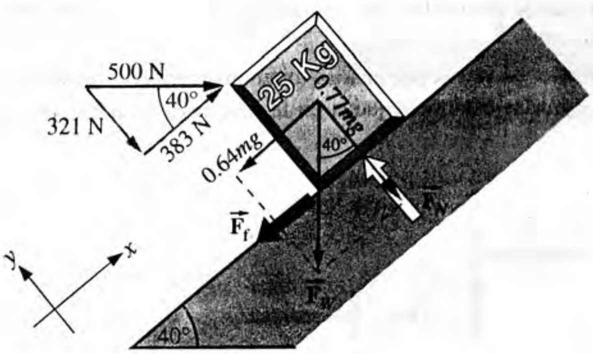


Fig. 3-12

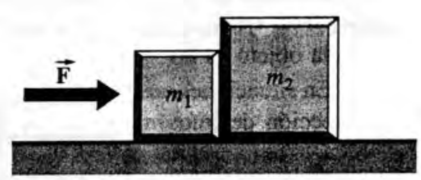


Fig. 3-13

3.22 Dos bloques de masas m_1 y m_2, son empujados por una fuerza F como se muestra en la Fig. 3-13. El coeficiente de fricción entre cada bloque y la mesa es 0.40. *a*) ¿Cuál debe ser el valor de la fuerza F si los bloques han de tener una aceleración de 200 cm/s²? *b*) ¿Qué fuerza ejerce m_1 sobre m_2? Utilice $m_1 = 300$ g y $m_2 = 500$ g. Recuerde trabajar en unidades del SI.

La fuerza de fricción sobre cada bloque es $F_{f1} = 0.4m_1g$ y $F_{f2} = 0.4m_2g$. Para la discusión tomamos los dos bloques como si fueran un solo objeto; las fuerzas horizontales *externas* sobre el objeto son F, F_{f1} y F_{f2}. Aunque los dos bloques se empujan entre sí, los impulsos son fuerzas *internas*, por lo que no forman parte de la fuerza externa no balanceada que actúa sobre el objeto compuesto por dos masas. Para ese objeto,

$$\Sigma F_x = ma_x \quad \text{se convierte en} \quad F - F_{f1} - F_{f2} = (m_1 + m_2)a_x$$

a) Resolviendo para F y sustituyendo los valores conocidos, encontramos

$$F = 0.40\, g(m_1 + m_2) + (m_1 + m_2)a_x = 3.14 \text{ N} + 1.60 \text{ N} = 4.7 \text{ N}$$

b) Ahora considere sólo el bloque m_2. Las fuerzas que actúan sobre él en la dirección x son el impulso debido al bloque m_1 (que representaremos por F_b) y la fuerza de fricción retardadora $F_{f2} = 0.4m_2g$. Entonces, para él,

$$\Sigma F_x = ma_x \quad \text{se convierte en} \quad F_b - F_{f2} = m_2a_x$$

Sabemos que $a_x = 2.0 \text{ m/s}^2$ y por tanto

$$F_b = F_{f2} + m_2a_x = 1.96 \text{ N} + 1.00 \text{ N} = 2.96 \text{ N} = 3.0 \text{ N}$$

3.23 Una masa de 7.0 kg cuelga del extremo de una cuerda que pasa por una polea sin fricción, y en el otro extremo cuelga una masa de 9.0 kg, como se muestra en la Fig. 3-14. (Este arreglo se llama *máquina de Atwood*.) Encontrar la aceleración de las masas y la tensión en la cuerda.

Como no hay fricción en la polea, la tensión en la cuerda será la misma en ambos lados de la cuerda. Las fuerzas que actúan en cada una de las dos masas están dibujadas en la Fig. 3-14. Recuerde que el peso de cada objeto es mg.

En situaciones en las cuales los objetos están conectados por cuerdas, es conveniente considerar positiva la dirección del movimiento. En este caso, consideramos positivo *hacia arriba* para la masa de 7.0 kg y

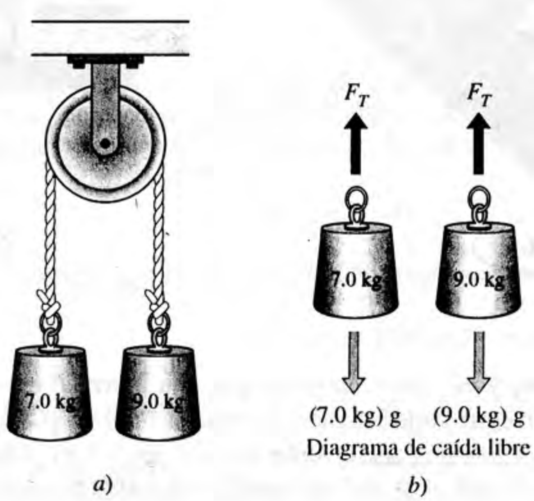


Fig. 3-14

positivo *hacia abajo* para la masa de 9.0 kg. (Si hacemos esto, la aceleración será positiva para cada masa. Como la cuerda no se estira, las aceleraciones son numéricamente iguales.) Escribiendo $\Sigma F_y = ma_y$ para cada masa, tendremos

$$F_T - (7.0)(9.81)\text{ N} = (7.0\text{ kg})(a) \qquad \text{y} \qquad (9.0)(9.81)\text{ N} - F_T = (9.0\text{ kg})(a)$$

Si sumamos estas dos ecuaciones, eliminamos la incógnita F_T, dando

$$(9.0 - 7.0)(9.81)\text{ N} = (16\text{ kg})(a)$$

para el cual $a = 1.23$ m/s². Ahora podemos sustituir a por 1.23 m/s² en cualquiera de las dos ecuaciones y obtener $F_T = 77$ N.

3.24 En la Fig. 3-15, el coeficiente de fricción cinética entre el bloque A y la mesa es 0.20. También $m_A = 25$ kg, $m_B = 15$ kg. ¿Cuánto bajará el cuerpo B en los primeros 3.0 s después de liberar el sistema?

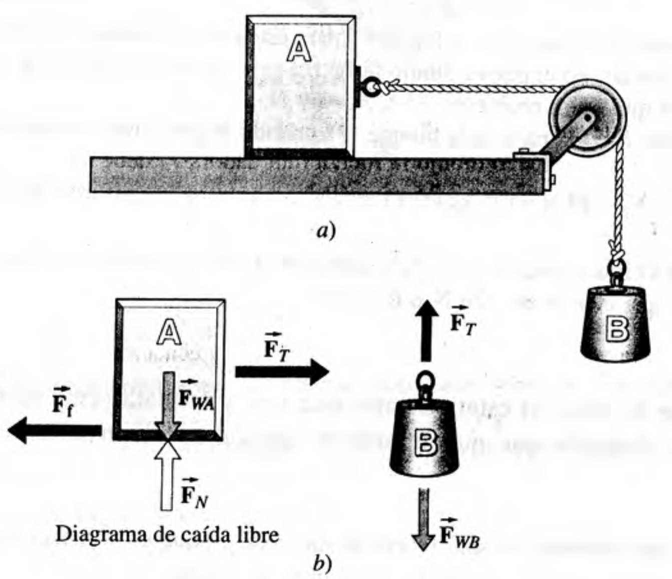


Fig. 3-15

Como para el bloque A no hay movimiento vertical, la fuerza normal es

$$F_N = m_A g = (25\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) = 245\text{ N}$$

y

$$F_f = \mu_c F_N = (0.20)(245\text{ N}) = 49\text{ N}$$

En primer término debemos encontrar la aceleración del sistema para poder describir su movimiento. Apliquemos $F = ma$ a cada bloque. Tomando la dirección del movimiento como positiva, tenemos

$$F_T - F_f = m_A a \quad \text{o} \quad F_T - 49\ \text{N} = (25\ \text{kg})(a)$$

y

$$m_B g - F_T = m_B a \quad \text{o} \quad -F_T + (15)(9.81)\ \text{N} = (15\ \text{kg})(a)$$

Podemos eliminar F_T sumando las dos ecuaciones. Entonces, resolviendo para a, encontramos que $a = 2.45\ \text{m/s}^2$.

Ahora ya podemos trabajar el problema de movimiento con $a = 2.45\ \text{m/s}^2$, $v_0 = 0$, $t = 3.0$ s:

$$y = v_{0y}t + \tfrac{1}{2}at^2 \quad \text{da} \quad y = 0 + \tfrac{1}{2}(2.45\ \text{m/s}^2)(3.0\ \text{s})^2 = 11\ \text{m}$$

como la distancia que B baja en los primeros 3.0 s.

3.25 En la Fig. 3-15, ¿qué tan grande debe ser la fuerza horizontal que tira del bloque A, además de F_T, para darle una aceleración de 0.75 m/s² *hacia la izquierda*? Suponga, como en el problema 3.24, que $\mu_c = 0.20$, $m_A = 25$ kg y $m_B = 15$ kg.

Si dibujáramos nuevamente la Fig. 3-15 para este caso, debemos incluir una fuerza F que tira de A hacia la izquierda. Además, en el nuevo dibujo la fuerza retardadora F_f debe estar en dirección contraria a la de la Fig. 3-15. Igual que en el problema 3.24, $F_f = 49$ N.

Escribiendo $F = ma$ para cada bloque, y tomando la dirección de movimiento como positiva. Tenemos

$$F - F_T - 49\ \text{N} = (25\ \text{kg})(0.75\ \text{m/s}^2) \quad \text{y} \quad F_T\,(15)(9.81)\ \text{N} = (15\ \text{kg})(0.75\ \text{m/s}^2)$$

Resolviendo la última ecuación para F_T y sustituyendo en la ecuación anterior, podemos calcular el valor de F encontrando que éste es de 226 N o 0.23 kN.

3.26 El coeficiente de fricción estático entre una caja y la plataforma de un camión es 0.60. ¿Cuál es la máxima aceleración que puede tener el camión sobre un terreno nivelado si la caja no debe resbalar?

La caja experimenta una sola fuerza en dirección x, que es la fuerza de fricción. Cuando la caja está a punto de resbalar, $F_f = \mu_e F_W$, donde F_W es el peso de la caja.

Conforme el camión acelera, la fuerza de fricción le proporciona a la caja la misma aceleración que tiene el camión; de otra forma, la caja resbalaría. Cuándo ésta no resbala, $\Sigma F_x = ma_x$, aplicada a la caja da $F_f = ma_x$. Sin embargo, si la caja está a punto de deslizarse, $F_f = \mu_e F_W$ entonces $\mu_e F_W = ma_x$. Como $F_W = mg$, esto nos da

$$a_x = \frac{\mu_e mg}{m} = \mu_e g = (0.60)(9.81\ \text{m/s}^2) = 5.9\ \text{m/s}^2$$

como la máxima aceleración sin que exista deslizamiento.

3.27 En la Fig. 3-16, las dos cajas tienen masas idénticas de 40 kg. Ambas experimentan una fuerza de fricción cinética con $\mu_c = 0.15$. Encuéntrense la aceleración de las cajas y la tensión en la cuerda que las une.

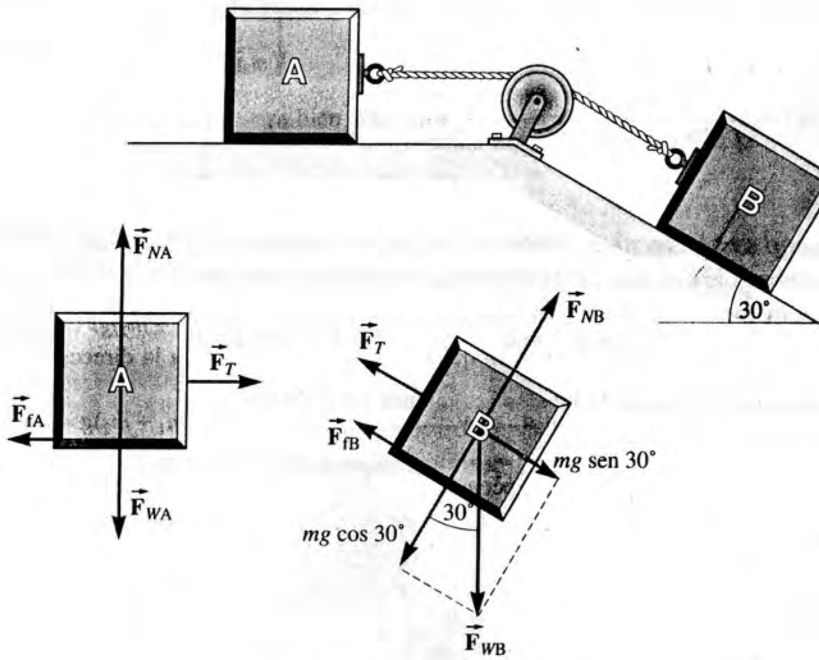


Fig. 3-16

Usando $F_f = \mu F_N$, encontramos que las fuerzas de fricción sobre las dos cajas son

$$F_{fA} = (0.15)(mg) \qquad \text{y} \qquad F_{fB} = (0.15)(0.87mg)$$

Pero $m = 40$ kg, entonces $F_{fA} = 59$ N y $F_{fB} = 51$ N.

Apliquemos $\Sigma F_x = ma_x$ a cada bloque, tomando como positiva la dirección de movimiento. Esto da

$$F_T - 59 \text{ N} = (40 \text{ kg})(a) \qquad \text{y} \qquad 0.5mg - F_T - 51 \text{ N} = (40 \text{ kg})(a)$$

Resolviendo estas dos ecuaciones para a y F_T dan $a = 1.1$ m/s^2 y $F_T = 0.10$ kN.

3.28 En el sistema que se muestra en la Fig. 3-17*a*, la fuerza F acelera al bloque m_1 hacia la derecha. Encontrar su aceleración en términos de F y del coeficiente de fricción μ_c entre las superficies de contacto.

Las fuerzas horizontales sobre el bloque se muestran en la Fig. 3-17*b* y *c*. El bloque m_2 presiona al m_1 con su peso, m_2g. Ésta es la fuerza normal donde m_1 y m_2 están en contacto, entonces la fuerza de fricción

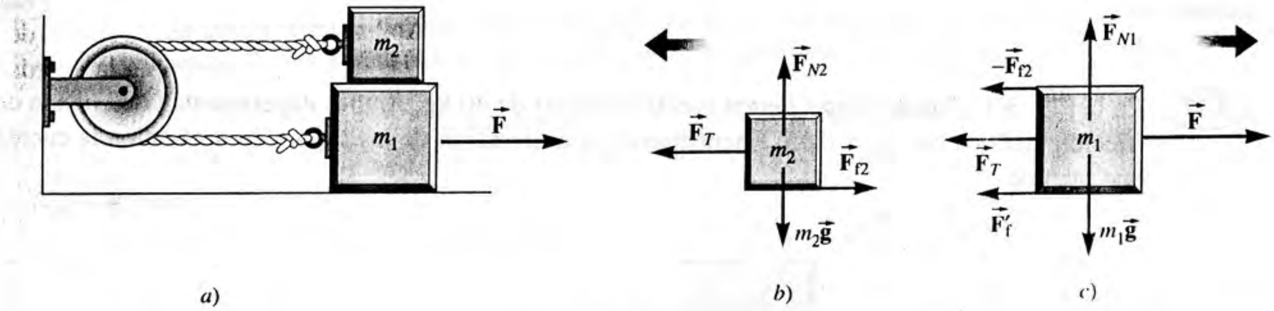


Fig. 3-17

es $F_{f2} = \mu_c m_2 g$. En la superficie inferior de m_1, la fuerza normal es $(m_1 + m_2)g$. Entonces $F_f' = \mu_c(m_1 + m_2)g$. Ahora escribimos $\Sigma F_x = ma_x$ para cada bloque, tomando como positiva la dirección del movimiento.

$$F_T = \mu_c m_2 g = m_2 a \qquad \text{y} \qquad F - F_T - \mu m_2 g - \mu_c (m_1 + m_2)g = m_1 a$$

Podemos eliminar F_T sumando las dos ecuaciones para obtener

$$F - 2\mu_c m_2 g - \mu_c(m_1 + m_2)(g) = (m_1 + m_2)(a)$$

de donde

$$a = \frac{F - 2\mu_c m_2 g}{m_1 + m_2} - \mu_c g$$

3.29 En el sistema de la Fig. 3-18, la fricción y la masa de la polea son despreciables. Encontrar la aceleración de m_2 si $m_1 = 300$ g, $m_2 = 500$ g y $F = 1.50$ N.

Nótese que m_1 tiene el doble de la aceleración de la que tiene m_2. (Cuando la polea se mueve una distancia d, m_1 se mueve una distancia $2d$.) También observe que la tensión F_{T1} en la cuerda que jala a m_1 es la mitad de F_{T2} (tensión en la cuerda que jala a la polea), ya que la fuerza total sobre la polea debe ser cero.

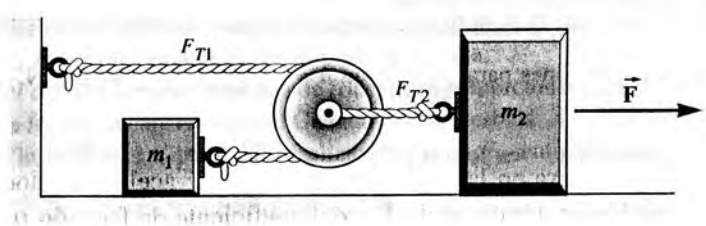


Fig. 3-18

($F = ma$ nos dice que esto es así ya que la masa de la polea es cero.) Escribiendo $\Sigma F_x = ma_x$ para cada masa, tenemos

$$F_{T1} = (m_1)(2a) \qquad \text{y} \qquad F - F_{T2} = m_2 a$$

Pero sabemos que $F_{T1} = \frac{1}{2} F_{T2}$ y la primera ecuación da $F_{T2} = 4m_1 a$. Sustituyendo en la segunda ecuación se obtiene

$$F = (4m_1 + m_2)(a) \qquad \text{o bien} \qquad a = \frac{F}{4m_1 + m_2} = \frac{1.50\ \text{N}}{1.20\ \text{kg} + 0.50\ \text{kg}} = 0.882\ \text{m/s}^2$$

3.30 En la Fig. 3-19, los pesos de los objetos son 200 N y 300 N. Se considera que las poleas no tienen fricción y que sus masas son despreciables. La polea P_1 tiene un eje estacionario, la polea P_2 puede subir o bajar libremente. Calcular las tensiones F_{T1} y F_{T2} así como la aceleración de cada cuerpo.

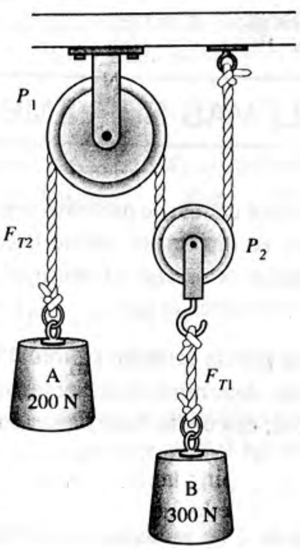


Fig. 3-19

La masa B sube y la masa A baja. Esto se puede ver si se observa que las fuerzas que actúan sobre la polea P_2 son $2F_{T2}$ hacia arriba y F_{T1} hacia abajo. Como la polea no tiene masa, no puede tener aceleración, y por tanto $F_{T1} = 2F_{T2}$ (como la inercia de las poleas es despreciable, ésta únicamente transmite la tensión). La fuerza que tira hacia arriba al objeto B es dos veces la fuerza que actúa sobre A.

Sea a la aceleración descendente de A; entonces $a/2$ es la aceleración ascendente de B. (¿Por qué?) Ahora escribimos $\Sigma F_y = ma_y$ para cada masa, tomando como positiva la dirección del movimiento. Tenemos

$$F_{T1} - 300\ \text{N} = (m_B)(\tfrac{1}{2} a) \qquad \text{y} \qquad 200\ \text{N} - F_{T2} = m_A a$$

Pero $m = F_W/g$ entonces $m_A = (200/9.81)$ kg y $m_B = (300/9.81)$ kg. Además $F_{T1} = 2F_{T2}$. La sustitución de estos valores en las dos ecuaciones permite calcular F_{T2}, F_{T1} y a. Los resultados son

$$F_{T1} = 327\text{ N} \qquad F_{T2} = 164\text{ N} \qquad a = 1.78\text{ m/s}^2$$

3.31 **Calcule la masa de la Tierra, suponiendo que es una esfera de radio de 6370 km. Dé su respuesta con tres cifras significativas.**

Sea M la masa de la Tierra, y m la masa de un cierto objeto próximo a la superficie terrestre. El peso del objeto es igual a mg, el cual es igual a la fuerza gravitacional $G(Mm)/r^2$, donde r es el radio de la Tierra. Entonces,

$$mg = G\frac{Mm}{r^2}$$

de donde

$$M = \frac{gr^2}{G} = \frac{(9.81\text{ m/s}^2)(6.37\times 10^6\text{ m})^2}{6.67\times 10^{-11}\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2} = 5.97\times 10^{24}\text{ kg}$$

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

3.32 Una vez encendido, un pequeño motor cohete de una nave espacial ejerce una fuerza constante de 10 N durante 7.80 s. Durante el tiempo en que se quema, el cohete hace que la nave de 100 kg se acelere de manera uniforme. Determine esa aceleración. *Resp.* 0.10 m/s^2

3.33 Típicamente, una bala sale de una pistola estándar calibre 45 (cañón de 5.0 in) a una velocidad de 262 m/s. Si tarda 1 ms en recorrer el cañón, determine la aceleración promedio experimentada por la bala de 16.2 g dentro del mismo y, a continuación, calcule la fuerza promedio ejercida sobre ella. *Resp.* $3 + 10^5$ m/s^2; 0.4×10^2 N

3.34 Una fuerza actúa sobre una masa de 2 kg acelerándola a 3 m/s^2. ¿Qué aceleración produce la misma fuerza cuando actúa sobre una masa de *a*) 1 kg, *b*) 4 kg? *c*) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza? *Resp.* *a*) 6 m/s^2; *b*) 2 m/s^2; c) 6 N

3.35 Un objeto tiene una masa de 300 g. *a*) ¿Cuál es su peso sobre la Tierra? *b*) ¿Cuál es su masa en la Luna? *c*) ¿Cuál será su aceleración en la Luna cuando una fuerza de 0.500 N actúa sobre él? *Resp.* *a*) 2.94 N; *b*) 0.300 kg; *c*) 1.67 m/s^2

3.36 Un cable horizontal tira de una carreta de 200 kg a lo largo de un camino horizontal. La tensión en el cable es de 500 N. Partiendo del reposo, *a*) ¿qué tiempo le llevará a la carreta alcanzar una rapidez de 8.0 m/s? *b*) ¿Qué distancia habrá recorrido? *Resp.* *a*) 3.2 s; *b*) 13 m

3.37 Un auto de 900 kg viaja a 20 m/s en un camino plano. ¿Cuál es la magnitud de una fuerza retardadora constante necesaria para detener el auto en una distancia de 30 m? (*Sugerencia*: primero calcule la desaceleración.) *Resp.* 6.0 kN

3.38 Una bala de 12.0 g es acelerada desde el reposo hasta una rapidez de 700 m/s al recorrer 20.0 cm dentro del cañón de un fusil. Suponiendo que la aceleración es constante, ¿qué tan grande debe ser la fuerza aceleradora? (*Tenga cuidado con las unidades.*) *Resp.* 14.7 kN

3.39 Un cesto de 20 kg cuelga del extremo de una cuerda. Calcular la aceleración cuando la tensión en la cuerda es *a*) 250 N, *b*) 150 N, *c*) cero, *d*) 196 N. *Resp.* *a*) 2.7 m/s^2 hacia arriba; *b*) 2.3 m/s^2 hacia abajo; *c*) 9.8 m/s^2 hacia abajo; *d*) cero

3.40 Una masa de 5.0 kg cuelga del extremo de una cuerda. Calcular la tensión de ésta si la aceleración de la masa es *a*) 1.5 m/s^2 hacia arriba, *b*) 1.5 m/s^2 hacia abajo, *c*) 9.8 m/s^2 hacia abajo. *Resp.* *a*) 57 N; *b*) 42 N; *c*) cero

3.41 Un hombre de 700 N se encuentra de pie sobre una báscula en el piso de un elevador. La báscula registra la fuerza de todo lo que se ponga sobre ella. ¿Cuál es la lectura en la balanza si el elevador tiene una aceleración de *a*) 1.8 m/s^2 hacia arriba, *b*) 1.8 m/s^2 hacia abajo y *c*) 9.8 m/s^2 hacia abajo? *Resp.* *a*) 0.83 kN; *b*) 0.57 kN; *c*) cero

3.42 Utilizando la báscula descrita en el problema 3.41 un astronauta de 65.0 kg se pesa en la Luna, donde g = 1.60 m/s^2. ¿Cuál es la lectura en la báscula? *Resp.* 104 N

3.43 Una cuerda pasa sobre una polea sin fricción y con masa despreciable. Un objeto de 4.0 kg se cuelga en un extremo y en el otro un objeto de 12 kg. Calcular la aceleración y la tensión en la cuerda. *Resp.* 4.9 m/s^2, 59 N

3.44 Un elevador parte del reposo y sube con una aceleración constante. Se mueve 2.0 m en los primeros 0.60 s. Un pasajero en el elevador sostiene un paquete de 3.0 kg con una cuerda. ¿Cuál es la tensión en la cuerda durante la aceleración? *Resp.* 63 N

3.45 Justo en el momento en que se abre su paracaídas, una paracaidista de 60 kg desciende con una rapidez de 50 m/s. Después de 0.80 s el paracaídas está totalmente abierto y la rapidez se reduce a 12.0 m/s. Calcúlese la fuerza retardadora promedio ejercida sobre el paracaídas en este intervalo de tiempo si la desaceleración es uniforme. *Resp.* 2850 N + 588 N = 3438 N = 3.4 kN

3.46 Una masa de 300 g cuelga del extremo de un cordón. Un segundo cordón, que sostiene una masa de 900 g, cuelga de la parte inferior de la primera masa. *a*) Calcular la tensión en cada cordón cuando las masas son aceleradas hacia arriba a 0.700 m/s^2. *b*) Calcular la tensión en cada cordón cuando la aceleración es hacia abajo. *Resp.* *a*) 12.6 N y 9.45 N; *b*) 10.9 N y 8.19 N

3.47 Una carreta de 20 kg es arrastrada sobre un terreno nivelado con una cuerda que forma un ángulo de 30° con la horizontal. Una fuerza de fricción 30 N se opone al movimiento. ¿Cuál es la fuerza con que se jala la cuerda para que se mueva con *a*) rapidez constante y *b*) una aceleración de 0.40 m/s^2? *Resp.* *a*) 35 N; *b*) 44 N

3.48 Una caja de 12 kg se suelta desde la parte más alta de un plano inclinado de 5.0 m de longitud y que forma un ángulo de 40° con la horizontal. Una fuerza de fricción de 60 N impide el movimiento de la caja. *a*) ¿Cuál será la aceleración de la caja? y *b*) ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar la base del plano inclinado? *Resp.* *a*) 1.3 m/s²; *b*) 2.8 s

3.49 Para la situación descrita en el problema 3.48, ¿cuál es el coeficiente de fricción entre la caja y el plano inclinado? *Resp.* 0.67

3.50 Un plano inclinado hace un ángulo de 30° con el plano horizontal. Encuentre la fuerza constante, aplicada paralelamente al plano, requerida para que una caja de 15 kg se deslice *a*) hacia arriba del plano con aceleración de 1.2 m/s^2 y *b*) hacia abajo con una aceleración de 1.2 m/s^2. Desprecie las fuerzas de fricción. *Resp.* *a*) 92 N; *b*) 56 N

3.51 Una fuerza horizontal *F* se ejerce sobre una caja de 20 kg para hacerla deslizar hacia arriba por un plano inclinado de 30°. La fuerza de fricción que retarda el movimiento es de 80 N. ¿Cuál debe ser la magnitud de *F* si la aceleración de la caja en movimiento debe ser de *a*) cero y *b*) 0.75 m/s^2? *Resp.* *a*) 0.21 kN; *b*) 0.22 kN

3.52 Un plano inclinado que forma un ángulo de 25° con la horizontal tiene una polea en la parte superior. Un bloque de 30 kg sobre el plano inclinado está unido por medio de una cuerda que pasa por la polea, a un bloque de 20 kg que cuelga libremente. Calcular la distancia que recorre el bloque de 20 kg en 2.0 s partiendo del reposo. Despreciar la fricción. *Resp.* 2.9 m

3.53 Repita el problema 3.52 considerando ahora que el coeficiente de fricción entre el bloque y el plano inclinado es 0.20. *Resp.* 0.74 m

3.54 Se requiere una fuerza horizontal de 200 N para deslizar hacia arriba en un plano inclinado de 20° un bloque de 15 kg con una aceleración de 25 cm/s^2. Calcular *a*) la fuerza de fricción sobre el bloque y *b*) el coeficiente de fricción. *Resp.* *a*) 0.13 kN; *b*) 0.65

3.55 Calcular la aceleración de los bloques de la Fig. 3-20 si las fuerzas de fricción son despreciables. ¿Cuál es la tensión en la cuerda que los une? *Resp.* 3.3 m/s^2, 13 N

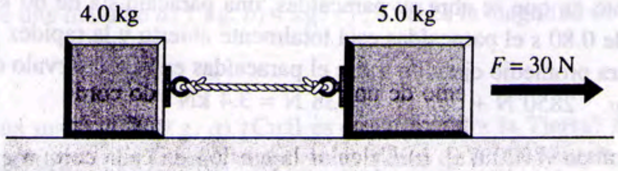


Fig. 3-20

3.56 Repita el problema 3.55 si el coeficiente de fricción entre el bloque y la mesa es 0.30. *Resp.* 0.39 m/s^2, 13 N

3.57 ¿Qué fuerza F se necesita en la Fig. 3-21 para tirar del bloque de 6.0 kg con una aceleración de 1.50 m/s^2 si el coeficiente de fricción en las caras superior e inferior es de 0.40? *Resp.* 48 N

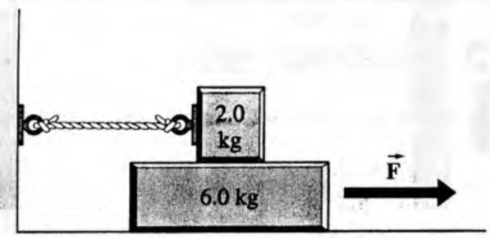


Fig. 3-21

3.58 En la Fig. 3-22 ¿qué fuerza se necesita para dar a los bloques una aceleración de 3.0 m/s^2 si el coeficiente de fricción entre los bloques y la mesa es 0.20? ¿Qué fuerza ejerce el bloque de 1.50 kg sobre el bloque de 2.0 kg? *Resp.* 22 N, 15 N

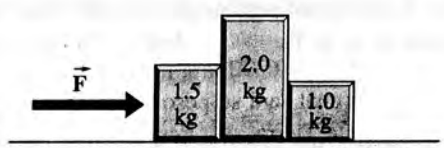


Fig. 3-22

3.59 *a*) ¿Cuál es la fuerza más pequeña paralela a un plano inclinado de 37° que se necesita para impedir que un peso de 100 N resbale hacia abajo, si el coeficiente de fricción estático y el coeficiente de fricción cinético son ambos de 0.30? *b*) ¿Cuál es la fuerza paralela que se requiere para subir el peso con rapidez constante? *c*) Si la fuerza paralela de empuje es de 94 N, ¿cuál será la aceleración del objeto? *d*) Si el objeto en *c*) parte del reposo, ¿cuánto se moverá en 10 s? *Resp.* *a*) 36 N; *b*) 84 N; *c*) 0.98 m/s^2 hacia arriba por el plano; *d*) 49 m

3.60 Un bloque de 5.0 kg descansa sobre un plano inclinado de 30°. El coeficiente de fricción estático entre el bloque y el plano inclinado es 0.20. ¿Qué fuerza horizontal se necesita para empujar al bloque para que esté a punto de resbalar *a*) hacia arriba sobre el plano y *b*) hacia abajo sobre el plano? *Resp.* *a*) 43 N; *b*) 16.6 N

3.61 Tres bloques de masa de 6.0 kg, 9.0 kg y 10 kg están unidos como se muestra en la Fig. 3-23. El coeficiente de fricción estático entre la mesa y el bloque de 10 kg es 0.20. Calcular *a*) la aceleración del sistema y *b*) la tensión en la cuerda de la izquierda y la tensión en la cuerda de la derecha. *Resp.* *a*) 0.39 m/s²; *b*) 61 N, 85 N

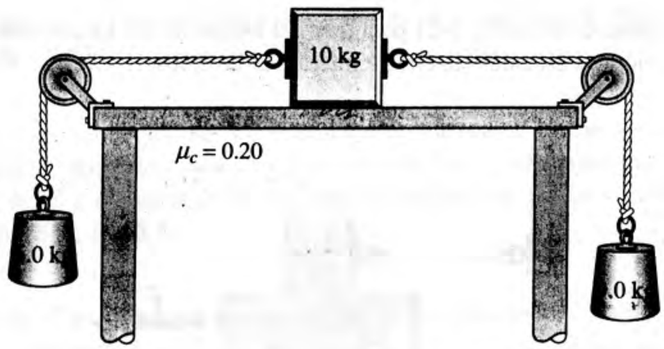


Fig. 3-23

3.62 El radio de la Tierra es de aproximadamente 6370 km. Un objeto que tiene una masa de 20 kg se lleva a una altura de 160 km sobre la superficie de la Tierra. *a*) ¿Cuál es la masa del objeto a esta altura? *b*) ¿Cuánto pesa el objeto? (esto es, ¿cuál es la fuerza gravitacional que experimenta el objeto a esta altura?) *Resp.* *a*) 20 kg; *b*) 0.19 kN

3.63 El radio de la Tierra es de aproximadamente 6370 km, mientras que el de Marte es más o menos de 3440 km. Si un objeto pesa 200 N en la Tierra, ¿cuál será su peso y cuál la aceleración debida a la gravedad en Marte? La masa de Marte es 0.11 veces la de la Tierra. *Resp.* 75 N, 3.7 m/s²

capítulo 4

Equilibrio bajo la acción de fuerzas concurrentes

LAS FUERZAS CONCURRENTES son todas las fuerzas cuyas líneas de acción pasan a través de un punto común. Las fuerzas que actúan sobre un objeto puntual son concurrentes porque todas ellas pasan a través del mismo punto, que es el objeto puntual.

UN OBJETO ESTÁ EN EQUILIBRIO bajo la acción de fuerzas concurrentes, siempre que no se esté acelerando.

LA PRIMERA CONDICIÓN DE EQUILIBRIO requiere que $\Sigma \vec{\mathbf{F}} = 0$, o bien, en forma de componentes, que:

$$\Sigma F_x = \Sigma F_y = \Sigma F_z = 0$$

Es decir, la resultante de todas las fuerzas externas que actúan sobre el objeto debe ser cero. Esta condición es suficiente para el equilibrio cuando las fuerzas externas son concurrentes. Una segunda condición debe ser satisfecha si el objeto permanece en equilibrio bajo la acción de fuerzas no concurrentes; esto se estudiará en el capítulo 5.

MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (FUERZAS CONCURRENTES):

1) Aislar el objeto a estudiar.
2) Mostrar, en un diagrama, las fuerzas que actúan sobre el cuerpo aislado (*diagrama de cuerpo libre*).
3) Encontrar las componentes rectangulares de cada fuerza.
4) Escribir la primera condición de equilibrio en forma de ecuación.
5) Resolver para determinar las cantidades requeridas.

EL PESO DE UN OBJETO ($\vec{\mathbf{F}}_W$) es la fuerza con que la gravedad tira al cuerpo hacia abajo.

TENSIÓN DE UNA CUERDA ($\vec{F}_T$) es la fuerza con la que la cuerda tira del objeto al cual está unida. La magnitud de la fuerza de tensión es la *tensión* (F_T).

FUERZA DE FRICCIÓN ($\vec{F}_f$) es una fuerza tangencial sobre una superficie que se opone al deslizamiento de un objeto a través de una superficie adyacente con la que está en contacto. La fuerza de fricción es paralela a la superficie y opuesta, en sentido, a su movimiento.

LA FUERZA NORMAL ($\vec{F}_N$) sobre una superficie que descansa (o se desliza) sobre una segunda superficie, es la componente perpendicular de la fuerza ejercida por la superficie de soporte sobre la superficie que está siendo soportada.

PROBLEMAS RESUELTOS

4.1 En la Fig. 4-1*a* la tensión en la cuerda horizontal es de 30 N. Encuéntrese el peso del objeto.

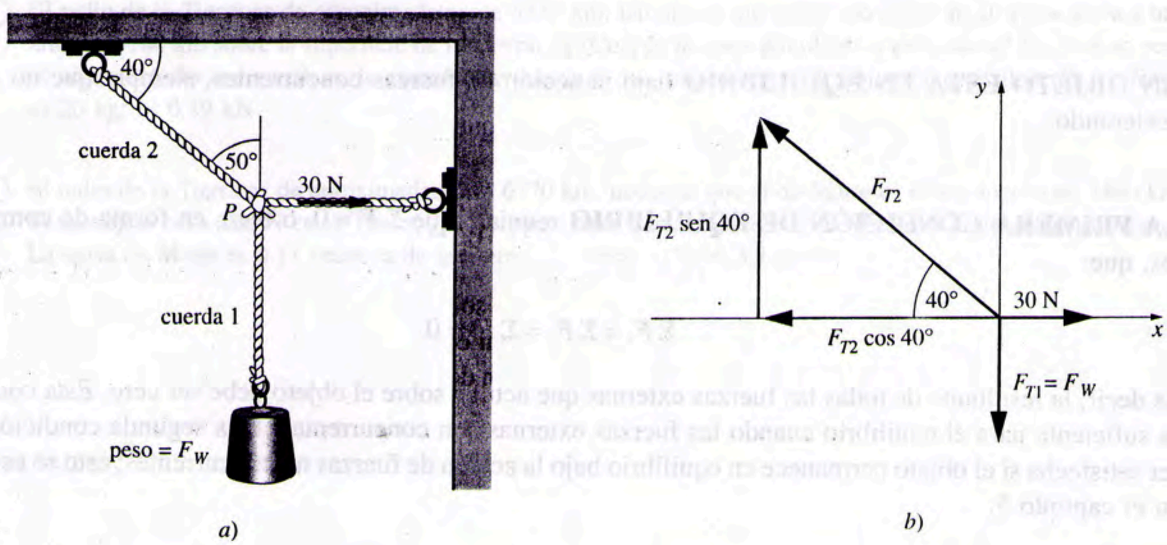


Fig. 4-1

La tensión de la cuerda 1 es igual al peso del cuerpo que cuelga de él. Por lo tanto $F_{T1} = F_W$, y se requiere encontrar F_{T1} o F_W.

Nótese que la fuerza desconocida F_{T1} y la conocida de 30 N actúan las dos sobre el nudo, en el punto *P*. Así pues, tiene sentido aislar el punto *P* como objeto de estudio. La Fig. 4-1*b* muestra el diagrama de cuerpo libre del nudo. Las componentes de las fuerzas también se muestran en el diagrama.

A continuación se establece la primera condición de equilibrio para el nudo. Del diagrama de cuerpo libre,

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 \qquad \text{se convierte en} \qquad 30\text{ N} - F_{T2} \cos 40° = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \qquad \text{se convierte en} \qquad F_{T2} \operatorname{sen} 40° - F_W = 0$$

Al resolver la primera ecuación se encuentra que $F_{T2} = 39.2$ N. Sustituyendo este valor en la segunda ecuación se obtiene $F_W = 25$ N como el peso del objeto.

4.2 Una cuerda se extiende entre dos postes. Un joven de 90 N se cuelga de la cuerda como se muestra en la Fig. 4-2*a*. Encuéntrense las tensiones de las dos secciones de la cuerda.

Las tensiones se denotan por F_{T1} y F_{T2}; se aísla la cuerda en la porción que comprende las manos del joven. El diagrama de cuerpo libre para el objeto de estudio se muestra en la Fig. 4-2*b*.

Después de determinar las componentes de las fuerzas que se muestran, puede escribirse la primera condición de equilibrio:

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 \qquad \text{se convierte en} \qquad F_{T2} \cos 5.0° - F_{T1} \cos 10° = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \qquad \text{se convierte en} \qquad F_{T2} \operatorname{sen} 5.0° + F_{T1} \operatorname{sen} 10° - 90\text{ N} = 0$$

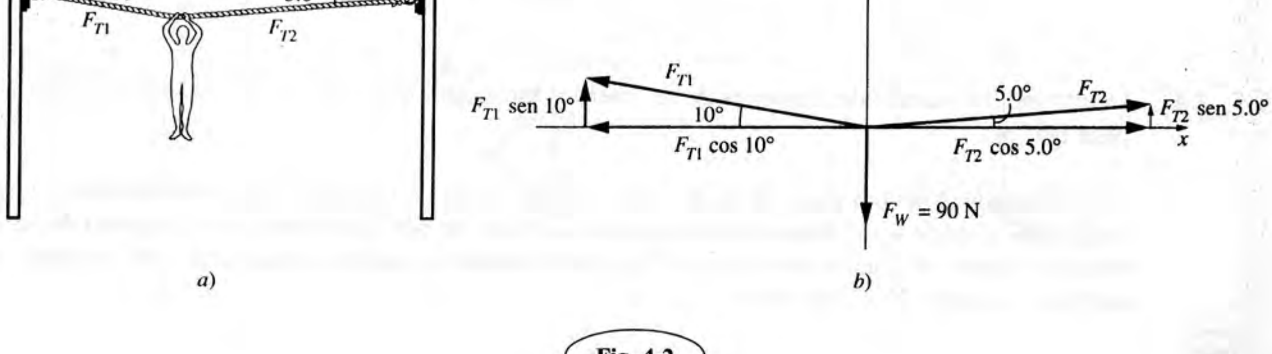
Al evaluar los senos y los cosenos las ecuaciones se convierten en:

$$9.996F_{T2} - 0.985F_{T1} = 0 \qquad \text{y} \qquad 0.087F_{T2} + 0.174F_{T1} - 90 = 0$$

Resolviendo la primera para F_{T2} se encuentra $F_{T2} = 0.990F_{T1}$. Sustituyendo este valor en la segunda, obtenemos:

$$0.086F_{T1} + 0.174F_{T1} - 90 = 0$$

de donde $F_{T1} = 0.35$ kN. Entonces, ya que $F_{T2} = 0.990F_{T1}$, se tiene que $F_{T2} = 0.34$ kN.



a) *b*)

Fig. 4-2

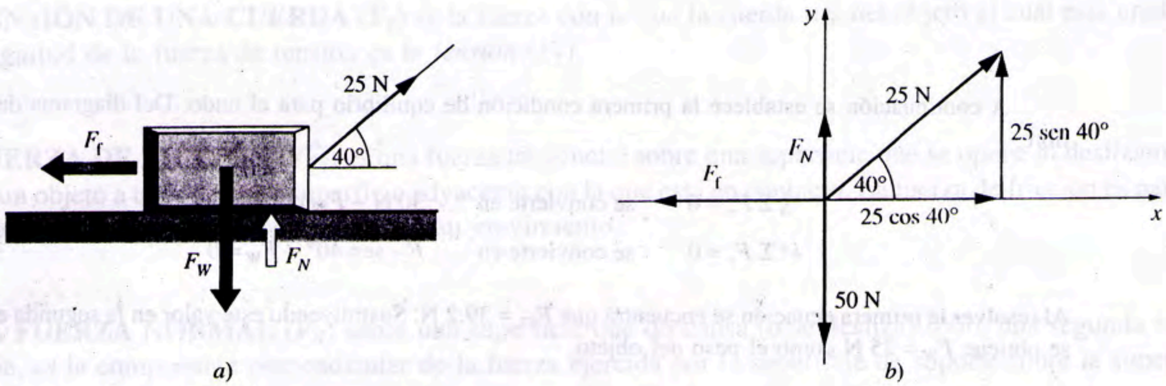


Fig. 4-3

4.3 Una caja de 50 N se desliza sobre el piso con velocidad constante por medio de una fuerza de 25 N, como se muestra en la Fig. 4-3*a*. *a*) ¿Cuál es el valor de la fuerza de fricción que se opone al movimiento? *b*) ¿Cuál es el valor de la fuerza normal? *c*) Determine μ_c entre la caja y el piso.

Adviértase que las fuerzas que actúan sobre la caja se muestran en la Fig. 4-3*a*. La fuerza de fricción es F_f y la fuerza normal, la fuerza de soporte ejercida por el piso, es F_N. El diagrama de cuerpo libre y las componentes de las fuerzas se muestran en la Fig. 4-3*b*. Ya que la caja se mueve con velocidad constante, se encuentra en equilibrio. La primera condición de equilibrio nos dice que:

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 \qquad \text{o} \qquad 25 \cos 40° - F_f = 0$$

a) Es posible resolver para encontrar el valor de la fuerza de fricción $F_f = 19.2$ N o bien, con dos cifras significativas, $F_f = 19$ N.

b) Para determinar la fuerza normal usamos el hecho:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \qquad \text{o} \qquad F_N + 25 \text{ sen } 40° - 50 = 0$$

El valor que se obtiene para la normal es $F_N = 33.9$ N o bien, con dos cifras significativas, $F_N = 34$ N.

c) De la definición de μ_c tenemos:

$$\mu_c = \frac{F_f}{F_N} = \frac{19.2 \text{ N}}{33.9 \text{ N}} = 0.57$$

4.4 Determine los valores de tensiones de las cuerdas mostradas en la Fig. 4-4*a*, si el objeto soportado pesa 600 N.

Se escoge el nudo *A* como el objeto ya que se conoce una de las fuerzas que actúan sobre él. El peso actúa sobre el objeto verticalmente hacia abajo con una fuerza de 600 N, de modo que el diagrama de cuerpo libre para el nudo es como se muestra en la Fig. 4-4*b*. Al aplicar la primera condición de equilibrio para este diagrama de cuerpo libre, obtenemos:

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0 \qquad \text{o} \qquad F_{T2}\cos 60° - F_{T1}\cos 60° = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \qquad \text{o} \qquad F_{T1}\,\text{sen}\,60° + F_{T2}\,\text{sen}\,60° - 600 = 0$$

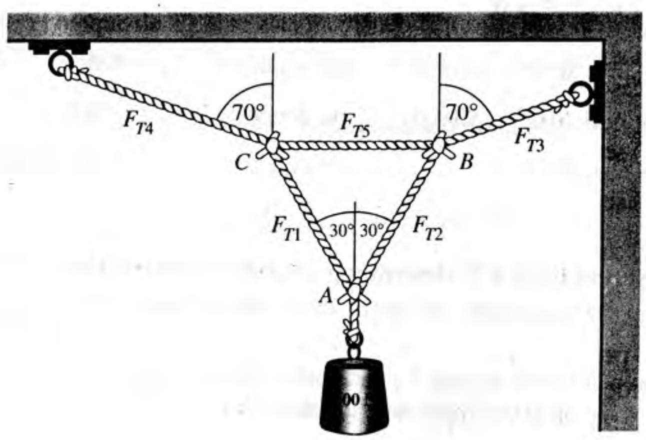
De la primera ecuación se encuentra que $F_{T1} = F_{T2}$. (Esto se puede inferir de la simetría del sistema. También por simetría, $F_{T3} = F_{T4}$.) Sustituyendo F_{T1} por F_{T2} en la segunda ecuación se obtiene que F_{T1} = 346 N y por lo tanto F_{T2} = 346 N también.

Aislemos ahora el nudo *B* como objeto de estudio. El diagrama de cuerpo libre correspondiente se muestra en la Fig. 4-4*c*. Anteriormente ya se ha determinado que F_{T2} = 346 N o 0.35 kN y, en consecuencia, las ecuaciones de equilibrio son:

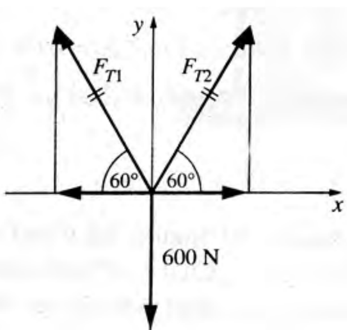
$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0 \qquad \text{o} \qquad F_{T3}\cos 20° - F_{T5} - 346\,\text{sen}\,30° = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \qquad \text{o} \qquad F_{T3}\,\text{sen}\,20° - 346\cos 30° = 0$$

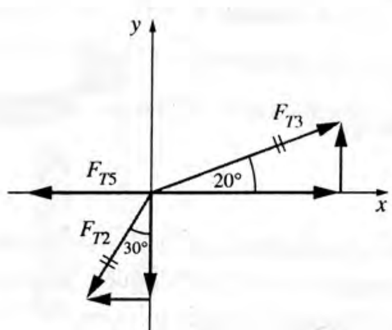
De la última ecuación tenemos F_{T3} = 877 N o 0.88 kN. Al sustituir este valor en la ecuación previa obtenemos F_{T5} = 651 N o 0.65 kN. Como se mencionó anteriormente, por simetría $F_{T4} = F_{T3}$ = 877 N o 0.88 kN. ¿Cómo podría determinar el valor de F_{T4} sin el recurso de simetría? (*Sugerencia:* Vea la Fig. 4-4*d*.)



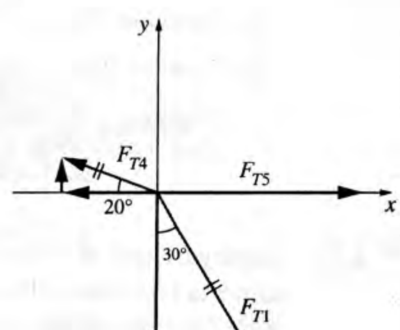
a)



b)



c)



d)

Fig. 4-4

4.5 Los objetos de la Fig. 4-5 están en equilibrio. Determine el valor de la fuerza normal F_N en cada caso.

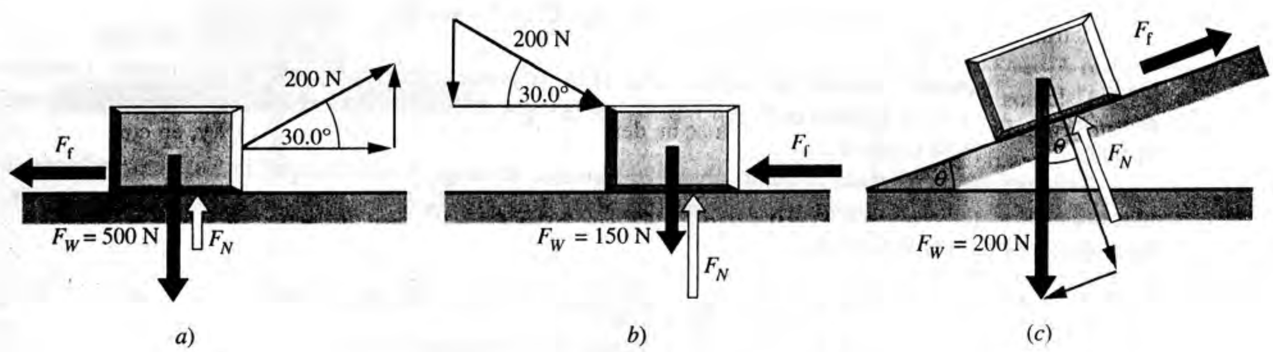


Fig. 4-5

Aplicando en cada caso $\Sigma F_y = 0$.

a)	$F_N + (200\text{ N})\text{ sen }30.0° - 500 = 0$	de donde	$F_N = 400$ N
b)	$F_N - (200\text{ N})\text{ sen }30.0° - 150 = 0$	de donde	$F_N = 250$ N
c)	$F_N - (200\text{ N})\cos\theta = 0$	de donde	$F_N = (200\cos\theta)$ N

4.6 Para las situaciones del problema 4.5, determinar el coeficiente de fricción cinético, si el objeto se está moviendo con rapidez constante; es decir, cada objeto está en equilibrio traslacional.

Ya hemos encontrado la fuerza normal F_N para cada caso del problema 4.5. Para calcular el valor de la fuerza de fricción F_f, de posición al deslizamiento, usaremos $\Sigma F_x = 0$. Posteriormente usaremos la definición de μ_c.

a) Tenemos: $200\cos 30.0° - F_f = 0$ entonces $F_f = 173$ N. Por lo tanto $\mu_c = F_f/F_N = 173/400 = 0.43$.

b) Tenemos $200\cos 30.0° - F_f = 0$ entonces $F_f = 173$ N. Por lo tanto $\mu_c = F_f/F_N = 173/250 = 0.69$.

c) Tenemos $-200\text{ sen }\theta + F_f = 0$ entonces $F_f = (200\text{ sen }\theta)$ N. Por lo tanto $\mu_c = F_f/F_N = (200\text{ sen }\theta)/(200\cos\theta) = \tan\theta$.

4.7 Supóngase que el bloque que se encuentra en la Fig. 4-5*c* está en reposo. El ángulo del plano se aumenta lentamente. Para el ángulo $\theta = 42°$, el bloque comienza a deslizarse. ¿Cuál es el coeficiente de fricción estático entre el bloque y el plano inclinado? (El bloque y la superficie no son los mismos de los problemas 4.5 y 4.6.)

En el instante en que el bloque empieza a deslizarse, la fricción tiene su valor crítico. Por lo tanto $\mu_e = F_f/F_N$ en ese instante. Siguiendo el método de los problemas 4.5 y 4.6 tenemos que:

$$F_N = F_W \cos\theta \qquad \text{y} \qquad F_f = F_W \operatorname{sen}\theta$$

En consecuencia, cuando justamente se inicia el deslizamiento,

$$\mu_e = \frac{F_f}{F_N} = \frac{F_W \operatorname{sen}\theta}{F_W \cos\theta} = \tan\theta$$

Como θ se determinó experimentalmente, siendo su valor 42°, el coeficiente de fricción estático es: $\mu_e = \tan 42° = 0.90$.

4.8 Jalado por un bloque de 8.0 N como se muestra en la Fig. 4-6*a*, un bloque de 20 N se desliza hacia la derecha con velocidad constante. Calcular el μ_c entre el bloque y la mesa. Supóngase que la fricción en la polea es despreciable.

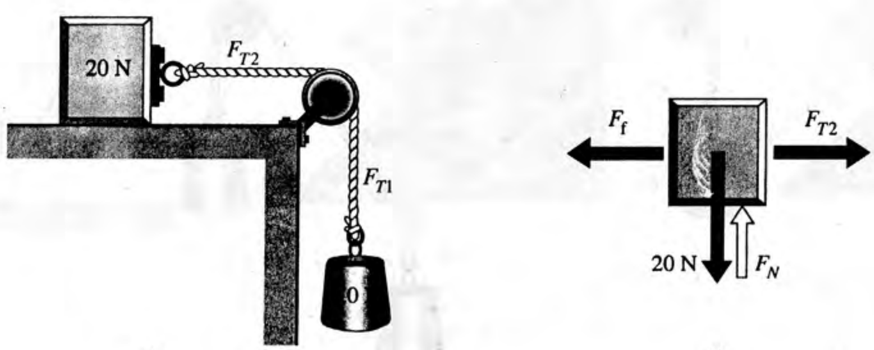
Dado que el bloque de 20 N se está moviendo con velocidad constante, éste se encuentra en equilibrio. Como la fricción en la polea es despreciable, la tensión en la cuerda continua es la misma en ambos lados de la polea. Por lo tanto $F_{T1} = F_{T2} = 8.0$ N.

Analizando el diagrama de cuerpo libre mostrado en la Fig. 4-6*b* y recordando que el bloque está en equilibrio, tenemos:

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 \qquad \text{o} \qquad F_f = F_{T2} = 8.0\ \text{N}$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \qquad \text{o} \qquad F_N = 20\ \text{N}$$

Así, de la definición de μ_c,

$$\mu_c = \frac{F_f}{F_N} = \frac{8.0\ \text{N}}{20\ \text{N}} = 0.40$$



a) *b*)

Fig. 4-6

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

4.9 Para la situación que se muestra en la Fig. 4-7, encuéntrense los valores de F_{T1} y F_{T2} si el peso del objeto es de 600 N. *Resp.* 503 N, 783 N

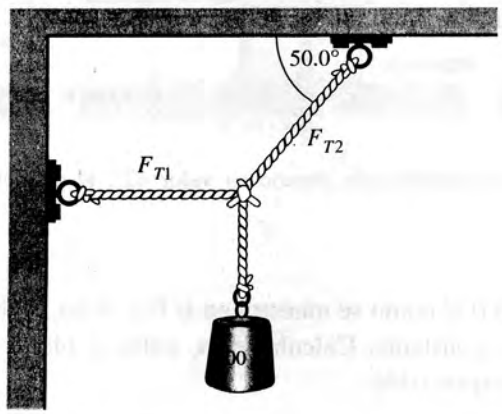


Fig. 4-7

4.10 Las siguientes fuerzas coplanares tiran de un anillo: 200 N a 30.0°, 500 N a 80.0°, 300 N a 240° y una fuerza desconocida. Determine la magnitud y la dirección de la fuerza desconocida si el anillo se halla en equilibrio. *Resp.* 350 N a 252°

4.11 En la Fig. 4-8 las poleas no presentan fuerza de fricción y el sistema cuelga en equilibrio. Si el peso de F_{W3} es de 200 N, ¿cuáles son los valores de F_{W1} y F_{W2}? *Resp.* 260 N, 150 N

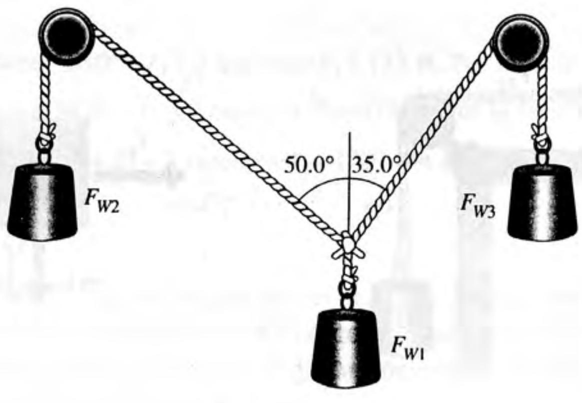


Fig. 4-8

4.12 Supóngase que F_{W1} en la Fig. 4-8 es de 500 N. Encuéntrense los valores de F_{W2} y F_{W3} si el sistema está colgando en equilibrio como se muestra en la figura. *Resp.* 288 N, 384 N

4.13 Si en la Fig. 4-9 la fricción entre el bloque y el plano inclinado es despreciable, ¿cuál debe ser el peso F_W si se quiere que el bloque de 200 N permanezca en reposo? *Resp.* 115 N

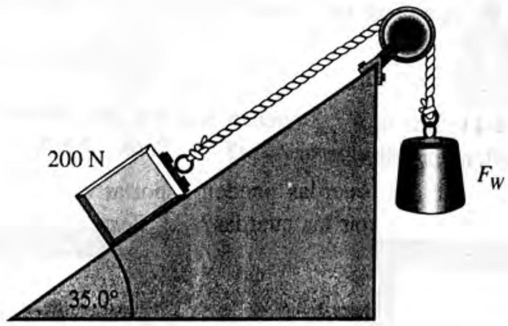


Fig. 4-9

4.14 El sistema que se muestra en la Fig. 4-9 permanece en reposo cuando $F_W = 220$ N. ¿Cuál es la magnitud y la dirección de la fuerza de fricción sobre el bloque de 200 N? *Resp.* 105 N hacia abajo sobre el plano inclinado

4.15 Encuéntrese la fuerza normal que actúa sobre el bloque en cada una de las situaciones de equilibrio mostradas en la Fig. 4-10. *Resp.* *a*) 34 N; *b*) 46 N; *c*) 91 N

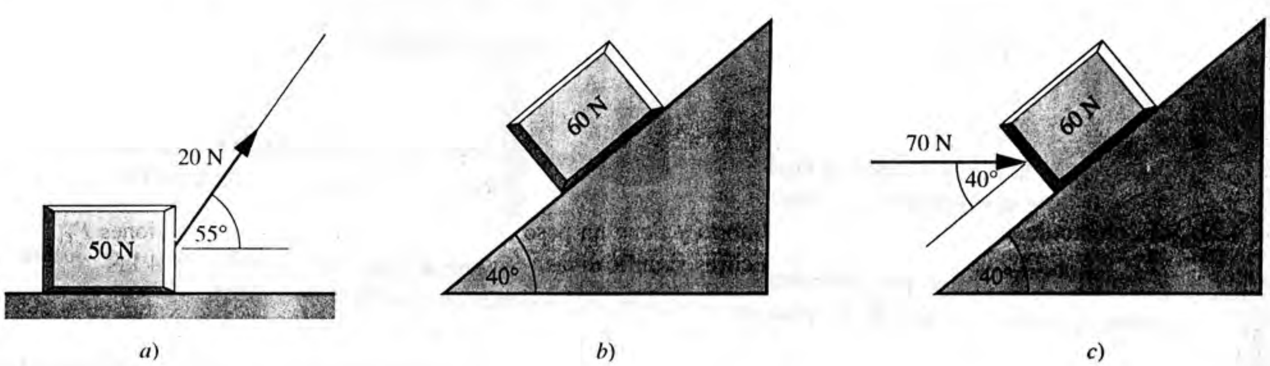


Fig. 4-10

4.16 El bloque que se muestra en la Fig. 4-10*a* se desliza con rapidez constante bajo la acción de la fuerza indicada. *a*) ¿Qué valor tiene la fuerza de fricción que se opone a su movimiento? *b*) ¿Cuál es el valor del coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el piso? *Resp.* *a*) 12 N; *b*) 0.34

4.17 El bloque que aparece en la Fig. 4-10*b* se desliza hacia abajo con rapidez constante sobre el plano inclinado. *a*) ¿De qué magnitud es la fuerza de fricción que se opone a su movimiento? *b*) ¿Cuál es el valor del coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano? *Resp.* *a*) 39 N; *b*) 0.84

4.18 El bloque de la Fig. 4-10*c* inicia su movimiento hacia arriba del plano inclinado cuando la fuerza de empuje indicada se ha incrementado hasta 70 N. *a*) ¿Cuál es la fuerza de fricción crítica sobre el bloque? *b*) ¿Cuál es el valor del coeficiente de fricción estático? *Resp.* *a*) 15 N; *b*) 0.17

4.19 Si $F_W = 40$ N en la situación de equilibrio indicada en la Fig. 4-11, determine F_{T1} y F_{T2}. *Resp.* 58 N, 31 N

4.20 Hágase referencia a la Fig. 4-11. Las cuerdas pueden soportar una tensión máxima de 80 N. ¿Cuál es el máximo valor de F_W que pueden soportar las cuerdas? *Resp.* 55 N

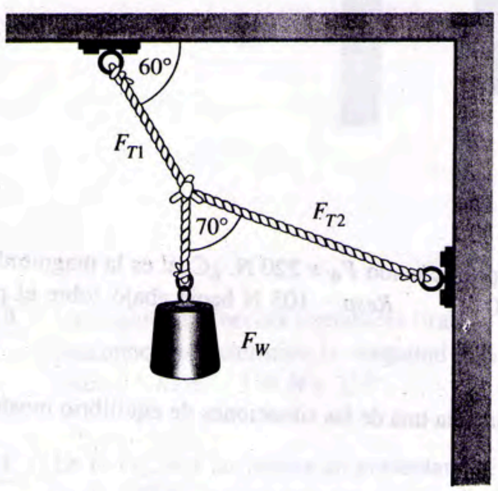


Fig. 4-11

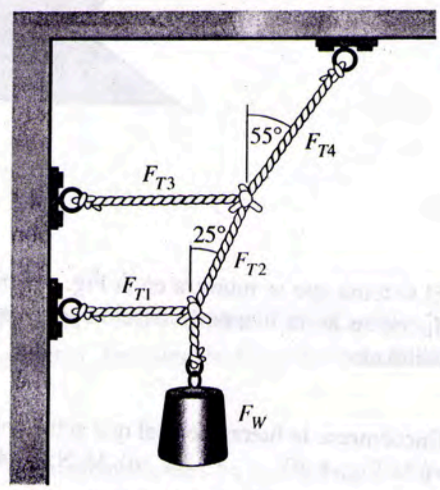


Fig. 4-12

4.21 El objeto de la Fig. 4-12 está en equilibrio y tiene un peso $F_W = 80$ N. Encuéntrense las tensiones F_{T1}, F_{T2}, F_{T3} y F_{T4}. Dé sus resultados con dos cifras significativas. *Resp.* 37 N, 88 N, 77 N, 0.14 kN

4.22 Supóngase que el peso y el rozamiento (fricción) de las poleas que se muestran en la Fig. 4-13 son despreciables. ¿Cuál es el valor de F_W para que el sistema permanezca en equilibrio? *Resp.* 185 N

4.23 El sistema de la Fig. 4-14 está en equilibrio. *a*) ¿Cuál es el máximo valor que puede tener F_W, si la fuerza de fricción sobre el bloque de 40 N no puede exceder de 12.0 N? *b*) ¿Cuál es el valor del coeficiente de fricción estático entre el bloque y la mesa? *Resp.* *a*) 6.9 N; *b*) 0.30

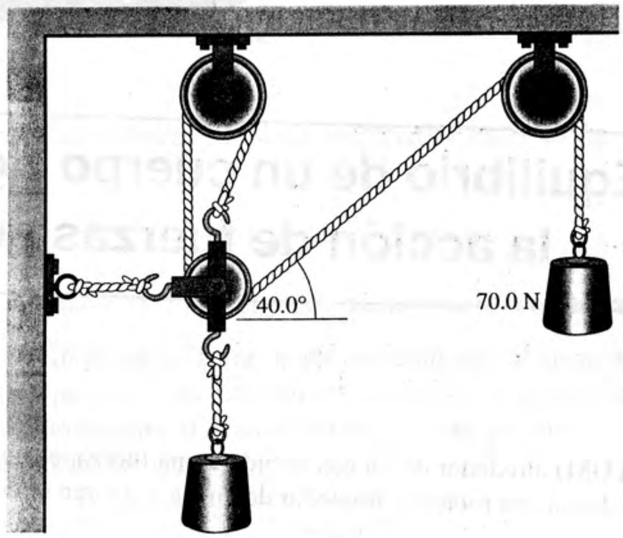


Fig. 4-13

4.24 El sistema de la Fig. 4-14 se encuentra próximo al límite de deslizamiento. Si $F_W = 8.0$ N, ¿cuál es el valor del coeficiente de fricción estático entre el bloque y la mesa? *Resp.* 0.35

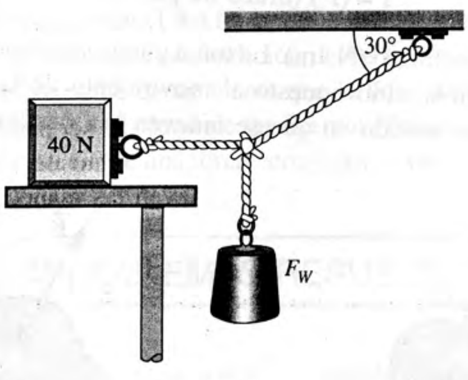


Fig. 4-14

capítulo 5

Equilibrio de un cuerpo rígido bajo la acción de fuerzas coplanares

LA TORCA (O MOMENTUM) alrededor de un eje, debida a una fuerza, es una medida de la efectividad de la fuerza para que ésta produzca una rotación alrededor de un eje. La torca se define de la siguiente forma:

$$\text{Torca} = \tau = rF \text{ sen } \theta$$

donde r es la distancia radial desde el eje al punto de aplicación de la fuerza y θ es el ángulo agudo entre las direcciones de $\vec{\mathbf{r}}$ y de $\vec{\mathbf{F}}$, como se muestra en la Fig. 5-1*a*. Con frecuencia esta definición se escribe en términos del *brazo de palanca* de la fuerza, que es la distancia perpendicular desde el eje a la línea de acción de la fuerza, como se muestra en la Fig. 5-1*b*. Como el brazo de palanca es igual a r sen θ la ecuación de la torca se reescribe como

$$\tau = (F) \text{ (brazo de palanca)}$$

Las unidades de la torca son newton-metro (N · m). La torca puede ser positiva o negativa; es positiva cuando la rotación alrededor del eje es en sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj y negativa cuando la rotación es en el mismo sentido en que se mueven las manecillas del reloj.

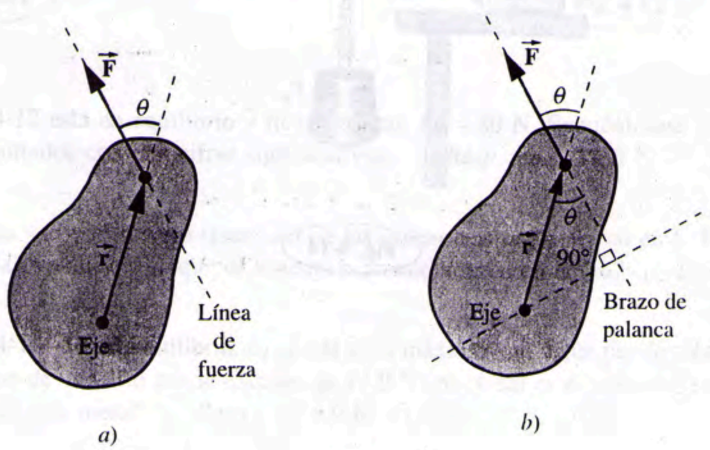


Fig. 5-1

LAS DOS CONDICIONES PARA EL EQUILIBRIO de un cuerpo rígido bajo la acción de *fuerzas coplanares* son:

1) La *primera* o *condición de la fuerza*: La suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo debe ser cero:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0$$

donde se ha tomado al plano xy como el plano de las fuerzas coplanares.

2) La *segunda* o *condición de la torca*: Tome un eje perpendicular al plano de las fuerzas coplanares. Todas las torcas que tienden a producir una rotación en el sentido del reloj considérelas como negativas, y las que producen una rotación contra el sentido del reloj, como positivas; la suma de todas las torcas que actúan sobre el objeto debe ser cero:

$$(+)\Sigma \tau = 0$$

EL CENTRO DE GRAVEDAD de un objeto es el punto en el cual se puede considerar que está concentrado todo su peso; esto es, la línea de acción del peso pasa por el centro de gravedad. Una sola fuerza vertical y dirigida hacia arriba, igual en magnitud al peso del objeto y aplicada en el centro de gravedad, mantendrá al cuerpo en equilibrio.

LA POSICIÓN DE LOS EJES ES ARBITRARIA: Si la suma de las torcas que actúan sobre un cuerpo es cero para un determinado eje y se cumple la condición de las fuerzas, ésta será cero para todo eje paralelo al primero. Generalmente se escoge el eje de tal forma que la línea de acción de la fuerza desconocida pase por la intersección del eje de rotación y el plano de las fuerzas. Entonces el ángulo θ entre $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$ es cero, de tal manera que la fuerza desconocida ejerce una torca cero y por lo tanto no aparece en la ecuación de la torca.

PROBLEMAS RESUELTOS

5.1 Calcule la torca alrededor del eje A en la Fig. 5-2 debida a cada una de las fuerzas que se muestran.

Al utilizar la ecuación $\tau = rF$ sen θ, recuerde que una torca en el sentido del reloj es negativa y las torcas contra reloj son positivas. La torca de cada una de las tres fuerzas es

Para 10 N: $\tau = -\,(0.80\text{ m})(10\text{ N})(\text{sen }90°) = -8.0\text{ N}\cdot\text{m}$

Para 25 N: $\tau = +\,(0.80\text{ m})(25\text{ N})(\text{sen }25°) = +\,8.5\text{ N}\cdot\text{m}$

Para 20 N: $\tau = \pm\,(0.80\text{ m})(20\text{ N})(\text{sen }0°) = 0$

La línea de acción de la fuerza de 20 N pasa por el eje y por lo tanto $\theta = 0°$. Expresándolo de otra forma, si la línea de acción de la fuerza pasa por el eje, entonces su brazo de palanca es cero. De cualquier forma, la torca es cero para esta (y cualquier otra) fuerza cuya línea de acción pase por el eje.

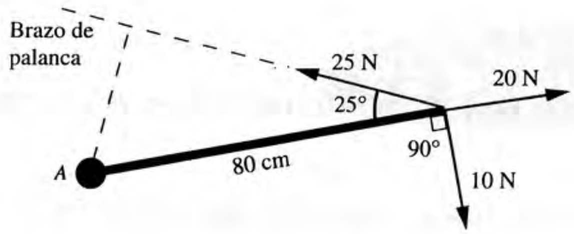


Fig. 5-2

5.2 Una viga uniforme de longitud L pesa 200 N y sostiene un objeto de 450 N como se muestra en la Fig. 5-3. Calcular la magnitud de las fuerzas que ejercen sobre la viga las columnas de apoyo colocadas en los extremos. Suponga que las longitudes son exactas.

En lugar de dibujar por separado los diagramas de cuerpo libre, se muestran en la Fig. 5-3 las fuerzas que actúan sobre la viga. Como la viga es uniforme, el centro de gravedad se localiza en su centro geométrico. Por esta razón se muestra el peso de la viga (200 N) actuando sobre su centro. Las fuerzas F_1 y F_2 son las reacciones de las columnas de apoyo sobre la viga. Como no existen fuerzas en la dirección x que actúen sobre la viga, solamente hay que escribir dos ecuaciones para esta condición de equilibrio: $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma \tau = 0$.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \qquad \text{se convierte en} \qquad F_1 + F_2 - 200\ \text{N} - 450\ \text{N} = 0$$

Antes de escribir la ecuación de la torca, se debe escoger un eje. Se ha escogido en el punto A, de tal forma que la fuerza desconocida F_1 pase por éste y no ejerza torca alguna. Entonces la ecuación de la torca es

$$(+)\Sigma \tau = -(L/2)(200\ \text{N})(\text{sen } 90°) - (3L/4)(450\ \text{N})(\text{sen } 90°) + LF_2 \text{ sen } 90° = 0$$

Dividiendo la ecuación entre L y resolviendo para F_2, se encuentra $F_2 = 438$ N.

Para calcular el valor de F_1, se sustituye el valor de F_2 en la ecuación de las fuerzas, obteniéndose $F_1 = 212$ N.

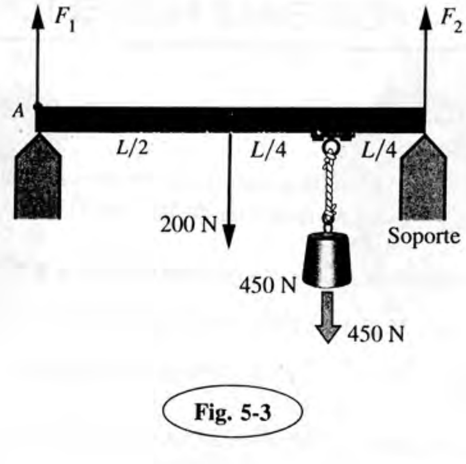


Fig. 5-3

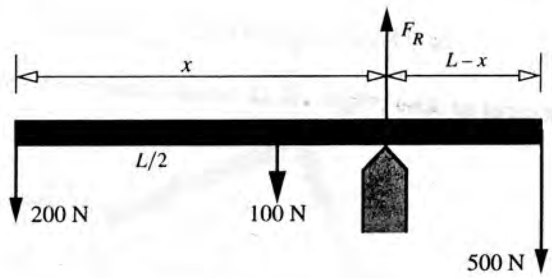


Fig. 5-4

5.3 Un tubo uniforme de 100 N se utiliza como palanca, como se muestra en la Fig. 5-4. ¿Dónde se debe colocar el fulcro (punto de apoyo) si un peso de 500 N colocado en un extremo se debe balancear con uno de 200 N colocado en el otro extremo? ¿Qué carga debe soportar el apoyo?

En la Fig. 5-4 se muestran las fuerzas, donde F_R es la fuerza que ejerce el apoyo sobre el tubo. Suponga que el punto de apoyo se encuentra a una distancia x de uno de los extremos. Considere que el eje se encuentra en el punto de apoyo. Entonces la ecuación de la torca, $(+)\Sigma\, \tau = 0$, se escribe como

$$+(x)(200\text{ N})(\text{sen } 90°) + (x - L/2)(100\text{ N})(\text{sen } 90°) - (L - x)(500\text{ N})(\text{sen } 90°) = 0$$

Simplificando

$$(800\text{ N})(x) = (550\text{ N})(L)$$

de donde $x = 0.69L$. El punto de apoyo se debe colocar a 0.69 del extremo donde se encuentra la carga más ligera.

La carga F_R que soporta el apoyo, se encuentra con la ecuación $+\uparrow \Sigma\, F_y = 0$, obteniéndose

$$-\,200\text{ N} - 100\text{ N} - 500\text{ N} = 0$$

de donde $F_R = 800$ N.

5.4 ¿En qué punto de una pértiga de 100 N se debe colgar un objeto de 0.80 kN, de tal forma que una niña, colocada en uno de los extremos, sostenga un tercio de lo que soporta una mujer colocada en el otro extremo?

En la Fig. 5-5 se muestra un esquema de las fuerzas. La fuerza que ejerce la niña se denota por F, y la de la mujer por $3F$. Tome el eje de giro en el extremo izquierdo. Con esta suposición, la ecuación de la torca es

$$-\,(x)(800\text{ N})(\text{sen } 90°) - (L/2)(100\text{ N})(\text{sen } 90°) + (L)(F)(\text{sen } 90°) = 0$$

La segunda ecuación que se puede escribir es $\Sigma\, F_y = 0$, o bien

$$3F - 800\text{ N} - 100\text{ N} + F = 0$$

de donde $F = 225$ N. Sustituyendo este valor en la ecuación de la torca se obtiene

$$(800 \text{ N})(x) = (225 \text{ N})(L) - (100 \text{ N})(L/2)$$

para la cual $x = 0.22L$. La carga se debe colgar a 0.22 medido desde el extremo donde se encuentra parada la mujer.

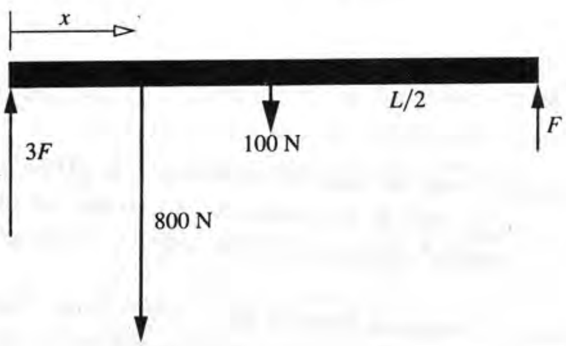


Fig. 5-5

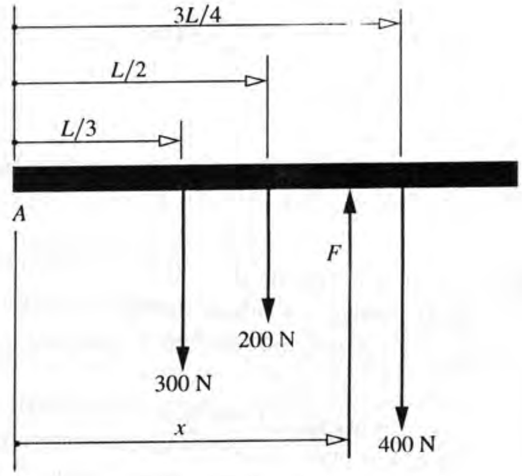


Fig. 5-6

5.5 En un tablón uniforme de 0.20 kN y longitud L se cuelgan dos objetos: 300 N a $L/3$ de un extremo, y 400 N a $3L/4$ a partir del mismo extremo. ¿Qué otra fuerza debe aplicarse para que el tablón se mantenga en equilibrio?

En la Fig. 5-6 se muestran las fuerzas que actúan sobre el tablón, donde F es la fuerza que se desea encontrar. $\Sigma F_y = 0$ es la condición de equilibrio, por tanto,

$$F = 400 \text{ N} + 200 \text{ N} + 300 \text{ N} = 900 \text{ N}$$

Como el tablón debe estar en equilibrio, se está en libertad de escoger el eje de rotación en cualquier punto. Sea éste el punto A. Entonces $\Sigma \tau = 0$ da:

$$+(x)(F)(\text{sen } 90°) - (3L/4)(400 \text{ N})(\text{sen } 90°) - (L/2)(200 \text{ N})(\text{sen } 90°) - (L/3)(300 \text{ N})(\text{sen } 90°) = 0$$

Utilizando $F = 900$ N, se determina que $x = 0.56L$. La fuerza requerida es de 0.90 kN hacia arriba a $0.56L$ del extremo izquierdo.

5.6 La escuadra (regla de ángulo recto) que se muestra en la Fig. 5-7 cuelga en reposo de una clavija. Está fabricada con una hoja de metal uniforme. Uno de los brazos tiene una longitud de L cm y el otro tiene $2L$ cm de longitud. Calcular (con dos cifras significativas) el ángulo θ que forma cuando está colgada.

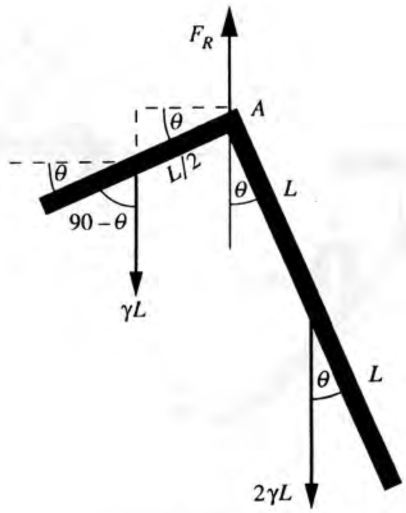


Fig. 5-7

Si la escuadra no es muy ancha, se puede considerar que está formada por dos barras delgadas de longitudes L y $2L$, unidas perpendicularmente en el punto A. Sea γ el peso de cada centímetro de la escuadra. En la Fig. 5-7 se indican las fuerzas que actúan sobre la escuadra, donde F_R es la fuerza de reacción de la clavija.

Considere el punto A como eje para escribir la ecuación de la torca. Ya que $\tau = rF$ sen θ y como la torca en A debida a F_R es cero, la ecuación de la torca queda como sigue

$$+(L/2)(\gamma L)[\text{sen}\,(90° - \theta)] - (L)(2\gamma L)(\text{sen}\,\theta) = 0$$

Recuerde que sen $(90° - \theta) = \cos\theta$. Después de sustituir y dividir entre $2\gamma L^2 \cos\theta$, se obtiene

$$\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = \frac{1}{4}$$

y da como resultado $\theta = 14°$.

5.7 Examine el diagrama que se muestra en la Fig. 5-8*a*. La viga uniforme de 0.60 kN está sujeta a un gozne en el punto P. Calcule la tensión en la cuerda y las componentes de la fuerza que ejerce el gozne sobre la viga. Dé sus resultados con dos cifras significativas.

Las fuerzas sobre la viga se indican en la Fig. 5-8*b*, donde la fuerza ejercida por el gozne está representada por sus componentes, F_{RH} y F_{RV}. La ecuación de la torca tomando P como eje es

$$+(3L/4)(T)(\text{sen}\,40°) - (L)(800\text{ N})(\text{sen}\,90°) - (L/2)(600\text{ N})(\text{sen}\,90°) = 0$$

(Se ha tomado el eje en P ya que F_{RH} y F_{RV} no aparecen en la ecuación de la torca.) Resolviendo esta ecuación se obtiene $F_T = 2280$ N o bien, con dos cifras significativas, $F_T = 2.3$ kN.

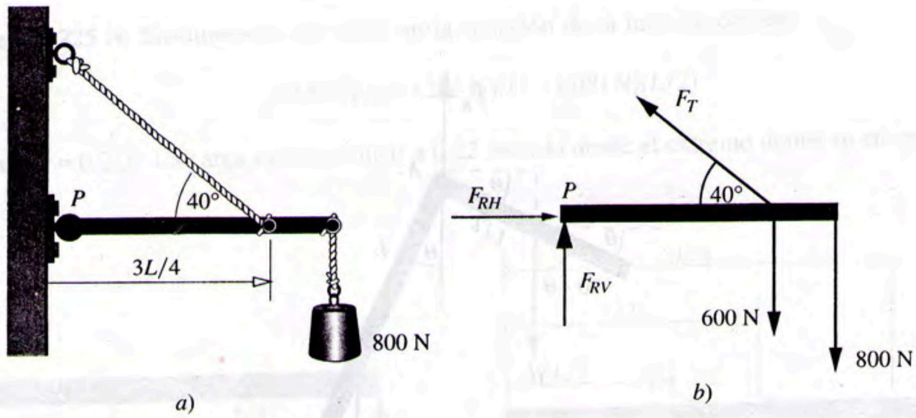


Fig. 5-8

F_{RH} y F_{RV} se calculan con las siguientes ecuaciones

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0 \qquad \text{o} \qquad -F_T \cos 40° + F_{RH} = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \qquad \text{o} \qquad F_T \operatorname{sen} 40° + F_{RV} - 600 - 800 = 0$$

Como se conoce F_T, estas ecuaciones dan $F_{RH} = 1750$ N o 1.8 kN y $F_{RV} = 65.6$ N o 66 N.

5.8 Un asta de densidad uniforme y 0.40 kN está suspendida como se muestra en la Fig. 5-9*a*. Calcular la tensión en la cuerda y la fuerza que ejerce el pivote en *P* sobre el asta.

Las fuerzas que actúan sobre el asta se muestran en la Fig. 5-9*b*. Tomar el pivote como eje. La ecuación de la torca es la siguiente

$$+(3L/4)(F_T)(\operatorname{sen} 50°) - (L/2)(400\text{ N})(\operatorname{sen} 40°) - (L)(2000\text{ N})(\operatorname{sen} 40°) = 0$$

de donde $F_T = 2460$ N o 2.5 kN. Escribimos:

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0 \qquad \text{o} \qquad F_{RH} - F_T = 0$$

por tanto $F_{RH} = 2.5$ kN. También

$$\Sigma F_y = 0 \qquad \text{o} \qquad F_{RV} - 2000\text{ N} - 400\text{ N} = 0$$

entonces $F_{RV} = 2.4$ kN. F_{RH} y F_{RV} son las componentes de la fuerza en el pivote. La magnitud de esta fuerza es

$$\sqrt{(2400)^2 + (2460)^2} = 3.4\text{ kN}$$

La tangente del ángulo que forma con la horizontal es tan $\theta = 2400/2460$, de donde $\theta = 44°$.

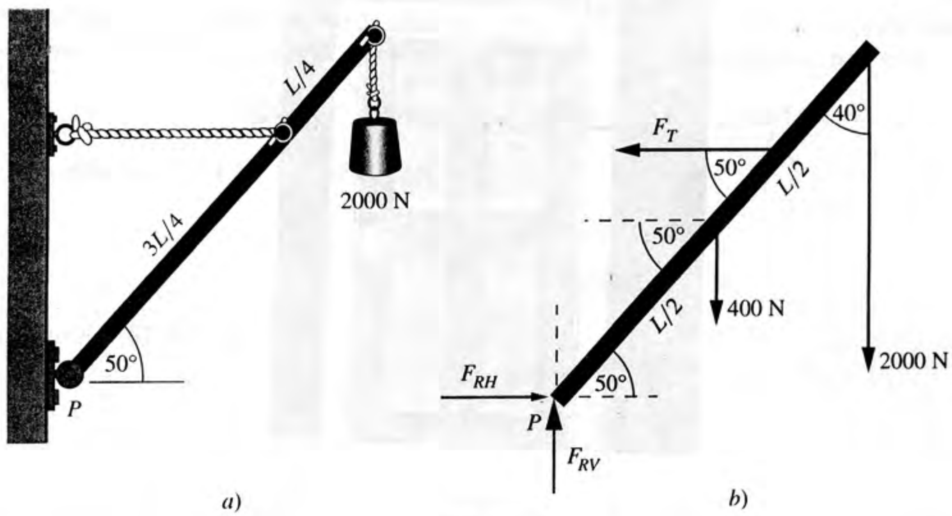


Fig. 5-9

5.9 En la Fig. 5-10, las bisagras A y B mantienen una puerta de 400 N en su lugar. La bisagra superior sostiene todo el peso de la puerta. Calcular las fuerzas ejercidas en las bisagras sobre la puerta. El ancho de la puerta es $h/2$, donde h es la separación entre las bisagras.

Las fuerzas que actúan sobre la puerta se muestran en la Fig. 5-10. Sólo una fuerza horizontal actúa en B, ya que se ha supuesto que la bisagra superior sostiene todo el peso de la puerta. Tome las torcas considerando el punto A como eje.

$$(+)\Sigma\,\tau = 0 \qquad \text{se convierte en} \qquad +(h)(F)(\text{sen } 90.0°) - (h/4)(400\text{ N})(\text{sen } 90.0°) = 0$$

de donde $F = 100$ N. También

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma\,F_x = 0 \qquad \text{o} \qquad F_T - F_{RH} = 0$$

$$+\uparrow\Sigma\,F_y = 0 \qquad \text{o} \qquad F_{RV} - 400\text{ N} = 0$$

De estas ecuaciones se calcula $F_{RH} = 100$ N y $F_{RV} = 400$ N.

Para la fuerza resultante en F_R en la bisagra A, se tiene

$$F_R = \sqrt{(400)^2 + (100)^2} = 412\text{ N}$$

La tangente del ángulo que $\vec{\mathbf{F}}_R$ forma con la dirección negativa del eje x es F_{RV}/F_{RH} y, por lo mismo, el ángulo es

$$\arctan 4.00 = 76.0°$$

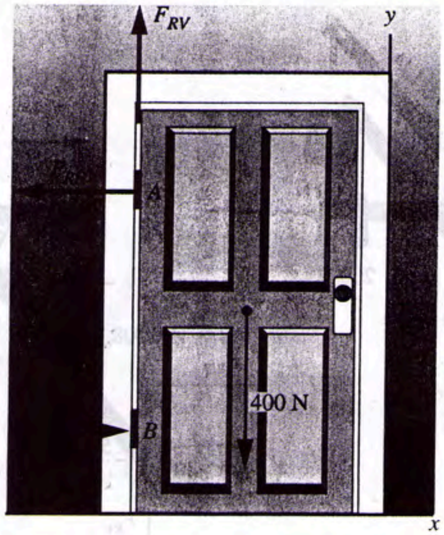


Fig. 5-10

5.10 Una escalera se recarga contra una pared lisa, como se muestra en la Fig. 5-11. (Por una pared "lisa", se debe entender que la fuerza ejercida por la pared sobre la escalera es perpendicular a la pared. No existe fuerza de fricción.) La escalera pesa 200 N y su centro de gravedad está a 0.40L medido desde el pie y a lo largo de la escalera, L es la longitud de la escalera. *a*) ¿Cuál debe ser la magnitud de la fuerza de fricción al pie de la escalera para que ésta no resbale? *b*) ¿Cuál es el coeficiente de fricción estático?

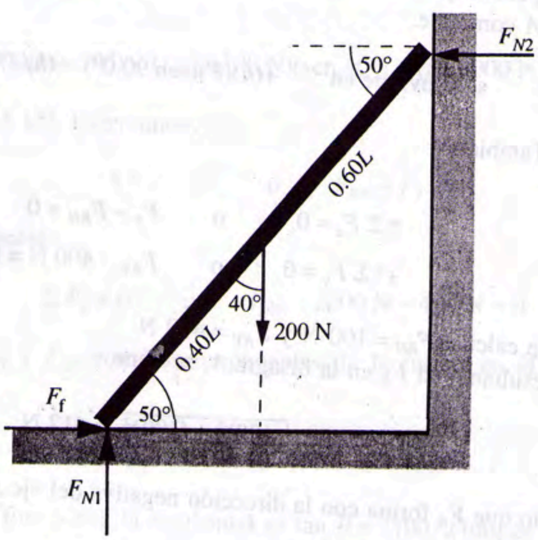


Fig. 5-11

a) Se desea encontrar la fuerza de fricción F_f. Note que no existe fuerza de fricción entre la escalera y la pared. Tomando las torcas alrededor del punto A se obtiene la ecuación de torcas

$$\circlearrowleft + \Sigma\, t_A = -(0.40L)(200 \text{ N})(\text{sen } 40°) + (L)(F_{N2})(\text{sen } 50°) = 0$$

Resolviendo $F_{N2} = 67.1$ N. También se puede escribir

$$\Sigma F_x = 0 \quad \text{o} \quad F_f - F_{N2} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{o} \quad F_{N1} - 200 = 0$$

por tanto $F_f = 67$ N y $F_{N1} = 0.20$ kN.

b)
$$\mu_e = \frac{F_f}{F_{N1}} = \frac{67.1}{200} = 0.34$$

5.11 **Para el diagrama de la Fig.5-12*a*, calcular F_{T1}, F_{T2} y F_{T3}. El poste tiene una densidad uniforme y pesa 800 N.**

En primer término aplique la condición de fuerza en equilibrio al punto A. En la Fig. 5-12*b* se muestra el diagrama de cuerpo libre. Se tiene

$$F_{T2} \cos 50.0° - 2000 \text{ N} = 0 \qquad \text{y} \qquad F_{T1} - F_{T2} \text{ sen } 50.0° = 0$$

De la primera ecuación se encuentra $F_{T2} = 3.11$ kN; sustituyendo en la segunda ecuación $F_{T1} = 2.38$ kN.

Aísle el poste y aplique las condiciones de equilibrio. En la Fig. 5-12*c* se muestra el cuerpo libre. La ecuación de la torca, para las torcas alrededor del punto C, es

$$\circlearrowleft + \Sigma\, \tau_c = +(L)(F_{T3})(\text{sen } 20.0°) - (L)(3110 \text{ N})(\text{sen } 90.0°) - (L/2)(800 \text{ N})(\text{sen } 40.0°) = 0$$

Resolviendo para F_{T3}, se encuentra que tiene una magnitud de 9.84 kN. Si fuera necesario se puede calcular F_{RH} y F_{RV} utilizando las ecuaciones en x y y de la fuerza.

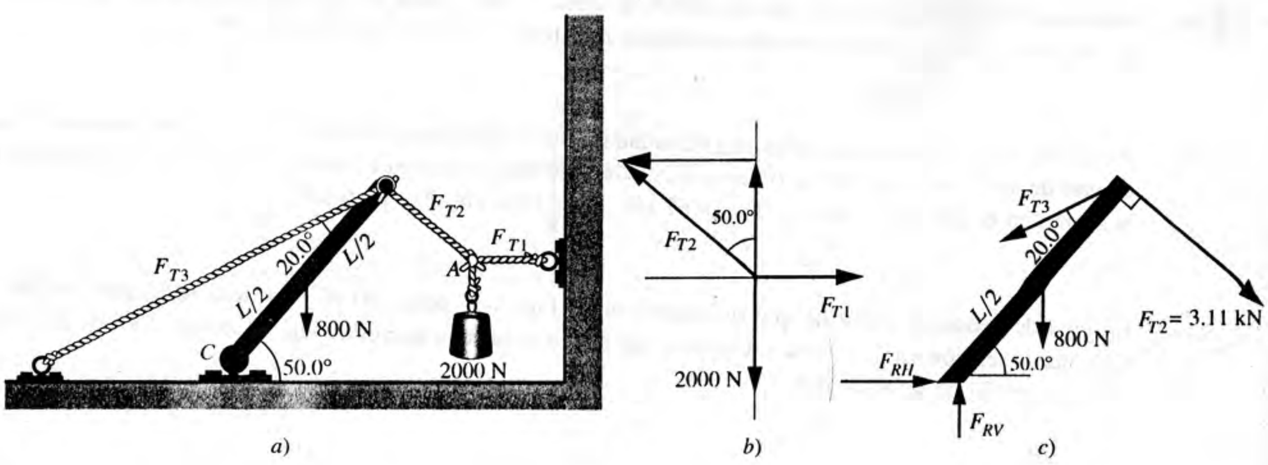


Fig. 5-12

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

5.12 Como se muestra en la Fig. 5-13, dos personas están sentadas en un automóvil que pesa 8000 N. La persona en el frente pesa 700 N, y la que se encuentra en la parte posterior pesa 900 N. Sea L la separación entre las llantas delanteras y las traseras. El centro de gravedad se localiza a una distancia de $0.400L$ detrás de las llantas delanteras. ¿Qué fuerza soporta cada una de las llantas delanteras y cada una de las traseras si las personas están sentadas sobre la línea central del automóvil? *Resp.* 2.09 kN, 2.71 kN

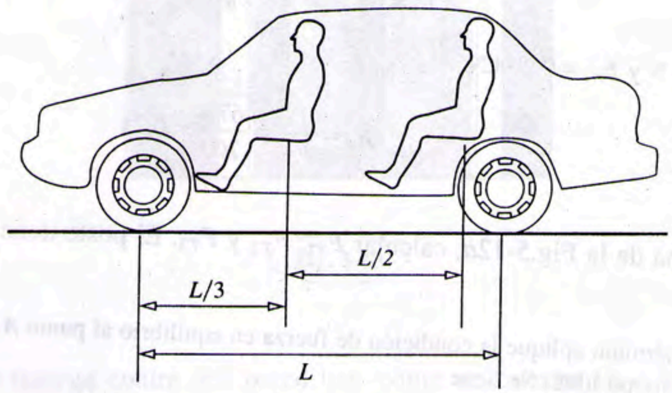


Fig. 5-13

5.13 Dos personas sostienen de los extremos una viga de densidad uniforme que pesa 400 N. Si la viga forma un ángulo de 25.0° con la horizontal, ¿qué fuerza vertical debe aplicar a la viga cada persona? *Resp.* 200 N

5.14 Repetir el problema 5.13 si un niño de 140 N se sienta sobre la viga en un punto localizado a un cuarto de la longitud de la viga, medido desde el extremo más bajo. *Resp.* 235 N, 305 N

5.15 En la Fig. 5-14 se muestra un polín, con densidad uniforme, que pesa 1600 N. El polín está sujeto de un gozne en uno de sus extremos y del otro tira una cuerda. Calcular la tensión F_T en la cuerda y las componentes de la fuerza en el gozne. *Resp.* $F_T = 0.67$ kN, $F_{RH} = 0.67$ kN, $F_{RV} = 1.6$ kN

5.16 La viga de densidad uniforme que se muestra en la Fig. 5-15 pesa 500 N y sostiene una carga de 700 N. Calcular la tensión en la cuerda y la fuerza que ejerce la bisagra sobre la viga. *Resp.* 2.9 kN, 2.0 kN, a 35° por debajo de la horizontal

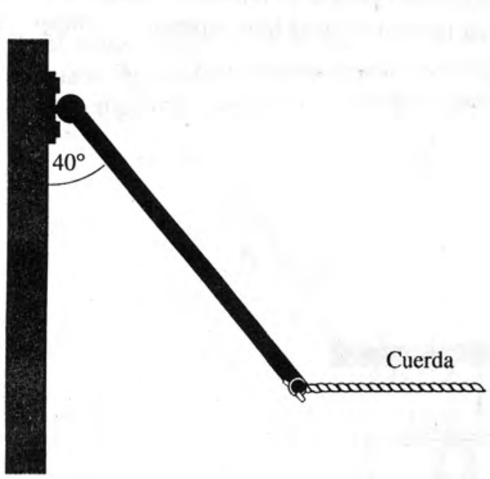


Fig. 5-14

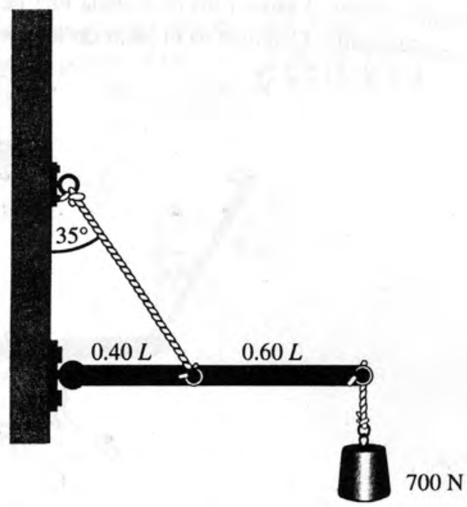


Fig. 5-15

P=39,2

5.17 El brazo que se muestra en la figura 5-16 sostiene una esfera de 4.0 kg. La masa de la mano y del antebrazo juntos es de 3.0 kg y su peso actúa en un punto a 15 cm del codo. Determine la fuerza ejercida por el músculo bíceps. *Resp.* 0.13 kN

P=29,4N

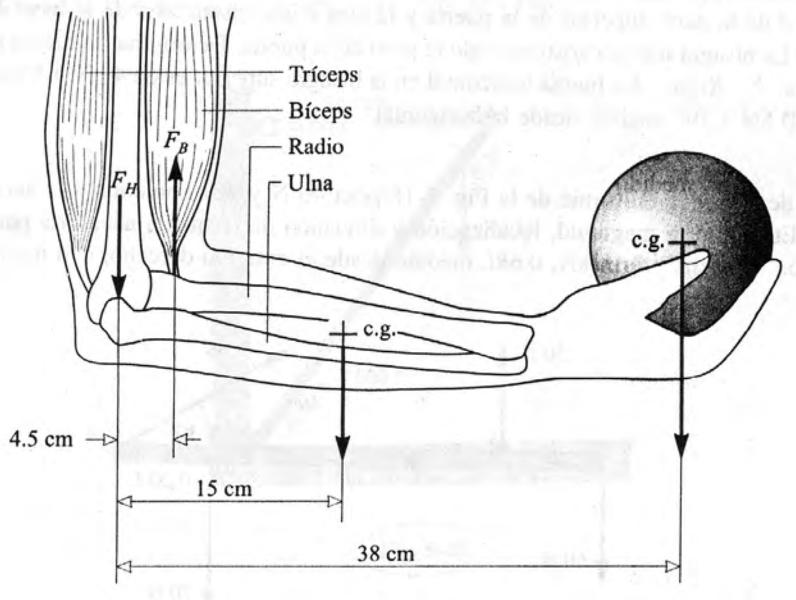


Fig. 5-16

5.18 El móvil de la Fig. 5-17 está colgado en equilibrio. Éste consiste de objetos suspendidos por hilos verticales. El objeto 3 pesa 1.40 N, y cada una de las barras horizontales pesa 0.50 N, siendo idénticas y de densidad constante. Calcular *a*) el peso de los objetos 1 y 2, y *b*) la tensión en el hilo superior. *Resp.* *a*) 1.5 N, 1.4 N; *b*) 5.3 N

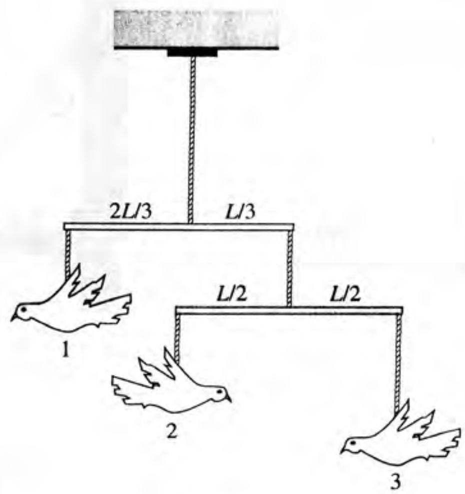


Fig. 5-17

5.19 Las bisagras de una puerta uniforme que pesa 200 N están separadas 2.5 m. Una bisagra se encuentra a una distancia *d* de la parte superior de la puerta y la otra a una distancia *d* de la base. La puerta tiene un ancho de 1.0 m. La bisagra inferior sostiene todo el peso de la puerta. Determinar la fuerza que cada bisagra le aplica a la puerta. *Resp.* La fuerza horizontal en la bisagra superior es de 40 N. La fuerza en la bisagra inferior es de 0.20 kN a 79° medido desde la horizontal

5.20 La trabe de densidad uniforme de la Fig. 5-18 pesa 40 N y está sometida a la acción de las fuerzas que se indican. Encontrar la magnitud, localización y dirección de la fuerza necesaria para mantener a la trabe en equilibrio. *Resp.* 0.11 kN, 0.68*L* medido desde el extremo derecho, con un ángulo de 49°

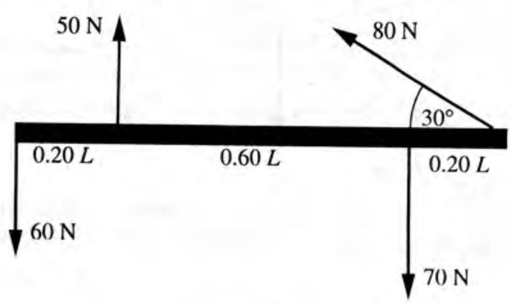


Fig. 5-18

5.21 El tablón uniforme de la Fig. 5-19 de peso 120 N está suspendido por dos cuerdas, como se muestra. A un cuarto de longitud, medido desde el extremo izquierdo, se suspende un objeto de 0.40 kN. Encontrar F_{T1}, F_{T2} y el ángulo θ que forma la cuerda izquierda con la vertical. *Resp.* 0.19 kN, 0.37 kN, 14°

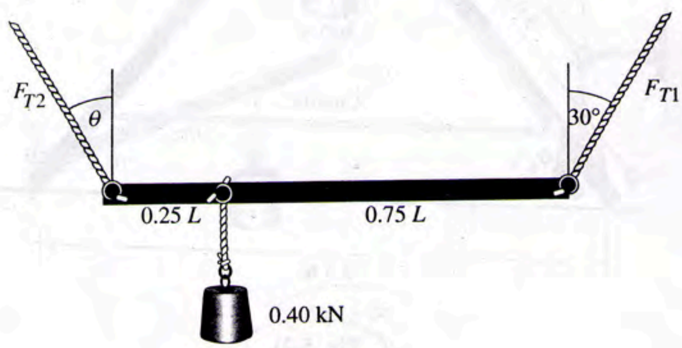


Fig. 5-19

5.22 El pie de una escalera descansa contra una pared, y su parte superior está detenida por una cuerda, como se indica en la Fig. 5-20. La escalera pesa 100 N y el centro de gravedad se localiza a 0.40 de su longitud medido desde el pie de la escalera. Un niño de 150 N se cuelga de un cable que se encuentra a 0.20 de la longitud de la escalera medida desde el extremo superior. Calcular la tensión en la cuerda y las componentes de la fuerza en el pie de la escalera. *Resp.* $F_T = 0.12$ kN, $F_{RH} = 0.12$ kN, $F_{RV} = 0.25$ kN

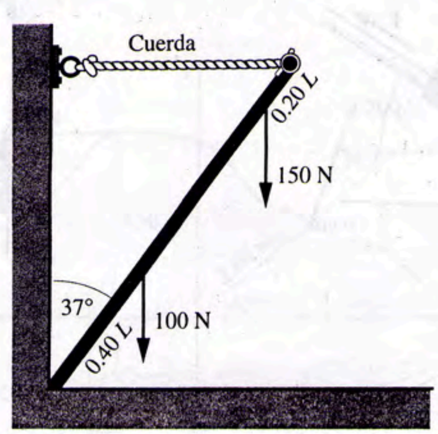


Fig. 5-20

5.23 El armazón de la Fig. 5-21 se construyó articulando dos vigas con un gozne, de densidad uniforme; cada una tiene un peso de 150 N. Éstas se mantienen unidas mediante una cuerda tensada y los pies del armazón descansan sobre un piso sin fricción. En el vértice se cuelga de una cuerda una carga de 500 N. Encontrar la tensión en la cuerda. *Resp.* 0.28 kN

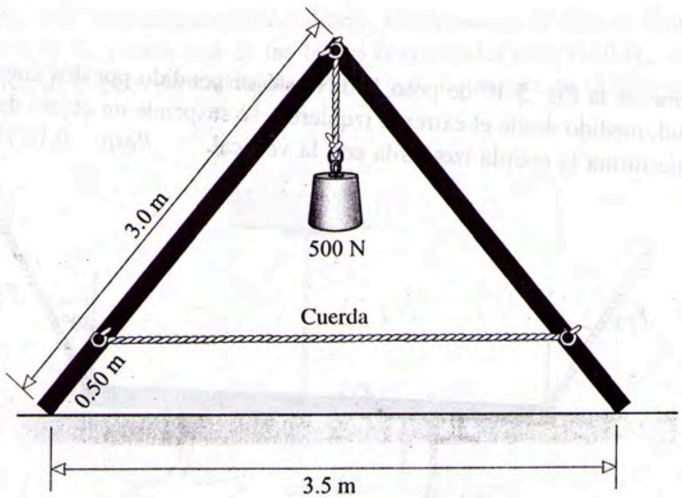


Fig. 5-21

5.24 Una cortadora de pasto de 900 N se jala para que suba un escalón de 5.0 cm de altura como se muestra en la Fig. 5-22. El radio del cilindro es de 25 cm. ¿Cuál es la fuerza mínima necesaria para subir la cortadora si el ángulo θ que forma el mango con la horizontal es *a*) 0° *b*) 30°? (*Sugerencia*: Encontrar la fuerza necesaria para que el cilindro se mantenga en equilibrio en la esquina del escalón.) *Resp.* *a*) 0.68 kN; *b*) 0.55 kN

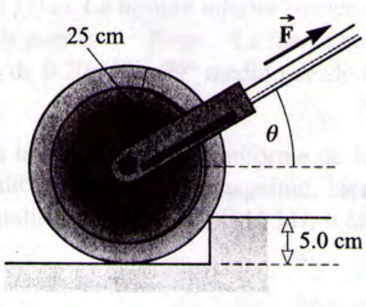


Fig. 5-22

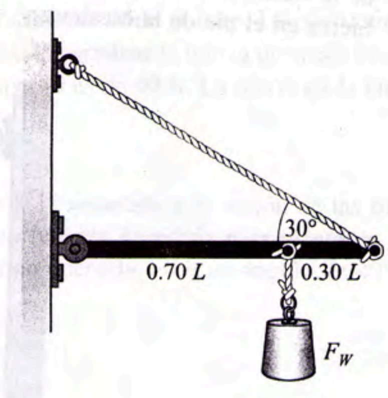


Fig. 5-23

5.25 En la Fig. 5-23, la viga de densidad uniforme pesa 500 N. Si la cuerda puede soportar una tensión de 1800 N, ¿cuál es el valor máximo de la carga F_W? *Resp.* 0.93 kN

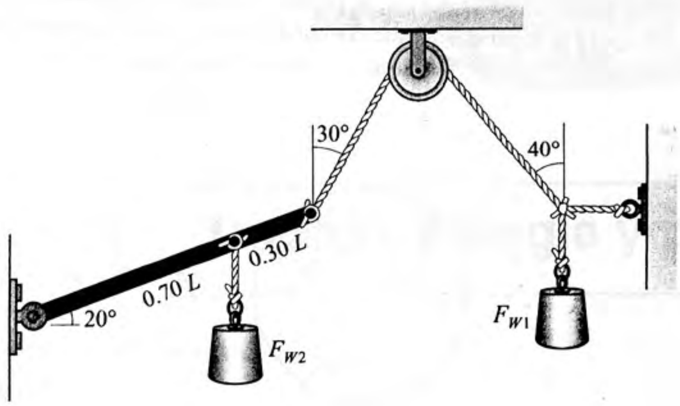


Fig. 5-24

5.26 La viga de la Fig. 5-24 tiene un peso despreciable. Si el sistema se encuentra en equilibrio cuando F_{W1} = 500 N, ¿cuál debe ser el valor de F_{W2}? *Resp.* 0.64 kN

5.27 Repetir el problema 5.26, en esta ocasión calcular F_{W1}, si F_{W2} tiene un valor de 500 N. La viga es uniforme y tiene un peso de 300 N. *Resp.* 0.56 kN

5.28 Un cuerpo se encuentra bajo la acción de las fuerzas que se muestran en la Fig. 5-25 ¿Qué fuerza, aplicada a lo largo del eje x, balanceará estas fuerzas? (En primer término encuentre las componentes, y después calcule la fuerza.) ¿En qué punto del eje x se debe aplicar la fuerza? *Resp.* $F_x = 232$ N, $F_y = -338$ N; $F = 410$ N a $-55.5°$, y en $x = 2.14$ m

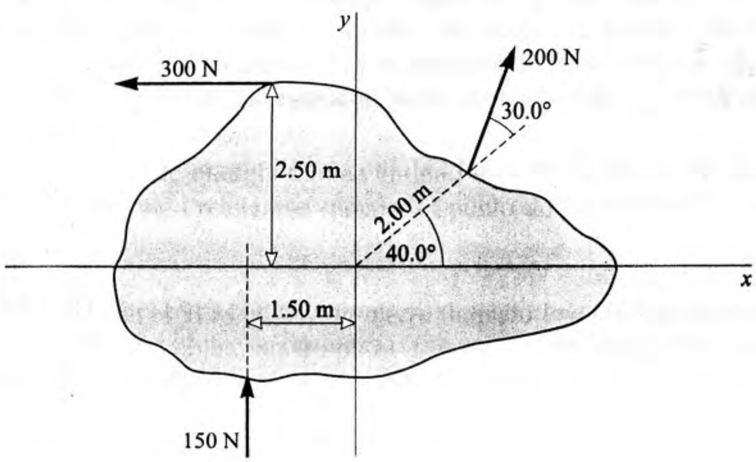


Fig. 5-25

5.29 El disco sólido de densidad uniforme y radio b de la Fig. 5-26 puede girar libremente alrededor del eje que pasa por su centro. A una distancia r del eje, se perfora un agujero de diámetro D. El peso del material extraído es F_{Wh}. Calcular el peso F_W de un objeto que cuelga de un hilo enrollado en el disco para que éste se mantenga en equilibrio en la posición que se muestra. *Resp.* $F_W = F_{Wh}(r/b)\cos\theta$

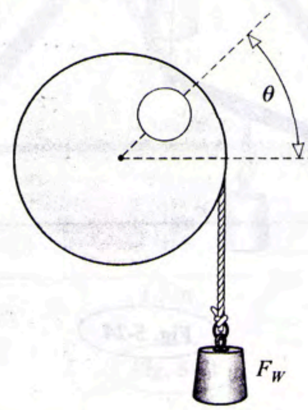


Fig. 5-26

capítulo 6

Trabajo, energía y potencia

EL TRABAJO efectuado por una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ se define como el producto de esa fuerza multiplicada por la distancia paralela sobre la cual actúa. Considérese el caso más sencillo del movimiento rectilíneo que se muestra en la Fig. 6-1, donde una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ actúa sobre un cuerpo y hace que éste experimente un desplazamiento vectorial $\vec{\mathbf{s}}$. La componente de $\vec{\mathbf{F}}$ en la dirección de $\vec{\mathbf{s}}$ es $F \cos \theta$. El trabajo W efectuado por la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ se define como el producto de la componente de $\vec{\mathbf{F}}$ en la dirección del desplazamiento, multiplicada por el desplazamiento:

$$W = (F \cos \theta)(s) = Fs \cos \theta$$

Nótese que θ es el ángulo entre la fuerza y el vector de desplazamiento. El trabajo es una cantidad escalar.

Si $\vec{\mathbf{F}}$ y $\vec{\mathbf{s}}$ están en la misma dirección y sentido, $\cos \theta = \cos 0° = 1$ y $W = Fs$. Sin embargo, si $\vec{\mathbf{F}}$ y $\vec{\mathbf{s}}$ tienen la misma dirección pero sentidos opuestos, entonces $\cos \theta = \cos 180° = -1$ y $W = -Fs$, y el trabajo es negativo. Fuerzas como la fricción a menudo disminuyen el movimiento de los cuerpos y su sentido es opuesto al desplazamiento. En tales casos efectúan un trabajo negativo. A causa de que la fuerza de fricción se opone al movimiento de un objeto, el trabajo realizado en vencer la fricción (a lo largo de cualquier trayectoria, curva o recta) es igual al producto de F_f y la longitud de la trayectoria recorrida. De este modo, si se arrastra un objeto contra la fricción, de regreso al punto donde se inició el recorrido, se realiza trabajo incluso si el desplazamiento neto es cero.

El trabajo es la transferencia de energía de una entidad hacia otra a través de la acción de una fuerza aplicada sobre una distancia. Si va a realizarse trabajo, el punto de aplicación de la fuerza debe moverse.

LA UNIDAD DE TRABAJO en el SI es el *newton-metro* llamado *joule* (J). Un joule es el trabajo realizado por una fuerza de 1 N cuando el objeto se desplaza 1 m en la dirección de la fuerza. Otras unidades frecuentemente utilizadas para el trabajo son: el *erg*, donde 1 erg = 10^{-7} J, y la *libra-pie* (lb · pie), donde 1 lb · pie = 1.355 J.

LA ENERGÍA de un cuerpo es su capacidad para efectuar un trabajo. Por consiguiente, la energía de un cuerpo se mide en función del trabajo que puede desarrollar. Así, cuando un objeto realiza un trabajo, la pérdida de energía del cuerpo es igual al trabajo efectuado. El trabajo y la energía tienen las mismas unidades, se miden en joules. La energía, al igual que el trabajo, es una cantidad escalar. Un objeto es capaz de realizar un trabajo si posee energía.

LA ENERGÍA CINÉTICA (EC) es la energía (o capacidad para realizar un trabajo) que posee un objeto debido a su movimiento. Si un objeto de masa *m* tiene velocidad υ, su energía cinética traslacional está dada por

$$EC = \tfrac{1}{2}\, m\upsilon^2$$

Cuando *m* está dada en kg y υ en m/s, las unidades de EC son joules.

LA ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL (EP_G) es la energía que posee un objeto debido a su posición en el campo gravitacional. Un cuerpo de masa *m,* al caer una distancia vertical *h*, puede realizar un trabajo de magnitud *mgh.* La EP_G de un objeto se define con respecto a un nivel arbitrario cero, el cual a menudo es la superficie de la Tierra. Si un objeto está a una altura *h* sobre el nivel cero (o de referencia), se tiene

$$EP_G = mgh$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. Adviértase que *mg* es el peso del objeto. Las unidades de la EP_G son los joules cuando *m* está dada en kg, *g* está en m/s^2 y *h* está en m.

TEOREMA DEL TRABAJO-ENERGÍA: Cuando se realiza trabajo sobre una masa puntual o sobre un cuerpo rígido y no hay cambio en la EP, la energía impartida sólo puede aparecer como EC. Sin embargo, debido a que un cuerpo no es por completo rígido, se puede transferir energía a sus partes y el trabajo realizado sobre él no será precisamente igual a su cambio en la EC.

CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA: La energía no se crea ni se destruye, sólo se transforma. (Esto implica que la masa puede considerarse como forma de energía. Por lo general, puede ignorarse la conversión de masa en energía y viceversa, prevista por la Teoría Especial de la Relatividad. Este tema se tratará en el capítulo 41.)

POTENCIA es la rapidez con que se realiza un trabajo.

$$\text{Potencia promedio} = \frac{\text{trabajo realizado por la fuerza}}{\text{tiempo necesario para realizarlo}} = \text{fuerza} \times \text{velocidad}$$

donde "velocidad" representa la componente de la velocidad del objeto, en dirección de la fuerza que se le aplica. En forma equivalente, podría tomarse el producto de la velocidad del objeto y la componente de la fuerza aplicada en la dirección de la velocidad. En el SI, la unidad de potencia es el *watt* (W), donde 1 W = 1 J/s.

Otra unidad de potencia que se emplea con frecuencia (pero no en nuestras ecuaciones básicas) es el *caballo de fuerza:* 1 hp = 746 W.

EL KILOWATT-HORA es una unidad de trabajo. Si una fuerza desarrolla un trabajo con una rapidez de 1 kilowatt (que equivale a 1000 J/s), entonces en una hora realizará 1 kW · h de trabajo:

$$1 \text{ kW} \cdot \text{h} = 3.6 \times 10^6 \text{ J} = 3.6 \text{ MJ}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

6.1 En la Fig. 6-1, se supone que el objeto se jala con una fuerza de 75 N en la dirección de 28° sobre la horizontal. ¿Cuánto trabajo desarrolla la fuerza al tirar del objeto 8.0 m?

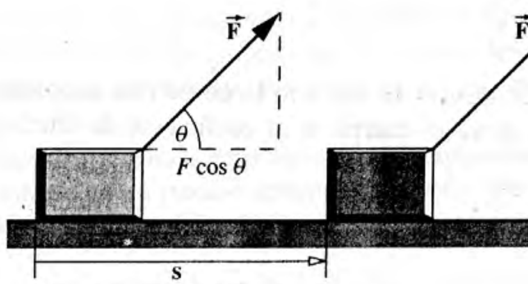


Fig. 6-1

El trabajo efectuado por la fuerza es igual al producto del desplazamiento, 8.0 m, por la componente de la fuerza que es paralela al desplazamiento, (75 N)(cos 28°). Entonces,

$$W = (75 \text{ N})(\cos 28°)(8.0 \text{ m}) = 0.53 \text{ kJ}$$

6.2 Un bloque se mueve hacia arriba por un plano inclinado 30° bajo la acción de las tres fuerzas mostradas en la Fig. 6-2. $\vec{F}_1$ es horizontal y de magnitud igual a 40 N. $\vec{F}_2$ es normal al plano y de magnitud igual a 20 N. $\vec{F}_3$ es paralela al plano y de magnitud igual a 30 N. Determínese el trabajo realizado por cada una de las fuerzas, cuando el bloque (y el punto de aplicación de cada fuerza) se mueve 80 cm hacia arriba del plano inclinado.

La componente de $\vec{F}_1$ a lo largo de la dirección del desplazamiento es

$$F_1 \cos 30° = (40 \text{ N})(0.866) = 34.6 \text{ N}$$

Por lo tanto, el trabajo desarrollado por $\vec{F}_1$ es (34.6 N)(0.80 m) = 28 J. (Nótese que la distancia debe expresarse en metros.)

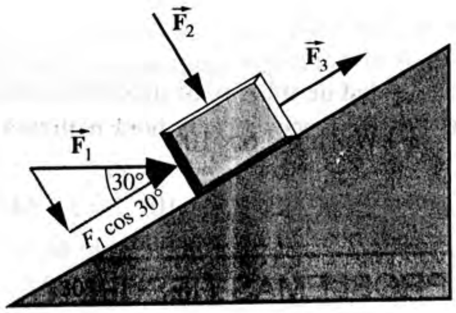


Fig. 6-2

Observe que $\vec{F}_2$ no desarrolla trabajo ya que no tiene componentes en la dirección del desplazamiento. La componente de $\vec{F}_3$ en dirección del desplazamiento es 30 N, por lo que el trabajo efectuado por $\vec{F}_3$ es (30 N)(0.80 m) = 24 J.

6.3 Un cuerpo de 300 g se desliza 80 cm a lo largo de una mesa horizontal. ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza de fricción sobre el cuerpo si el coeficiente de fricción entre la mesa y el cuerpo es de 0.20?

Primero calcularemos la fuerza de fricción. Ya que la fuerza normal es igual al peso del cuerpo,

$$F_f = \mu_c F_N = (0.20)(0.300\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) = 0.588\text{ N}$$

El trabajo realizado sobre el objeto por la fricción es $F_f s \cos\theta$. Dado que la fricción tiene sentido contrario al desplazamiento, $\theta = 180°$. De donde

$$\text{Trabajo} = F_f s \cos 180° = (0.588\text{ N})(0.80\text{ m})(-1) = -0.47\text{ J}$$

El trabajo es negativo porque la fricción frena al objeto; es decir, disminuye la energía cinética del objeto.

6.4 ¿Cuánto trabajo se realiza contra la gravedad al levantar un objeto de 3.0 kg a través de una distancia vertical de 40 cm?

Es necesaria una fuerza externa para levantar el objeto. Si el objeto se eleva con rapidez constante, la fuerza de elevación debe ser igual al peso del objeto. El trabajo realizado por la fuerza de elevación es el que hemos referido como el *trabajo hecho en contra de la gravedad*. Ya que la fuerza de elevación es mg, donde m es la masa del objeto, se tiene

$$\text{Trabajo} = (mg)(h)(\cos\theta) = (3.0\text{ kg} \times 9.81\text{ N})(0.40\text{ m})(1) = 12\text{ J}$$

En general, el trabajo realizado en contra de la gravedad al elevar un objeto de masa m a través de una distancia vertical h es igual a mgh.

6.5 ¿Cuánto trabajo se realizó sobre un objeto por la fuerza que soporta éste cuando se desplaza hacia abajo una distancia vertical h? ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza gravitacional sobre dicho objeto en el mismo proceso?

La fuerza de soporte es mg, donde m es la masa del objeto. Se encuentra dirigida hacia arriba mientras que el desplazamiento es hacia abajo. Entonces el trabajo realizado es

$$Fs \cos \theta = (mg)(h)(\cos 180°) = -mgh$$

La fuerza de gravedad que actúa sobre el objeto también es mg, pero está dirigida hacia abajo en el mismo sentido que el desplazamiento. El trabajo realizado por la fuerza de gravedad sobre el objeto es entonces

$$Fs \cos \theta = (mg)(h)(\cos 0°) = mgh$$

6.6 Una escalera de 3.0 m de longitud que pesa 200 N tiene su centro de gravedad a 120 cm del nivel inferior. En su parte más alta tiene un peso de 50 N. Calcúlese el trabajo necesario para levantar la escalera de una posición horizontal, sobre el piso, a una vertical.

El trabajo que se realiza (contra la gravedad) consta de dos partes: una es el trabajo para elevar el centro de gravedad a una altura de 1.20 m y otra el trabajo para elevar el peso que se encuentra en la parte más alta hasta los 3.0 m. Entonces

$$\text{Trabajo realizado} = (200 \text{ N})(1.20 \text{ m}) + (50 \text{ N})(3.0 \text{ m}) = 0.39 \text{ kJ}$$

6.7 Calcúlese el trabajo realizado en contra de la gravedad por una bomba que descarga 600 litros de gasolina dentro de un tanque que se encuentra a 20 m por encima de la bomba. Un centímetro cúbico de gasolina tiene una masa de 0.82 gramos. Un litro es igual a 1000 cm³.

Para determinar la masa que se levanta tenemos

$$(600 \text{ litros})\left(1000 \frac{\text{cm}^3}{\text{litro}}\right)\left(0.82 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right) = 492\ 000 \text{ g} = 492 \text{ kg}$$

Para determinar el trabajo de elevación, tenemos

$$\text{Trabajo} = (mg)(h) = (492 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2)(20 \text{ m}) = 96 \text{ kJ}$$

6.8 Una masa de 2.0 kg cae 400 cm. *a*) ¿Cuánto trabajo fue realizado sobre la masa por la fuerza de gravedad? *b*) ¿Cuánta EP_G perdió la masa?

La gravedad jala al objeto con una fuerza mg, y el desplazamiento es de 4 m en dirección de la fuerza. El trabajo realizado por la gravedad es

$$(mg)(4.00 \text{ m}) = (2.0 \text{ kg} \times 9.81 \text{ N})(4.00 \text{ m}) = 78 \text{ J}$$

El cambio de EP_G de un objeto es $mgh_f - mgh_0$, donde h_0 y h_f son la altura inicial y final del objeto respecto a un nivel de referencia. Entonces

$$\text{Cambio en } EP_G = mgh_f - mgh_0 = mg(h_f - h_0) = (2.0 \text{ kg} \times 9.81 \text{ N})(-4.0 \text{ m}) = -78 \text{ J}$$

La EP_G perdida es 78 J.

6.9 Una fuerza de 1.50 N actúa sobre un deslizador de 0.20 kg de tal forma que lo acelera a lo largo de un riel de aire (riel sin rozamiento). La trayectoria y la fuerza están sobre una línea horizontal. ¿Cuál es la rapidez del deslizador después de acelerarlo desde el reposo, a lo largo de 30 cm, si la fricción es despreciable?

El trabajo realizado por la fuerza es igual al incremento en EC del deslizador. Entonces,

$$\text{Trabajo realizado} = (\text{EC})_{\text{final}} - (\text{EC})_{\text{inicial}} \quad \text{o bien} \quad Fs \cos 0° = \tfrac{1}{2} m v_f^2 - 0$$

Sustituyendo nos da

$$(1.50 \text{ N})(0.30 \text{ m}) = \tfrac{1}{2}(0.20 \text{ kg})\, v_f^2$$

de donde $v_f = 2.1$ m/s.

6.10 Un bloque de 0.50 kg se desliza sobre la superficie de una mesa con una velocidad inicial de 20 cm/s. Se mueve una distancia de 70 cm y queda en reposo. Encuéntrese la fuerza de fricción promedio que retarda su movimiento.

La EC inicial del bloque se pierde debido a la acción retardadora de la fuerza de fricción. Es decir,

Cambio de EC del bloque = trabajo realizado sobre el bloque por la fuerza de fricción

$$\tfrac{1}{2} m v_f^2 - \tfrac{1}{2} m v_0^2 = F_f s \cos \theta$$

Debido a que la fuerza de fricción sobre el bloque se encuentra en sentido opuesto a la dirección del desplazamiento, $\cos \theta = -1$. Utilizando $v_f = 0$, $v_0 = 0.20$ m/s y $s = 0.70$ m, se obtiene

$$0 - \tfrac{1}{2}(0.50 \text{ kg})(0.20 \text{ m/s})^2 = (F_f)(0.70 \text{ m})(-1)$$

de donde $F_f = 0.014$ N.

6.11 Un automóvil que viaja a 15 m/s es llevado hasta el reposo en una distancia de 2.0 al estrellarse contra un montículo de tierra. ¿Cuál es la fuerza promedio que ejerce el cinturón de seguridad sobre un pasajero de 90 kg en el automóvil cuando es detenido?

Supóngase que el cinturón de seguridad detiene al pasajero en 2.0 m. La fuerza F que se aplica actúa a lo largo de una distancia de 2.0 m y disminuye la EC del pasajero hasta cero. Así

$$\text{Cambio de EC del pasajero} = \text{trabajo realizado por } F$$

$$0 - \tfrac{1}{2}(90\text{ kg})(15\text{ m/s})^2 = (F)(2.0\text{ m})(-1)$$

donde $\cos\theta = -1$, debido a que la fuerza que retiene al pasajero está en sentido contrario al desplazamiento. Resolviendo, tenemos $F = 5.1$ kN.

6.12 Se dispara un proyectil hacia arriba desde la Tierra con una rapidez de 20 m/s. ¿A qué altura estará cuando su rapidez sea de 8.0 m/s? Ignórese la fricción con el aire.

Debido a que la energía del proyectil se conserva, tenemos

$$\text{Cambio en la EC} + \text{cambio en la EP}_G = 0$$

$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 + mg(h_f - h_0) = 0$$

Lo que se desea calcular es $h_f = h_0$. Después de un poco de álgebra, obtenemos

$$h_f - h_0 = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2g} = -\frac{(8.0\text{ m/s})^2 - (20\text{ m/s})^2}{2(9.81\text{ m/s}^2)} = 17\text{ m}$$

6.13 En una máquina de Atwood (véase el problema 3.23), las dos masas son de 800 g y 700 g. El sistema inicialmente está en reposo. ¿Cuál es la rapidez de la masa de 800 g después que ha caído 120 cm?

La masa de 700 g ha subido 120 cm mientras que la de 800 g cae 120 cm. Por lo tanto, el cambio neto en la EP_G es

$$\text{Cambio en la EP}_G = (0.70\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2)(1.20\text{ m}) - (0.80\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2)(1.20\text{ m}) = -1.18\text{ J}$$

lo cual es una pérdida de EP_G. Dado que la energía se conserva, la energía cinética de las masas se ha incrementado en 1.18 J. De donde,

$$\text{Cambio de EC} = 1.18\text{ J} = \tfrac{1}{2}(0.70\text{ kg})(v_f^2 - v_0^2) + \tfrac{1}{2}(0.80\text{ kg})(v_f^2 - v_0^2)$$

Como el sistema inicialmente se encuentra en reposo, $v_0 = 0$, podemos resolver la ecuación para calcular v_f, con lo cual $v_f = 1.25$ m/s.

6.14 Como se muestra en la Fig. 6-3, una cuenta se desliza sobre un alambre. Si la fuerza de fricción es despreciable y en el punto A su rapidez es de 200 cm/s, *a*) ¿cuál será su rapidez en el punto B?, *b*) ¿cuál en el punto C?

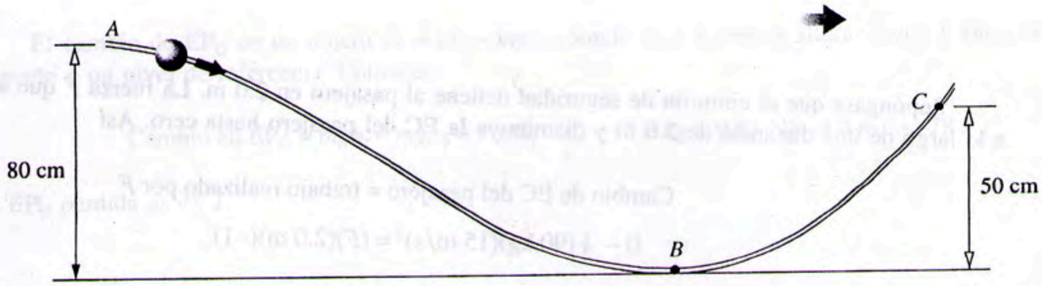


Fig. 6-3

Se sabe que la energía de la cuenta se conserva, así que podemos escribir

$$\text{Cambio en la EC} + \text{cambio en la EP}_G = 0$$
$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 + mg(h_f - h_0) = 0$$

a) Aquí, $v_0 = 2.0$ m/s, $h_0 = 0.80$ m y $h_f = 0$. Utilizando estos valores, y notando que m se simplifica, se obtiene $v_f = 4.4$ m/s

b) Aquí, $v_0 = 2.0$ m/s, $h_0 = 0.80$ m y $h_f = 0.50$ m. Utilizando estos valores, y notando que m se simplifica, tenemos $v_f = 3.1$ m/s.

6.15 Supóngase que la cuenta de la Fig. 6-3 tiene una masa de 15 g y una rapidez de 2.0 m/s en el punto A, y se va deteniendo hasta llegar al reposo en el punto C. La longitud del alambre desde A hasta C es de 250 cm. ¿Cuál es la fuerza de fricción promedio que se opone al movimiento de la cuenta?

Cuando la cuenta se mueve de A a C, experimenta un cambio en su energía total; es decir, la pérdida de EC y EP_G. Este cambio de energía total es igual al trabajo realizado por la fuerza de fricción sobre la cuenta. Entonces,

$$\text{Cambio en la EC} + \text{cambio en la EP}_G = \text{tabajo realizado por la fuerza de fricción}$$
$$mg(h_C - h_A) + \tfrac{1}{2}m(v_C^2 - v_A^2) = F_f s \cos\theta$$

Nótese que $\cos\theta = -1$, $v_C = 0$, $v_A = 2.0$ m/s, $h_C - h_A = -0.30$ m, $s = 2.50$ m y $m = 0.015$ kg. Usando estos valores, determinamos que el valor es $F_f = 0.030$ N.

6.16 Un automóvil de 1200 kg va cuesta abajo por una colina con una inclinación de 30°, como se muestra en la Fig. 6-4. Cuando la rapidez del automóvil es de 12 m/s, el conductor aplica los frenos. ¿Cuál es el valor de la fuerza constante F (paralela al camino) que debe aplicarse si el carro se va a detener cuando haya viajado 100 m?

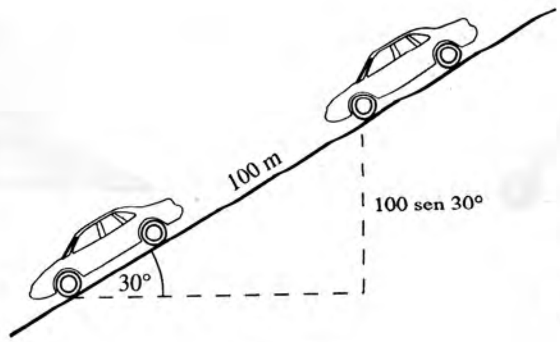


Fig. 6-4

El cambio en la energía total del automóvil (EC + EP_G) es igual al trabajo realizado sobre éste por la fuerza de frenado F. Este trabajo es Fs cos 180° debido a que F retarda el movimiento del automóvil. Por lo tanto tenemos

$$\tfrac{1}{2}m(v_f^2 - v_0^2) + mg(h_f - h_0) = Fs(-1)$$

donde

$$m = 1200 \text{ kg}$$
$$v_f = 0$$
$$v_0 = 12 \text{ m/s}$$
$$h_f - h_0 = (100 \text{ m}) \text{ sen } 30°$$
$$s = 100 \text{ m}$$

Con estos valores, de la ecuación se obtiene $F = 6.7$ kN.

6.17 En la Fig. 6-5 se muestra un péndulo con una cuerda de 180 cm de longitud y una pelota suspendida en su extremo. La pelota tiene una rapidez de 400 cm/s cuando pasa por el punto bajo de su trayectoria. *a*) ¿Cuál es la altura h sobre este punto a la cual se elevará antes de detenerse? *b*) ¿Qué ángulo forma el péndulo con la vertical?

a) El tirón de la cuerda sobre la pelota siempre es perpendicular a la trayectoria de ésta, por lo tanto no realiza trabajo sobre la pelota. En virtud de que la energía total de la pelota permanece constante, la EC que pierde se transforma en EP_G. Esto es,

$$\text{Cambio en la EC} + \text{cambio en la } EP_G = 0$$
$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 + mgh = 0$$

Siendo $v_f = 0$ y $v_0 = 4.00$ m/s, se puede calcular $h - 0.816$ m que es la altura a la cual la pelota se eleva.

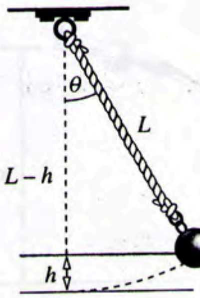


Fig. 6-5

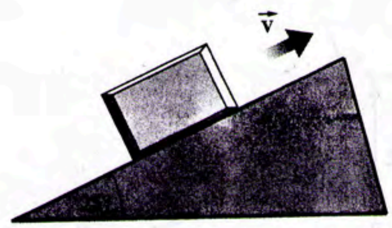


Fig. 6-6

b) De la Fig. 6-5,

$$\cos\theta = \frac{L-h}{L} = 1 - \frac{0.816}{1.80}$$

con lo cual se obtiene $\theta = 56.9°$.

6.18 Se dispara hacia arriba un bloque de 500 g sobre un plano inclinado con una rapidez inicial de 200 cm/s, como se muestra en la Fig. 6-6. ¿Qué tan arriba sobre el plano inclinado llegará si el coeficiente de fricción entre éste y el plano es de 0.150?

Primero se determina la fuerza de fricción sobre el plano con

$$F_f = \mu F_N = \mu(mg\cos 25°)$$

Como el bloque se desliza hacia arriba a una distancia D, éste se elevará a una distancia D sen 25.0°. Dado que el cambio de energía cinética del bloque es igual al trabajo realizado sobre éste por la fuerza de fricción, tenemos

$$\text{Cambio en la EC} + \text{cambio en la EP}_G = F_f D\cos 180°$$

$$\tfrac{1}{2}m(v_f^2 - v_0^2) + mg(D \text{ sen } 25.0°) = -F_f D$$

se puede calcular F_f ya que sabe que $v_0 = 2.00$ m/s y $v_f = 0$. Nótese que la masa del bloque no se cancela en este caso particular (debido a que F_f está dada en términos de ésta). Sustituyendo se obtiene $D = 0.365$ m.

6.19 Un tren de 60 000 kg asciende por una pendiente con inclinación del 1.0% (esto es, se eleva 1.0 m por cada 100 m horizontales) por medio de una tracción que lo jala con una fuerza de 3.0 kN. La fuerza de fricción que se opone al movimiento del tren es 4.0 kN. La rapidez inicial del tren es 12 m/s. ¿Qué distancia horizontal s viajará el tren antes de que su velocidad se reduzca a 9.0 m/s?

El cambio en la energía total del tren se debe al trabajo de la fuerza de fricción y al de la fuerza de tracción:

$$\text{Cambio en la EC} + \text{cambio en la EP}_G = W_{\text{tracción}} + W_{\text{fricción}}$$

$$\tfrac{1}{2}m(v_f^2 - v_0^2) + mg(0.010s) = (3000\ \text{N})(s)(1) + (4000\ \text{N})(s)(-1)$$

de donde $s = 275\ \text{m} = 0.28\ \text{km}$.

6.20 Un anuncio publicitario pregona que cierto automóvil de 1200 kg puede acelerarse desde el reposo hasta 25 m/s en un tiempo de 8.0 s. ¿Qué potencia media debe desarrollar el motor para originar esta aceleración? Ignórense las pérdidas por fricción.

El trabajo realizado en acelerar el automóvil está dado por

$$\text{Trabajo realizado} = \text{cambio en la EC} = \tfrac{1}{2}m(v_f^2 - v_0^2)$$

El tiempo transcurrido en el desarrollo de este trabajo es 8.0 s. Por tanto,

$$\text{Potencia} = \frac{\text{trabajo}}{\text{tiempo}} = \frac{\frac{1}{2}(1\,200\ \text{kg})(25\ \text{m/s})^2}{8.0\ \text{s}} = 47\ \text{kW}$$

Convirtiendo los watts a caballos de fuerza (hp), se tiene

$$\text{Potencia} = (46\,900\ \text{W})\left(\frac{1\ \text{hp}}{746\ \text{W}}\right) = 63\ \text{hp}$$

6.21 Un motor de 0.25 hp se usa para levantar una carga con una rapidez de 5.0 cm/s. ¿Cuál es la máxima carga que puede levantarse con esta rapidez constante?

Supóngase que la potencia de *salida* del motor es de 0.25 hp = 186.5 W. En 1.0 s, una carga mg se levanta a una distancia de 0.050 m. Por consiguiente,

$$\text{Trabajo desarrollado en 1.0 s} = (\text{peso})(\text{cambio de altura en 1.0 s}) = (mg)(0.050\ \text{m})$$

Por definición, potencia = trabajo/tiempo, así que

$$186.5\ W = \frac{(\text{mg})(0.050\ \text{m})}{1.0\ \text{s}}$$

Utilizando $g = 9.81\ \text{m/s}^2$, se encuentra que $m = 381$ kg. El motor puede levantar una carga de aproximadamente 0.38×10^3 kg con esta rapidez.

6.22 Repítase el problema 6.20 aplicando los datos a un automóvil que sube por un plano inclinado 20°.

El trabajo que se realiza es para elevar y también para acelerar el automóvil, es decir

$$\text{Trabajo realizado} = \text{cambio en la EC} + \text{cambio en la EP}_G$$
$$= \tfrac{1}{2}m(v_f^2 - v_0^2) + mg(h_f - h_0)$$

donde $h_t - h_0 = s$ sen 20° y s es la distancia recorrida por el automóvil en el trayecto considerado en los 8.0 s. Sabemos que $v_0 = 0$, $v_f = 25$ m/s y que $t = 8.0$ s, tenemos

$$s = v_{prom}t = \tfrac{1}{2}(v_0 + v_f)t = 100 \text{ m}$$

Entonces

$$\text{Trabajo realizado} = \tfrac{1}{2}(1200\text{ kg})(625\text{ m}^2/\text{s}^2) + (1200\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2)(100\text{ m})(\text{sen }20°) = 0.78\times10^3\text{ kJ}$$

de donde

$$\text{Potencia} = \frac{777\text{ kJ}}{8.0\text{ s}} = 97\text{ kW} = 0.13\times10^3\text{ hp}$$

6.23 Para descargar granos de la bodega de un barco se emplea un elevador que levanta el grano a una distancia de 12 m. La descarga del grano se realiza por la parte superior del elevador a razón de 2.0 kg cada segundo y la rapidez de descarga de cada partícula de grano es de 3.0 m/s. Encuéntrese la potencia (en hp) del motor que puede elevar los granos de este modo.

La potencia de salida del motor es

$$\text{Potencia} = \frac{\text{cambio en la EC} + \text{cambio en la EP}_G}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{\tfrac{1}{2}m(v_f^2 - v_0^2) + mgh}{t}$$
$$= \frac{m}{t}\left[\tfrac{1}{2}(9.0\text{ m}^2/\text{s}^2) + (9.81\text{ m/s}^2)(12\,m)\right]$$

La masa transportada por segundo, m/t, es de 2.0 kg/s. Utilizando este valor obtenemos que la potencia es 0.24 kW.

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

6.24 Una fuerza de 3.0 N actúa a lo largo de una distancia de 12 m en dirección y sentido de la fuerza. Encuéntrese el trabajo realizado. *Resp.* 36 J

6.25 Un objeto de 4.0 kg se eleva 1.5 m. *a*) ¿Qué cantidad de trabajo se efectúa contra la gravedad? *b*) Repítase el cálculo si el objeto se baja en vez de elevarse. *Resp.* *a*) 59 J; *b*) −59 J

6.26 Una losa de mármol uniforme rectangular tiene 3.4 m de largo, 2.0 m de ancho y una masa de 180 kg. Si está originalmente tendida en el suelo plano, ¿cuánto trabajo se necesita para ponerla vertical? *Resp.* 3.0 kJ

6.27 ¿Qué tan grande es la fuerza requerida para acelerar un automóvil de 1300 kg desde el reposo hasta una rapidez de 20 m/s en una distancia de 80 m? *Resp.* 3.3 kN

6.28 Un automóvil de 1200 kg viaja a 30 m/s, aplica los frenos y derrapa antes de detenerse. Si la fuerza de fricción entre el deslizamiento de las llantas y el pavimento es de 6000 N, ¿qué distancia recorrerá el coche antes de alcanzar el reposo? *Resp.* 90 m

6.29 Un protón ($m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) con una rapidez de 5.0×10^6 m/s, al pasar a través de una película delgada de metal con un espesor de 0.010 mm emerge con una rapidez de 2.0×10^6 m/s. ¿De qué magnitud es la fuerza que se opone al movimiento cuando atraviesa la película? *Resp.* 1.8×10^{-9} N

6.30 Se empuja lentamente un automóvil de 200 kg hacia arriba de una pendiente. ¿Cuánto trabajo desarrollará la fuerza que hace que el objeto ascienda la pendiente hasta una plataforma situada a 1.5 m arriba del punto de partida? Despréciese la fricción. *Resp.* 2.9 kJ

6.31 Repítase el problema 6.30, considerando que la distancia a lo largo de la pendiente hasta la plataforma es de 7.0 m y que una fuerza de 150 N se opone al movimiento. *Resp.* 4.0 kJ

6.32 Se empuja un vagón de carga de 50 000 kg una distancia de 800 m hacia arriba sobre una inclinación del 1.20%, con rapidez constante. *a*) Encuéntrese el trabajo que desarrolla contra la gravedad el empuje de la barra de tracción; *b*) si la fuerza de fricción que retarda el movimiento es 1500 N, determínese el trabajo total desarrollado. *Resp.* *a*) 4.70 MJ; *b*) 5.90 MJ

6.33 Una mujer de 60 kg sube un tramo de escalera que une dos niveles separados 3.0 m. *a*) ¿Cuánto trabajo se realiza sobre la mujer? *b*) ¿Cuánto trabajo realiza la mujer para subir de un nivel al otro? *c*) ¿En qué cantidad cambia la EP_G de la mujer? *Resp.* *a*) 1.8 kJ; *b*) 1.8 kJ; *c*) 1.8 kJ

6.34 Una bomba de agua sube el líquido desde un lago hasta un gran tanque colocado 20 m arriba del nivel del lago. ¿Qué cantidad de trabajo desarrollará la bomba contra la gravedad para transferir 5.0 m^3 de agua al tanque? Un metro cúbico de agua tiene una masa de 1000 kg. *Resp.* 9.8×10^5 J

6.35 Justamente antes de chocar con el piso, una masa de 2.0 kg tiene 400 J de EC. Si se desprecia la fricción, ¿de qué altura se dejó caer dicha masa? *Resp.* 20.0 m

6.36 Una pelota de 0.50 kg cae frente a una ventana de longitud vertical de 1.50 m, *a*) ¿En qué cantidad se incrementará la EC de la pelota cuando alcance el borde inferior de la ventana? *b*) Si su rapidez era de 3.0 m/s en la parte superior de la ventana, ¿cuál será la rapidez al pasar por la parte inferior? *Resp.* *a*) 7.4 J; *b*) 6.2 m/s

6.37 Al nivel del mar, las moléculas de nitrógeno en el aire tienen una EC translacional promedio de 6.2×10^{-21} J. Su masa es 4.7×10^{-26} kg. *a*) Si una molécula pudiera moverse verticalmente hacia arriba sin chocar contra otras moléculas, ¿a qué altura podría llegar? *b*) ¿Cuál es la rapidez inicial de la molécula? *Resp.* *a*) 14 km; *b*) 0.51 km/s

6.38 El coeficiente de fricción cinético entre un coche de 900 kg y el pavimento es de 0.80. Si el automóvil se mueve a 25 m/s a lo largo del pavimento plano cuando comienza a derrapar para detenerse, ¿qué distancia recorrerá antes de detenerse? *Resp.* 40 m

6.39 Considérese el péndulo simple que se muestra en la Fig. 6-7. *a*) Si se suelta desde el punto *A*. ¿cuál será la rapidez de la pelota cuando pasa a través del punto *C*? *b*) ¿Cuál será su rapidez en el punto *B*? *Resp.* *a*) 3.8 m/s; *b*) 3.4 m/s

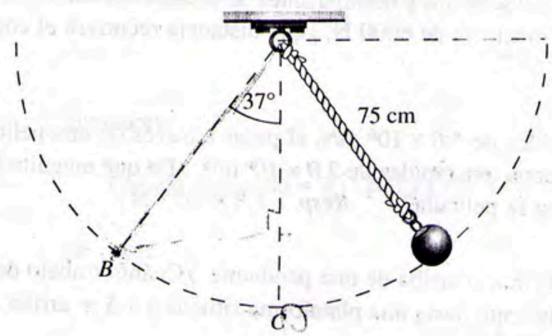


Fig. 6-7

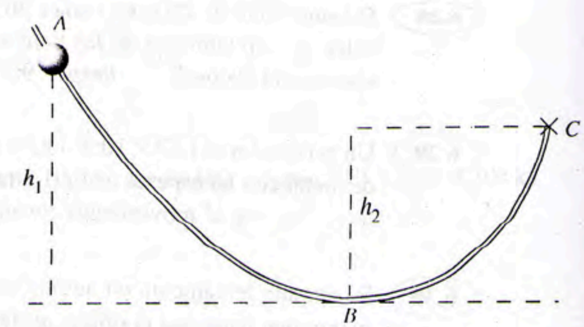


Fig. 6-8

6.40 Un automóvil de 1200 kg se mueve por gravedad desde el reposo bajando por una carretera de 15 m de largo que está inclinada 20° con la horizontal. ¿Qué rapidez tiene el coche al final del camino si *a*) la fricción es despreciable, y *b*) cuando se opone al movimiento una fuerza de fricción de 3000 N? *Resp.* *a*) 10 m/s; *b*) 5.1 m/s

6.41 El conductor de un automóvil de 1200 kg observa que la rapidez de su coche disminuye de 20 m/s a 15 m/s mientras recorre una distancia de 130 m sobre suelo nivelado. ¿De qué magnitud es la fuerza que se opone al movimiento del coche? *Resp.* 0.81 kN

6.42 Un elevador de 2000 kg sube, partiendo del reposo, desde el sótano hasta el cuarto piso, que se encuentra a una distancia de 25 m. Cuando pasa por el cuarto piso su velocidad es de 3.0 m/s. Hay una fuerza de fricción, constante, de 500 N. Calcúlese el trabajo que realiza el mecanismo de elevación. *Resp.* 0.51 MJ

6.43 La Fig. 6-8 muestra una cuenta que resbala por un alambre. ¿De qué magnitud debe ser la altura h_1 si la cuenta, partiendo del reposo en *A*, va a tener una rapidez de 200 cm/s en el punto *B*? Ignórese el rozamiento. *Resp.* 20.4 cm

6.44 En la Fig. 6-8, $h_1 = 50.0$ cm, $h_2 = 30.0$ cm y la longitud del alambre desde *A* hasta *C* es de 400 cm. Una cuenta de 3.00 g se suelta en el punto *A* y recorre el alambre hasta detenerse en el punto *C*. ¿De qué magnitud será la fuerza de fricción promedio que se opone al movimiento? *Resp.* 1.47 mN

6.45 En la Fig. 6-8, $h_1 = 200$ cm, $h_2 = 150$ cm y en el punto A la cuenta de 3.00 g, cuando baja, tiene una rapidez a lo largo del alambre de 800 cm/s. *a*) ¿Cuál es la rapidez de la cuenta al pasar por el punto B si despreciamos la fricción? *b*) ¿Cuánta energía perdió la cuenta debido al trabajo de la fricción si sólo se eleva a una altura de 20 cm por encima del punto C después de salirse del alambre? *Resp.* *a*) 10.2 m/s; *b*) 105 mJ

6.46 Calcúlense los caballos de fuerza promedio (potencia) requeridos para levantar un tambor de 150 kg a una altura de 20 m en un tiempo de 1.0 minuto. *Resp.* 0.66 hp

6.47 Calcúlese la potencia generada por una máquina que levanta una caja de 500 kg a una altura de 20.0 m en un tiempo de 60.0 s. *Resp.* 1.63 kW

6.48 Un mecanismo consume 40.0 hp para impulsar un automóvil a lo largo de una pista nivelada a 15.0 m/s. ¿De qué magnitud es la fuerza total de frenado que actúa sobre el coche? *Resp.* 1.99 kN

6.49 Un automóvil de 1000 kg viaja en ascenso por una pendiente de 3.0% con una rapidez de 20 m/s. Encuéntrese la potencia (en hp) requerida, despreciando la fricción. *Resp.* 7.9 hp

6.50 Un motor de un automóvil de 900 kg desarrolla una potencia máxima de 40.0 hp para mantenerlo con una rapidez de 130 km/h en una superficie nivelada. ¿De qué magnitud es la fuerza de fricción que impide su movimiento a esa rapidez? *Resp.* 826 N

6.51 El agua fluye desde un recipiente a razón de 3000 kg/min, hasta una turbina, situada a 120 m. Si el rendimiento de la turbina es del 80%, calcúlese la potencia de salida de la turbina. Despréciese la fricción en el tubo y la pequeña EC de salida de agua. *Resp.* 63 hp

6.52 Calcúlese la masa de una gran caja que una máquina de 40 hp jala con una rapidez de 15 m/s a lo largo de un camino nivelado, si el coeficiente de fricción entre el camino y la caja es 0.15. *Resp.* 1.4×10^3 kg

6.53 Un automóvil de 1300 kg es acelerado desde el reposo hasta una rapidez de 30.0 m/s en un tiempo de 12.0 s cuando sube por una pendiente inclinada de 15.0°. Considerando que la aceleración es uniforme, ¿cuál es la potencia mínima necesaria para acelerar el coche de esa forma? *Resp.* 132 hp

capítulo 7

Máquinas simples

UNA MÁQUINA es cualquier dispositivo con el cual se puede cambiar la magnitud, la dirección o el método de aplicación de una fuerza para obtener algún provecho. Como ejemplos de máquinas simples tenemos la palanca, el plano inclinado, la polea, la biela (manivela), el árbol (eje) y el gato.

EL PRINCIPIO DE TRABAJO de una máquina en operación continua es el siguiente:

$$\text{Trabajo de entrada} = \text{trabajo útil de salida} + \text{trabajo necesario para vencer la fricción}$$

En las máquinas con tiempos de operación cortos, parte del trabajo útil se puede utilizar para almacenar energía dentro de la máquina. Por ejemplo, estirar un resorte interno o elevar una polea móvil.

VENTAJA MECÁNICA: La *ventaja mecánica real* (VMR) de una máquina se define como:

$$\text{VMR} = \text{razón de fuerzas} = \frac{\text{fuerza ejercida por la máquina sobre la carga}}{\text{fuerza utilizada para operar la máquina}}$$

La *ventaja mecánica ideal* (VMI) de una máquina se define como fuerza utilizada para operar la máquina

$$\text{VMI} = \text{razón de distancias} = \frac{\text{desplazamiento de la fuerza de entrada}}{\text{desplazamiento de la carga}}$$

Como siempre hay fricción, la VMR siempre es menor que la VMI. Por lo general, tanto la VMR como la VMI son mayores que uno.

LA EFICIENCIA de una máquina se define como

$$\text{Eficiencia} = \frac{\text{trabajo realizado}}{\text{trabajo aportado}} = \frac{\text{potencia aprovechada}}{\text{potencia consumida}}$$

La eficiencia también es igual a la razón VMR/VMI.

PROBLEMAS RESUELTOS

7.1 En una cabria (aparejo, pescante), se levanta una carga 10 cm por cada 70 cm de desplazamiento de la cuerda utilizada para operar el dispositivo. ¿Cuál es la mínima fuerza de entrada necesaria para levantar una carga de 5.0 kN?

La situación más ventajosa es aquélla en la cual todo el trabajo de entrada se utiliza para levantar la carga, esto es, donde la fricción u otras pérdidas mecánicas son despreciables. En tales casos,

$$\text{Trabajo consumido} = \text{trabajo realizado}$$

Si la carga se levanta una distancia s, el trabajo realizado es (5.0 kN)(s). La fuerza de entrada F, no obstante, debe realizar un trabajo en una distancia de $7.0s$. La ecuación anterior se convierte en

$$(F)(7.0s) = (5.0\ \text{kN})(s)$$

que da $F = 0.71$ kN como la fuerza mínima requerida.

7.2 Una máquina de aparejos levanta una carga de 3000 kg a una altura de 8.00 m en un tiempo de 20.0 s. Al mecanismo se le suministra una potencia de 18.0 hp. Calcular *a*) el trabajo realizado; *b*) la potencia aprovechada, así como la potencia aportada; *c*) la eficiencia del mecanismo y del sistema de aparejos.

a) Trabajo de salida = (fuerza de levantamiento) × (altura) = $(3000 \times 9.81\ \text{N})(8.00\ \text{m}) = 235$ kJ

b)

$$\text{Potencia aprovechada} = \frac{\text{trabajo realizado}}{\text{trabajo consumido}} = \frac{235\ \text{kJ}}{20.0\ \text{s}} = 11.8\ \text{kW}$$

$$\text{Potencia aportada} = (18.0\ \text{hp})\left(\frac{0.746\ \text{kW}}{1\ \text{hp}}\right) = 13.4\ \text{kW}$$

c)

$$\text{Eficiencia} = \frac{\text{potencia aprovechada}}{\text{potencia aportada}} = \frac{11.8\ \text{kW}}{13.4\ \text{kW}} = 0.881 = 88.1\%$$

o bien

$$\text{Eficiencia} = \frac{\text{trabajo realizado}}{\text{trabajo consumido}} = \frac{235\ \text{kJ}}{(13.4\ \text{kJ/s})(20.0\ \text{s})} = 0.877 = 87.7\%$$

La eficiencia es de 88%.

7.3 ¿Qué potencia en kW se suministra a un motor de 12.0 hp que tiene una eficiencia del 90.0% cuando desarrolla toda su potencia nominal?

De la definición de eficiencia,

$$\text{Potencia aportada} = \frac{\text{potencia aprovechada}}{\text{eficiencia}} = \frac{(12.0\ \text{hp})(0.746\ \text{kW/hp})}{0.900} = 9.95\ \text{kW}$$

7.4 Para las tres palancas que se muestran en la Fig. 7-1, determinar las fuerzas verticales F_1, F_2 y F_3 que se requieren para sostener la carga $F_W = 90$ N. Despréciese el peso de la palanca. Calcúlese también la VMR, la VMI y la eficiencia para cada sistema.

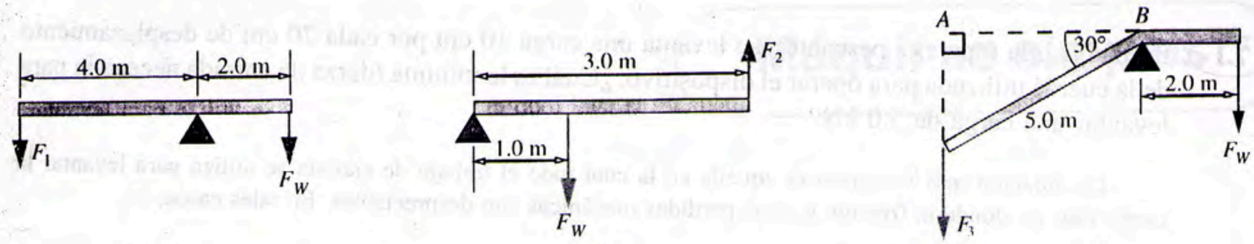


Fig. 7-1

En cada caso, se considera la torca alrededor del fulcro el punto de apoyo como eje. Si suponemos que el levantamiento se hace lentamente y con velocidad constante, entonces los sistemas estarán en equilibrio; las torcas en el sentido de las manecillas del reloj balancean a las torcas en sentido opuesto a las manecillas del reloj. (Recuérdese que la torca = rF sen θ.)

Torcas en sentido del reloj = torcas en sentido opuesto al reloj

a) $(2.0 \text{ m})(90 \text{ N})(1) = (4.0 \text{ m})(F_1)(1)$ de donde $F_1 = 45$ N

b) $(1.0 \text{ m})(90 \text{ N})(1) = (3.0 \text{ m})(F_2)(1)$ de donde $F_2 = 30$ N

c) $(2.0 \text{ m})(90 \text{ N})(1) = (5.0 \text{ m})(F_3) \text{ sen } 60°$ de donde $F_3 = 42$ N

Para encontrar la VMI del sistema en la Fig. 7-1*a*, observamos que la carga se desplaza la mitad de la distancia de la fuerza aplicada, entonces

VMI = a la razón de las distancias = 2.0

En forma similar, en la Fig. 7-1*b*, VMI = 3/1 = 3. En la Fig. 7-1*c*, no obstante, el brazo de palanca es (5.0 m) sen 60° = 4.33 m y la razón de distancias es 4.33/2 = 2.16. Resumiendo,

	Palanca (*a*)	Palanca (*b*)	Palanca (*c*)
VMI	2.0	3.0	2.2
VMR	$\frac{90 \text{ N}}{45 \text{ N}} = 2.0$	$\frac{90 \text{ N}}{30 \text{ N}} = 3.0$	$\frac{90 \text{ N}}{41.6 \text{ N}} = 2.2$
Eficiencia	1.0	1.0	1.0

El valor de la eficiencia es 1.0 debido a que la fricción en el fulcro es cero.

7.5 Determínese la fuerza F que se requiere para levantar una carga $F_W = 100$ N con cada uno de los sistemas de poleas que se muestran en la Fig. 7-2. Despréciense la fricción y el peso de las poleas.

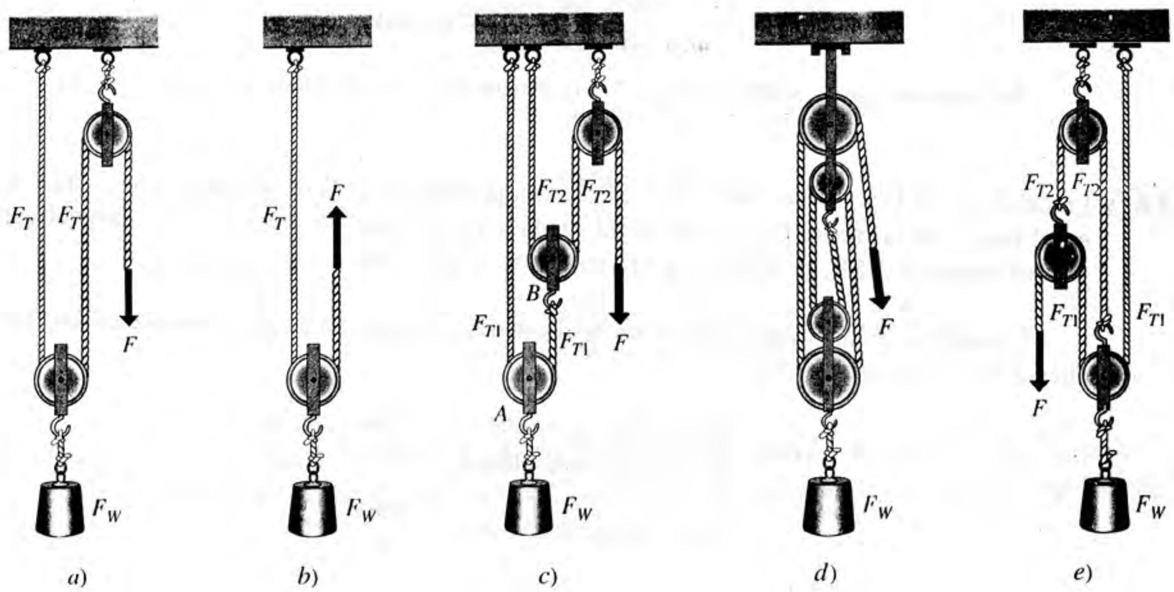


Fig. 7-2

a) La carga F_W está sostenida por dos cuerdas; cada cuerda tira hacia arriba con una tensión $F_T = \frac{1}{2}F_W$. Esto se debe a que la cuerda es continua y no hay fricción en las poleas, $F_T = F$. Entonces

$$F = F_T = \tfrac{1}{2}F_W = \tfrac{1}{2}(100 \text{ N}) = 50 \text{ N}$$

b) Aquí, también, la carga está sostenida por la tensión de las dos cuerdas, F_T y F, donde $F_T = F$.

$$F_T + F = F_W \quad \text{o bien} \quad F = \tfrac{1}{2}F_W = 50 \text{ N}$$

c) Sean F_{T1} y F_{T2} las tensiones en las poleas A y B, respectivamente. La polea A está en equilibrio, entonces

$$F_{T1} + F_{T1} - F_W = 0 \qquad \text{o bien} \qquad F_{T1} = \tfrac{1}{2}F_W$$

La polea B, también está en equilibrio así que

$$F_{T2} + F_{T2} - F_{T1} = 0 \qquad \text{o bien} \qquad F_{T2} = \tfrac{1}{2}F_{T1} = \tfrac{1}{4}F_W$$

Como $F = F_{T2}$ entonces $F = \frac{1}{4}F_W = 25$ N.

d) Cuatro cuerdas, cada una con la misma tensión F_T, sostienen a la carga F_W. Por esto,

$$4F_{T1} = F_W \quad \text{de donde} \quad F = F_{T1} = \tfrac{1}{4}F_W = 25 \text{ N}$$

e) A primera vista, se observa que $F = F_{T1}$. Como la polea en la izquierda está en equilibrio, tenemos

$$F_{T2} - F_{T1} - F = 0$$

Pero $F_{T1} = F$ entonces $F_{T2} = 2F$. La polea de la derecha también está en equilibrio, por tanto

$$F_{T1} + F_{T2} + F_{T1} - F_W = 0$$

Recordando que $F_{T1} = F$ y que $F_{T2} = 2F$ se obtiene $4F = F_W$, de donde $F = 25$ N.

7.6 La cabria de la Fig. 7-3 se utiliza para levantar una carga de 400 N aplicando una fuerza de 50 N en el borde de la rueda. Los radios de la rueda y del eje son 85 cm y 6.0 cm, respectivamente. Determínense la VMI, la VMR y la eficiencia de la máquina.

Se sabe que en una vuelta de la cabria, la longitud de la cuerda enredada o desenredada será igual a la circunferencia del árbol (eje) de la cabria.

$$\text{VMI} = \frac{\text{distancia que se desplaza } F}{\text{distancia que se desplaza } F_W} = \frac{2\pi R}{2\pi r} = \frac{85\,\text{cm}}{6.0\,\text{cm}} = 14$$

$$\text{VMR} = \text{razón de las fuerzas} = \frac{400\text{ N}}{50\text{ N}} = 8.0$$

$$\text{Eficiencia} = \frac{\text{VMR}}{\text{VMI}} = \frac{8.0}{14.2} = 0.56 = 56\%$$

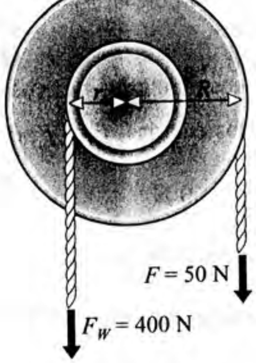


Fig. 7-3

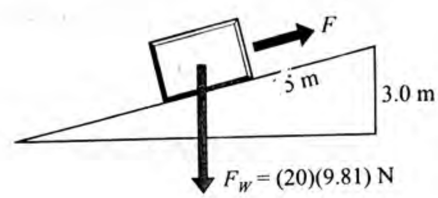


Fig. 7-4

7.7 El plano inclinado que se muestra en la Fig. 7-4 tiene 15 m de longitud y 3.0 m de altura. *a*) ¿Qué fuerza F paralela al plano inclinado se requiere para deslizar hacia arriba una caja de 20 kg, si la fricción es despreciable? *b*) ¿Cuál es la VMI del plano? *c*) Calcular la VMR y la eficiencia si se requiere una fuerza de 64 N.

a) Existen varias formas de resolver el problema. Consideremos el método de energías. Como no hay fricción, el trabajo hecho por la fuerza, $(F)(15\text{ m})$, debe ser igual al trabajo realizado, $(20\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2)(3.0\text{ m})$. Igualando las dos ecuaciones y resolviendo para F se obtiene $F = 39$ N.

b)
$$\text{VMI} = \frac{\text{distancia que se desplaza } F}{\text{altura recorrida por } F_W} = \frac{15\text{ m}}{3.0\text{ m}} = 5.0$$

c)
$$\text{VMR} = \text{razón de las fuerzas} = \frac{F_W}{F} = \frac{196\text{ N}}{64\text{ N}} = 3.06 = 3.1$$

$$\text{Eficiencia} = \frac{\text{VMR}}{\text{VMI}} = \frac{3.06}{5.0} = 0.61 = 61\%$$

Como prueba

$$\text{Eficiencia} = \frac{\text{trabajo realizado}}{\text{trabajo consumido}} = \frac{(F_W)(3.0\text{ m})}{(F)(15\text{ m})} = 0.61 = 61\%$$

7.8 Como se muestra en la Fig. 7-5, un gato tiene un brazo de palanca de 40 cm y un paso de 5.0 mm. Si la eficiencia es del 30%, ¿qué fuerza F se requiere para levantar una carga F_W de 270 kg?

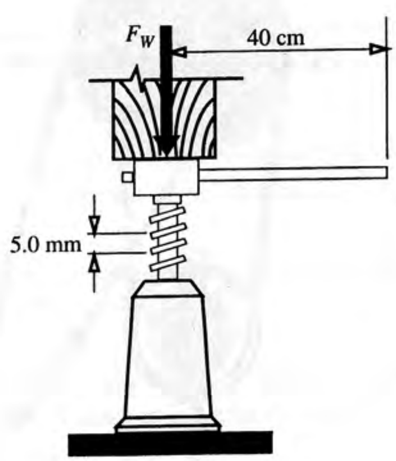


Fig. 7-5

Cuando la palanca del gato completa una vuelta, la fuerza suministrada se mueve una distancia

$$2\pi r = 2\pi\ (0.40\text{ m})$$

mientras que la carga sube una distancia de 0.005 0 m. Entonces el valor de VMI es

$$\text{VMI} = \text{razón de distancia} = \frac{2\pi(0.40\text{ m})}{0.005\,0\text{ m}} = 0.50 \times 10^3$$

Como la eficiencia =VMR/VMI, tenemos

$$\text{VMR} = (\text{eficiencia})(\text{VMI}) = (0.30)(502) = 0.15 \times 10^3$$

Pero VMR = (carga levantada)/(fuerza suministrada) por tanto

$$F = \frac{\text{carga levantada}}{\text{VMR}} = \frac{(270\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2)}{151} = 18\ \text{N}$$

7.9 Una polea diferencial (aparejo diferencial) se muestra en la Fig. 7-6. Dos poleas dentadas de radios $r = 10$ cm y $R = 11$ cm están unidas entre sí y giran sobre el mismo eje. Una cadena sinfín pasa sobre la polea pequeña (10 cm); después, alrededor de la polea móvil colocada en la parte más baja; y finalmente, alrededor de la polea de 11 cm. El operador ejerce una fuerza F tirando hacia abajo para levantar una carga F_W. *a*) Determinar la VMI. *b*) ¿Cuál es la eficiencia de la máquina si se requiere aplicar una fuerza de 50 N para levantar una carga de 700 N?

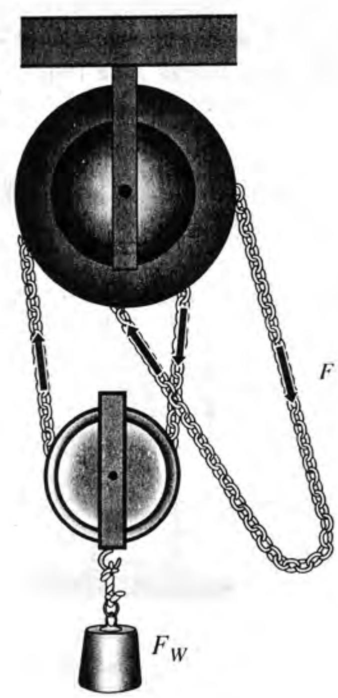


Fig. 7-6

a) Supóngase que la fuerza F se mueve hacia abajo la distancia necesaria para que el sistema de poleas gire una revolución. Por consiguiente, la polea pequeña superior desenreda una longitud de cadena igual a su circunferencia, $2\pi r$, mientras que la polea superior grande enreda una de $2\pi R$. Como resultado, la cadena que sostiene a la polea inferior se reduce en una longitud de $2\pi R - 2\pi r$. La carga F_W sube la mitad de esta distancia, o bien

$$\tfrac{1}{2}(2\pi R - 2\pi r) = \pi\,(R - r)$$

cuando la fuerza suministrada se mueve una distancia $2\pi R$. Entonces,

$$\text{VMI} = \frac{\text{distancia que se desplaza } F}{\text{distancia que se desplaza } F_W} = \frac{2\pi R}{\pi(R-r)} = \frac{2R}{R-r} = \frac{22\text{ cm}}{1.0\text{ cm}} = 22$$

b) De los datos

$$\text{VMR} = \frac{\text{carga levantada}}{\text{fuerza suministrada}} = \frac{700\text{ N}}{50\text{ N}} = 14$$

y

$$\text{Eficiencia} = \frac{\text{VMR}}{\text{VMI}} = \frac{14}{22} = 0.64 = 64\%$$

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

7.10 Un motor proporciona 120 hp a un dispositivo que levanta una carga de 5000 kg a una altura de 13.0 m en un tiempo de 20 s. Encontrar la eficiencia de la máquina. *Resp.* 36%

7.11 Véase la Fig. 7-2*d*. Si se requiere una fuerza de 200 N para levantar una carga de 50 kg, encontrar VMI, VMR y la eficiencia del sistema. *Resp.* 4, 2.5, 61%

7.12 En la Fig. 7-7, la carga de 300 N está en equilibrio con una fuerza F en ambos sistemas. Suponiendo una eficiencia del 100%, ¿cuál es la magnitud de la fuerza en cada sistema? Supóngase que todas las cuerdas están verticales. *Resp.* *a*) 100 N; *b*) 75.0 N

7.13 Con una cierta máquina, la fuerza aplicada se mueve 3.3 m para levantar una carga 8.0 cm. Encontrar *a*) la VMI y *b*) la VMR si la eficiencia es del 60%. ¿Qué carga se puede levantar con una fuerza de 50 N si la eficiencia es *c*) 100% y *d*) 60%? *Resp.* *a*) 41; *b*) 25; *c*) 2.1 kN; *d*) 1.2 kN

7.14 Con una cabria, una fuerza de 80 N aplicada al borde de la rueda puede levantar una carga de 640 N. Los diámetros de la rueda y del árbol son 36 cm y 4.0 cm, respectivamente. Determinar la VMR, la VMI y la eficiencia de la máquina. *Resp.* 8.0, 9.0, 89%

7.15 En una gasolinera, un gato hidráulico levanta un auto de 900 kg a una altura de 0.25 cm cuando una fuerza de 150 N empuja un pistón desplazándolo 20 cm. Encontrar la VMI, la VMR y la eficiencia. *Resp.* 80, 59, 74%

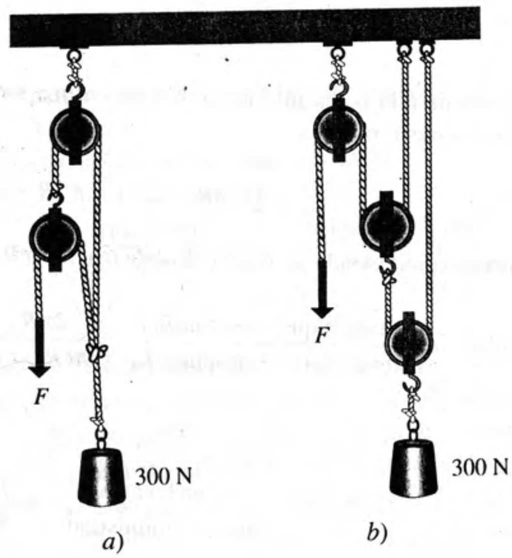


Fig. 7-7

7.16 El tornillo de una prensa tiene un paso de 0.20 cm. El diámetro de la rueda a la cual se le aplica una fuerza tangencial F para girarla es de 55 cm. Si la eficiencia es del 40%, ¿qué tan grande debe ser F para que la prensa produzca una fuerza de 12 kN? *Resp.* 35 N

7.17 Los diámetros de las dos poleas superiores de un aparejo diferencial (montacarga de cadena) (Fig. 7-6) son 18 cm y 16 cm. Si la eficiencia del aparejo es del 45%, qué fuerza se requiere para levantar un cesto de 400 kg? *Resp.* 0.48 kN

capítulo 8

Impulso y cantidad de movimiento

LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ($\vec{\mathbf{p}}$) lineal (ímpetu) de un cuerpo se define como el producto de su masa (m) por su velocidad ($\vec{\mathbf{v}}$):

Momento lineal = (masa del cuerpo) (velocidad del cuerpo)

$$\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$$

La cantidad de movimiento es una cantidad vectorial cuya dirección es la misma que la del vector velocidad. Las unidades en el SI de la cantidad de movimiento son kg · m/s.

EL IMPULSO se define como el producto de la fuerza ($\vec{\mathbf{F}}$) por el intervalo de tiempo (Δt) que actúa la fuerza, o

Impulso = (fuerza) (tiempo que dura actuando la fuerza)

El impulso es una cantidad vectorial cuya dirección es la misma que la de la fuerza. Sus unidades son N · s en el SI.

UN IMPULSO CAUSA UN CAMBIO EN LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO: El cambio en la cantidad de movimiento producido por un impulso es igual al impulso en magnitud y dirección. De esta manera, si una fuerza constante $\vec{\mathbf{F}}$ actúa por un tiempo Δt sobre un cuerpo de masa m, su velocidad cambia desde un valor inicial $\vec{\mathbf{v}}_0$ hasta un valor final $\vec{\mathbf{v}}_f$ o sea

Impulso = cambio en la cantidad de movimiento

$$\vec{\mathbf{F}}\,\Delta t = m(\vec{\mathbf{v}}_f - \vec{\mathbf{v}}_0)$$

La segunda ley de Newton, como él la postuló, es $\vec{\mathbf{F}} = \Delta\vec{\mathbf{p}}/\Delta t$, de lo cual se deduce que $\vec{\mathbf{F}}\,\Delta t = \Delta\vec{\mathbf{p}}$. Es más, $\vec{\mathbf{F}}\,\Delta t = \Delta\,(m\vec{\mathbf{v}})$ y, si m es constante, $\vec{\mathbf{F}}\,\Delta t = m(\vec{\mathbf{v}}_f - \vec{\mathbf{v}}_0)$.

CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL: Si la fuerza externa resultante que actúa sobre un sistema de objetos es cero, entonces la suma vectorial de la cantidad de movimiento de los objetos permanece constante.

EN COLISIONES (O CHOQUES) Y EXPLOSIONES la suma vectorial de las cantidades de movimiento, justamente antes del evento, es igual a la suma vectorial inmediatamente después de ocurrido el evento. La suma vectorial de las cantidades de movimiento de los objetos involucrados no cambia durante el choque o explosión.

Así es que, cuando dos cuerpos de masas m_1 y m_2 chocan,

Cantidad de movimiento total antes del impacto = cantidad de movimiento total después del impacto

$$m_1\vec{\mathbf{u}}_1 + m_2\vec{\mathbf{u}}_2 = m_1\vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}_2$$

donde $\vec{\mathbf{u}}_1$ y $\vec{\mathbf{u}}_2$ son las velocidades antes del impacto, y $\vec{\mathbf{v}}_1$ y $\vec{\mathbf{v}}_2$ son las velocidades después del choque. O bien, en forma de componentes vectoriales,

$$m_1u_{1x} + m_2u_{2x} = m_1\upsilon_{1x} + m_2\upsilon_{2x}$$

y similarmente para las componentes y y z. Recuerde que las cantidades siempre se imprimen en negritas y que la velocidad es un vector. Por otra parte, u_{1x}, u_{2x}, υ_{1x} y υ_{2x} son los valores escalables de las velocidades (pueden ser positivos o negativos). Inicialmente, se selecciona una dirección positiva y los vectores que apuntan en dirección opuesta a ésta tienen valores escalables numéricos negativos.

UNA COLISIÓN PERFECTAMENTE ELÁSTICA es aquella en la cual la suma de la EC traslacional de los objetos no cambia durante la colisión. En el caso de dos cuerpos

$$\tfrac{1}{2}m_1u_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2u_2^2 = \tfrac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\upsilon_2^2$$

COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN: Para cualquier colisión entre dos cuerpos en la cual los cuerpos se mueven sólo a lo largo de una línea recta (por ejemplo, el eje x), el *coeficiente de restitución e* está definido. Es un simple número dado por

$$e = \frac{\upsilon_{2x} - \upsilon_{1x}}{u_{1x} - u_{2x}}$$

donde u_{1x}, u_{2x} = velocidades antes del impacto υ_{1x}, υ_{2x} = velocidades después del impacto. Nótese que $|u_{1x} - u_{2x}|$ es la velocidad relativa de aproximación y $|\upsilon_{2x} - \upsilon_{1x}|$ es la velocidad relativa de retroceso.

Para una colisión perfectamente elástica, $e = 1$. Para una colisión inelástica, $e < 1$. Si los dos cuerpos permanecen unidos después de la colisión, $e = 0$.

EL CENTRO DE MASA de un objeto (de masa m) es el único punto que se desplaza de la misma manera que se movería una masa puntual (de masa m) cuando se somete a la misma fuerza externa que actúa sobre el objeto. Esto es, si la fuerza resultante que actúa sobre un objeto (o sistema de objetos) de masa m es $\vec{\mathbf{F}}$, la aceleración del centro de masa del objeto (o sistema) está dada por $\vec{\mathbf{a}}_{\text{cm}} = \vec{\mathbf{F}}/m$.

Si el objeto se considera formado por pequeñas masas m_1, m_2, m_3, y así sucesivamente, con coordenadas (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), etcétera, entonces las coordenadas del centro de masa están dadas por

$$x_{\text{cm}} = \frac{\Sigma\, x_i m_i}{\Sigma\, m_i} \qquad y_{\text{cm}} = \frac{\Sigma\, y_i m_i}{\Sigma\, m_i} \qquad z_{\text{cm}} = \frac{\Sigma\, z_i m_i}{\Sigma\, m_i}$$

donde las sumas se extienden sobre toda la composición del objeto. En un campo gravitacional uniforme el centro de masa y centro de gravedad coinciden.

PROBLEMAS RESUELTOS

8.1 Una bala B de 8.0 g se dispara horizontalmente hacia el interior de un bloque de madera M de 9.00 kg y se clava en él. El bloque, que puede moverse libremente, adquiere una velocidad de 40 cm/s después del impacto. Encuéntrese la velocidad inicial de la bala.

Considérese el sistema (bloque + bala). La velocidad y por consiguiente la cantidad de movimiento del bloque es cero antes del impacto. La ley de conservación de la cantidad de movimiento establece que

Cantidad de movimiento total antes del impacto = cantidad de movimiento total después del impacto

(cantidad de movimiento de la bala) + (cantidad de movimiento del bloque)
= (cantidad de movimiento de la bala + el bloque)

$$m_B \upsilon_{Bx} + m_M \upsilon_{Mx} = (m_B + m_M)\upsilon_x$$

$$(0.008\,0\ \text{kg})\upsilon_{Bx} + 0 = (9.008\ \text{kg})(0.40\ \text{m/s})$$

donde υ_{Bx} es la velocidad de la bala. Resolviendo $\upsilon_{Bx} = 0.45$ km/s, por tanto, $\vec{\mathbf{v}}_B = 0.45$ km/s —DIRECCIÓN x POSITIVA.

8.2 Una masa de 16 g se mueve en la dirección $+x$ a 30 cm/s, mientras una masa de 4.0 g se mueve en la dirección $-x$ a 50 cm/s. Chocan y quedan unidas. Encuéntrese la velocidad después de la colisión.

Sea la masa de 16 g m_1 y la de 4.0 g m_2.

Tómese la dirección $+x$ como positiva. Esto significa que la velocidad de la masa de 4.0 g tiene un valor escalar de $v_{2x} = -50$ cm/s. Aplíquese la ley de conservación de la cantidad de movimiento al sistema formado por dos cuerpos:

Cantidad de movimiento total antes del impacto = cantidad de movimiento del bloque

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = (m_1 + m_2)v_x$$

$$(0.016 \text{ kg})(0.30 \text{ m/s}) + (0.004\,0 \text{ kg})(-0.50 \text{ m/s}) = (0.020 \text{ kg})v_x$$

$$v_x = +0.14 \text{ m/s}$$

(Nótese que la masa de 4.0 g tiene una cantidad de movimiento negativa.) Resolviendo, se obtiene $\mathbf{v} =$ 0.14 m/s —DIRECCIÓN X POSITIVA.

8.3 Se mueve un ladrillo de 2.0 kg con una velocidad de 6.0 m/s. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza a F necesaria, si se desea detener al ladrillo en un tiempo de 7.0×10^{-4} s?

El problema puede resolverse aplicando la ecuación de impulso:

Impulso sobre el ladrillo = cambio en la cantidad de movimiento de ladrillo

$$F\,\Delta t = mv_f - mv_0$$

$$F(7.0 \times 10^{-4} \text{ s}) = 0 - (2.0 \text{ kg})(6.0 \text{ m/s})$$

de donde $F = -1.7 \times 10^4$ N. El signo negativo indica que la fuerza se opone al movimiento.

8.4 Una bala de 15 g se mueve a 300 m/s al incidir sobre una placa de plástico de 2.0 cm de espesor. Al emerger de la placa su rapidez es de 90 m/s. ¿Cuál es la fuerza promedio que impide su movimiento al pasar a través de la placa de plástico?

Aplicaremos la ecuación de impulso para calcular la F sobre la bala considerando el tiempo Δt como el necesario para pasar a través del plástico. Tomemos como positiva la dirección inicial del movimiento,

$$F\,\Delta t = mv_f - mv_0$$

Para calcular el tiempo Δt consideremos una desaceleración uniforme y utilizando $x = v_{prom}t$, o donde $x = 0.020$ m y $v_{prom} = \frac{1}{2}(v_0 + v_f) = 195$ m/s. De donde $\Delta t = 1.026 \times 10^{-4}$ s. Entonces

$$(F)(1.026 \times 10^{-4} \text{ s}) = (0.015 \text{ kg})(90 \text{ m/s}) - (0.015 \text{ kg})(300 \text{ m/s})$$

con lo cual se obtiene $F = -3.1 \times 10^4$ N como fuerza promedio de retardamiento. (¿Podría resolverse este problema utilizando $F = ma$ en lugar de la ecuación de impulso? ¿Empleando métodos que involucren energía?)

8.5 El núcleo de un átomo determinado tiene una masa de 3.80×10^{-25} kg y se encuentra en reposo. El núcleo es radiactivo, por lo que emite repentinamente una partícula de masa 6.6×10^{-27} kg y rapidez 1.5×10^{7} m/s. Calcúlese la rapidez de retroceso del núcleo, la cual se considera que está hacia la izquierda.

Tómese la dirección de la partícula emitida como positiva. Se da $m_{n0} = 3.80 \times 10^{-25}$ kg, $m_p = 6.6 \times 10^{-27}$ kg, $m_{nf} = m_{n0} - m_p = 3.73 \times 10^{-25}$ kg y $v_{pf} = 1.5 \times 10^{7}$ m/s; encuéntrese la rapidez final del núcleo, v_{nf}. La cantidad de movimiento del sistema se conserva durante la explosión.

$$\text{Cantidad de movimiento antes} = \text{cantidad de movimiento después}$$

$$0 = m_{nf}v_{nf} + m_p v_{pf}$$

$$0 = (3.73 \times 10^{-25}\ \text{kg})(v_{nf}) + (6.6 \times 10^{-27}\ \text{kg})(1.5 \times 10^{7}\ \text{m/s})$$

Resolviendo nos da

$$-v_{nf} = \frac{(6.6 \times 10^{-27}\ \text{kg})(1.5 \times 10^{7}\ \text{m/s})}{3.73 \times 10^{-25}\ \text{kg}} = \frac{10.0 \times 10^{-20}}{3.73 \times 10^{-25}} = 2.7 \times 10^{5}\ \text{m/s}$$

El hecho de que éste sea negativo indica que el vector velocidad del núcleo apunta en la dirección negativa, opuesto a la velocidad de la partícula.

8.6 Una pelota de 0.25 kg se mueve a 13 m/s en la dirección del eje $+x$ cuando es golpeada por un bat. Su velocidad final es de 19 m/s en la dirección $-x$. El bat actúa sobre la pelota por 0.010 s. Calcúlese la fuerza promedio F que ejerce el bat sobre la pelota.

Tenemos $v_0 = 13$ m/s y $v_f = -19$ m/s. Tomando la dirección inicial del movimiento como positiva, de la ecuación de impulso tenemos

$$F\,\Delta t = mv_f - mv_0$$

$$F(0.010\ \text{s}) = (0.25\ \text{kg})(-19\ \text{m/s}) - (0.25\ \text{kg})(13\ \text{m/s})$$

de donde $F = -0.80$ kN.

8.7 Dos muchachas, cuyas masas son m_1 y m_2, se encuentran en reposo sobre patines de ruedas, tomadas de las manos y frente a frente. La muchacha 1 empuja repentinamente a la muchacha 2, la cual se desplazará hacia atrás con una rapidez v_2. Suponiendo que las muchachas se deslizan libremente sobre sus patines, ¿con qué rapidez se moverá la muchacha 1?

Se considera a las dos muchachas como el sistema a estudiar. El problema establece que la muchacha 2 se mueve "hacia atrás", sea ésta la dirección negativa; por lo tanto, moverse "hacia adelante" será la dirección positiva. Dado que no existe fuerza externa sobre el sistema (el empujón de una muchacha sobre la otra es una fuerza interna), la cantidad de movimiento del sistema se conserva:

$$\text{Cantidad de movimiento antes} = \text{cantidad de movimiento después}$$

$$0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

de donde

$$v_1 = -\frac{m_2}{m_1} v_2$$

La muchacha 1 retrocede con esta rapidez. Nótese que si m_2/m_1 es muy grande, entonces v_1 es mucho más grande que v_2. La velocidad de la muchacha 1, $\vec{\mathbf{v}}_1$, se dirige hacia la dirección positiva (hacia adelante). La velocidad de la muchacha 2, $\vec{\mathbf{v}}_2$, apunta hacia la dirección negativa (hacia atrás). Si se ponen números en la ecuación, v_2 tendría que ser negativo y v_1 resultaría positivo.

8.8 Como se muestra en la figura 8-1, una bala de 15 g es disparada horizontalmente hacia un bloque de madera de 3.000 kg que está suspendido de un cordel largo. La bala se incrusta en el bloque. Calcúlese la velocidad de la bala si, debido al impacto, el bloque se balancea y sube 10 cm por arriba de su nivel inicial.

Primero consideremos la colisión del bloque y la bala. Durante la colisión, la cantidad de movimiento se conserva, así

$$\text{Cantidad de movimiento inmediatamente antes} = \text{cantidad de movimiento inmediatamente después}$$

$$(0.015 \text{ kg})v + 0 = (3.015 \text{ kg})V$$

donde v es la rapidez inicial de la bala y V es la rapidez del bloque y la bala inmediatamente después de la colisión.

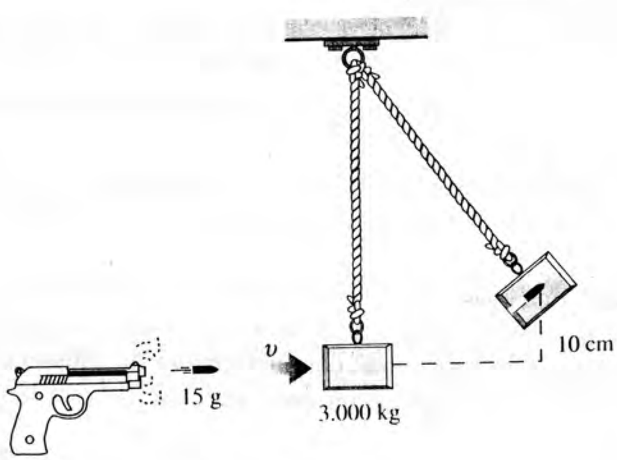


Fig. 8-1

Tenemos dos incógnitas en esta ecuación. Para determinar la otra ecuación, podemos utilizar el hecho de que el bloque, al balancearse, sube 10 cm. Si tomamos que $EP_G = 0$ para el nivel inicial del bloque, por conservación de energía

$$\text{EC inmediatamente después de la colisión} = EP_G \text{ final}$$

$$\tfrac{1}{2}(3.015\text{ kg})V^2 = (3.015\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2)(0.10\text{ m})$$

De donde determinamos que $V = 1.40$ m/s. Sustituyendo en la ecuación anterior, obtenemos para la rapidez de la bala $\upsilon = 0.28$ km/s.

Nótese que no se puede escribir la ecuación de la energía como: $\frac{1}{2}m\upsilon^2 = (m + M)gh$, donde $m =$ 0.015 kg y $M = 3.000$ kg debido a la energía perdida (a través de la fricción) en el proceso de la colisión.

8.9 **Tres masas se colocan sobre el eje de la x: 200 g en $x = 0$, 500 g en $x = 30$ cm y 400 g en $x =$ 70 cm. Calcúlese su centro de masa.**

$$x_{cm} = \frac{\Sigma x_i m_i}{\Sigma m_i} = \frac{(0)(0.20\text{ kg}) + (0.30\text{ m})(0.50\text{ kg}) + (0.70\text{ m})(0.40\text{ kg})}{(0.20 + 0.50 + 0.40)\text{ kg}} = 0.39\text{ m}$$

Las coordenadas y y z del centro de masa son iguales a cero.

8.10 **Un sistema en el plano xy lo constituyen las siguientes masas: 4.0 kg en las coordenadas ($x = 0$, $y = 5.0$ m), 7.0 kg en (3.0 m, 8.0 m) y 5.0 kg en (–3.0 m, –6.0 m). Determínese la posición de su centro de masa.**

$$x_{cm} = \frac{\Sigma x_i m_i}{\Sigma m_i} = \frac{(0)(4.0\text{ kg}) + (3.0\text{ m})(7.0\text{ kg}) + (-3.0\text{ m})(5.0\text{ kg})}{(4.0 + 7.0 + 5.0)\text{ kg}} = 0.38\text{ m}$$

$$y_{cm} = \frac{\Sigma y_i m_i}{\Sigma m_i} = \frac{(5.0\text{ m})(4.0\text{ kg}) + (8.0\text{ m})(7.0\text{ kg}) + (-6.0\text{ m})(5.0\text{ kg})}{16\text{ kg}} = 2.9\text{ m}$$

y $z_{cm} = 0$.

8.11 **Dos carros de ferrocarril idénticos están sobre un riel horizontal, con una distancia D entre sus centros. Por medio de un cable entre ellos, un malacate es utilizado para jalarlos a los dos juntos. *a*) Describa su movimiento relativo. *b*) Repítase considerando que la masa de uno de los carros es tres veces la masa del otro.**

Las fuerzas debidas al cable sobre los dos carros son fuerzas internas para el sistema de ambos carros. La fuerza externa neta sobre el sistema es cero, por lo que su centro de masa no se mueve, así que cada carro se desplaza acercándose al otro. Tomando el origen del sistema de coordenadas en el centro de masa, sabemos

$$x_{cm} = 0 = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

donde x_1 y x_2 son las posiciones de los centros de los dos carros.

a) Si $m_1 = m_2$, esta ecuación se reduce a

$$0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{o} \quad x_1 = -x_2$$

Ambos carros se aproximan al centro de masa, el cual está originalmente a la mitad del camino entre los dos carros (esto es, a $D/2$ de cada uno), en tal forma que sus centros siempre están equidistantes de él.

b) Si $m_1 = 3m_2$, entonces tenemos

$$0 = \frac{3m_2x_1 + m_2x_2}{3m_2 + m_2} = \frac{3x_1 + x_2}{4}$$

de donde $x_1 = -x_2/3$. Los dos carros se aproximan al centro de masa de tal forma que el carro más pesado siempre se encuentra un tercio más alejado de lo que está el carro ligero.

Primero, dado que $|x_1| + |x_2| = D$, tenemos que $x_2/3 + x_2 = D$. Por lo que inicialmente m_2 se encuentra a una distancia $x_2 = 3D/4$ del centro de masa, y m_1 estaba a una distancia $D/4$ de éste.

8.12 Un péndulo que consiste de una pelota de masa m en reposo en la posición que se muestra en la Fig. 8-2 golpea un bloque de masa M. El bloque se desliza una distancia D antes de detenerse bajo la acción de una fuerza de fricción de $0.20Mg$. Calcúlese la distancia D si la pelota rebota formando un ángulo de 20°.

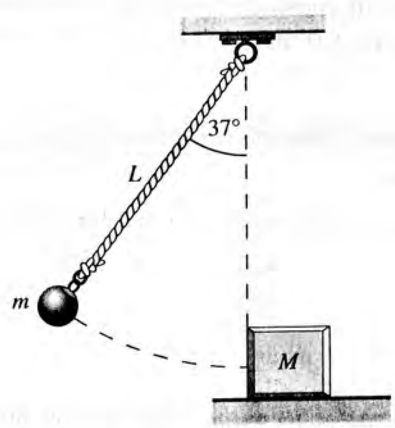


Fig. 8-2

La pelota del péndulo cae una altura $(L - L \cos 37°) = 0.201\ L$ y en el rebote llega a una altura de $(L - L \cos 20°) = 0.060\ 3\ L$. Dado que para la pelota $(mgh)_{\text{arriba}} = (\frac{1}{2}mv^2)_{\text{abajo}}$, su rapidez en la parte más baja es $v = \sqrt{2gh}$.

La EC no se conserva en la colisión, pero la cantidad de movimiento sí. Durante la colisión, Cantidad de movimiento inmediatamente antes = cantidad de movimiento inmediatamente después

$$m\sqrt{2g(0.201\,L)} + 0 = -m\sqrt{2g(0.0603\,L)} + MV$$

donde V es la velocidad del bloque inmediatamente después de la colisión. (Nótese el signo menos en la cantidad de movimiento de la pelota al rebotar.) Resolviendo la ecuación, encontramos

$$V = \frac{m}{M}0.981\sqrt{gL}$$

El bloque utiliza su EC traslacional al realizar trabajo en contra de la fricción cuando se desliza una distancia D. Por lo tanto,

$$\tfrac{1}{2}MV^2 = F_f D \quad \text{o} \quad \tfrac{1}{2}M(0.963gL)\left(\frac{m}{M}\right)^2 = (0.2Mg)(D)$$

de donde $D = 2.4(m/M)^2L$.

8.13 Dos pelotas de igual masa se aproximan al origen del sistema de coordenadas: una a 2.00 m/s a lo largo del eje $+y$ y la otra a 3.00 m/s a lo largo del eje $-x$. Después de chocar, una de las pelotas se mueve a 1.20 m/s a lo largo del eje $+x$. Calcúlense las componentes de la velocidad de la otra pelota.

Tómese como positivas las direcciones *arriba* y *derecha*. Como la cantidad de movimiento se conserva en la colisión, podemos escribir

$$(\text{cantidad de movimiento antes})_x = (\text{cantidad de movimiento después})_x$$

o

$$m(3.00\text{ m/s}) + 0 = m(1.20\text{ m/s}) + mv_x$$

y

$$(\text{cantidad de movimiento antes})_y = (\text{cantidad de movimiento después})_y$$

o

$$0 + m(-2.00\text{ m/s}) = 0 + mv_y$$

(¿Por qué el signo menos?) Resolviendo, encontramos que $v_x = 1.80$ m/s y que $v_y = -2.00$ m/s.

8.14 Un camión de 7500 kg que viaja a 5.0 m/s hacia el este choca con un automóvil de 1500 kg que se mueve a 20 m/s en dirección 30° suroeste. Después de la colisión, los dos vehículos quedan unidos. ¿Con qué rapidez y en qué dirección se mueven los vehículos después del impacto?

Las cantidades de movimiento originales se muestran en la Fig. 8-3*a*, la cantidad de movimiento final $M\vec{v}$ se muestra en la Fig. 8-3*b*. La cantidad de movimiento se conserva en ambas direcciones norte y este. Por lo tanto,

$$(\text{cantidad de movimiento antes})_E = (\text{cantidad de movimiento después})_E$$

$$(7500\text{ kg})(5.0\text{ m/s}) - (1500\text{ kg})[(20\text{ m/s})\cos 30°] = Mv_E$$

donde $M = 7500\text{ kg} + 1500\text{ kg} = 9000\text{ kg}$, y v_E es la componente hacia el este de la velocidad de los vehículos.

$$(\text{cantidad de movimiento antes})_N = (\text{cantidad de movimiento después})_N$$

$$(7500\text{ kg})(0) - (1500\text{ kg})[(20\text{ m/s})\text{ sen } 30°] = Mv_N$$

De la primera ecuación se tiene que $v_E = 1.28\text{ m/s}$, y de la segunda se obtiene que $v_N = -1.67\text{ m/s}$. La velocidad resultante es

$$v = \sqrt{(1.67\text{ m/s})^2 + (1.28\text{ m/s})^2} = 2.1\text{ m/s}$$

El ángulo θ que se observa en la Fig. 8-3*b* es

$$\theta = \arctan\left(\frac{1.67}{1.28}\right) = 53°$$

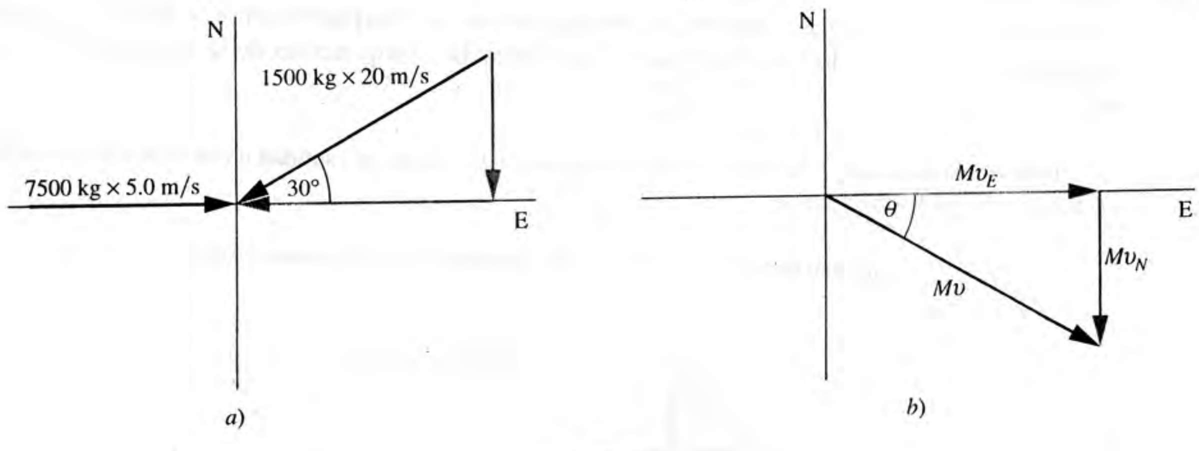


Fig. 8-3

8.15 Dos pelotas idénticas chocan de frente. La velocidad inicial de una es 0.75 m/s —HACIA EL ESTE, mientras que la velocidad de la otra es -0.43 m/s —HACIA EL OESTE. Si el choque es perfectamente elástico, ¿cuál es la velocidad final de cada pelota?

Debido a que el choque es frontal, todo el movimiento se lleva a cabo en una línea recta. Tómese el este como la dirección positiva y sea la masa de cada pelota m. En un choque se conserva la cantidad de movimiento, así que puede escribirse.

$$\text{Cantidad de movimiento antes} = \text{cantidad de movimiento después}$$
$$m(0.75\ \text{m/s}) + m(-0.43\ \text{m/s}) = m\upsilon_1 + m\upsilon_2$$

donde υ_1 y υ_2 son las velocidades finales. Esta ecuación se simplifica a

$$0.32\ \text{m/s} = \upsilon_1 + \upsilon_2 \tag{1}$$

Ya que la colisión es perfectamente elástica, la EC también se conserva. Así que,

$$\text{EC antes} = \text{EC después}$$
$$\tfrac{1}{2}m(0.75\ \text{m/s})^2 + \tfrac{1}{2}m(0.43\ \text{m/s})^2 = \tfrac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \tfrac{1}{2}m\upsilon_2^2$$

Esta ecuación se simplifica a

$$0.747 = \upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 \tag{2}$$

Despejando υ_2 en (*1*) tenemos $\upsilon_2 = 0.32 - \upsilon_1$, sustituyendo en (*2*). Se obtiene

$$0.747 = (0.32 - \upsilon_1)^2 + \upsilon_1^2$$

con lo cual da

$$2\upsilon_1^2 - 0.64\upsilon_1 - 0.645 = 0$$

Utilizando la fórmula cuadrática, se obtiene

$$\upsilon_1 = \frac{0.64 \pm \sqrt{(0.64)^2 + 5.16}}{4} = 0.16 \pm 0.59\ \text{m/s}$$

de donde $\upsilon_1 = 0.75$ m/s o bien -0.43 m/s. Sustituyendo en la ecuación (*1*) obtenemos $\upsilon_2 = -0.43$ m/s, o bien 0.75 m/s.

Existen dos soluciones posibles:

$$(\upsilon_1 = 0.75\ \text{m/s},\ \upsilon_2 = -0.43\ \text{m/s}) \qquad \text{y} \qquad (\upsilon_1 = -0.43\ \text{m/s},\ \upsilon_2 = 0.75\ \text{m/s})$$

La primera posibilidad debe descartarse porque implica que las pelotas continúan su movimiento sin interactuar; esto significa que no ocurre choque. La respuesta correcta es, por ende, $\upsilon_1 = -0.43$ m/s, y $\upsilon_2 = 0.75$ m/s, lo cual significa que en un choque perfectamente elástico, cuando la colisión es frontal entre masas iguales, los dos cuerpos intercambian sus velocidades. De donde, $\vec{\mathbf{v}}_1 = 0.43$ m/s —HACIA EL OESTE y $\vec{\mathbf{v}}_2 = 0.75$ m/s —HACIA EL ESTE.

Método alternativo

Si se recuerda que $e = 1$ para un choque perfectamente elástico, frontal, entonces

$$e = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{u_1 - u_2} \quad \text{se convierte en} \quad 1 = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{(0.75\ \text{m/s}) - (-0.43\ \text{m/s})}$$

lo cual da

$$\upsilon_2 - \upsilon_1 = 1.18\ \text{m/s} \tag{3}$$

Las ecuaciones (*1*) y (*3*) determinan υ_1 y υ_2 en forma única.

8.16 Una pelota de 1.0 kg moviéndose a 12 m/s choca frontalmente con una pelota de 2.0 kg que se desplaza en la misma dirección pero en sentido contrario a 24 m/s. Encuéntrese la velocidad de cada una de las pelotas después del impacto si *a*) $e = 2/3$, *b*) las pelotas quedan unidas y *c*) el choque es perfectamente elástico.

Para los tres casos, la cantidad de movimiento se conserva y así podemos escribir

$$\text{Cantidad de movimiento antes} = \text{cantidad de movimiento después}$$

$$(1.0\text{ kg})(12\text{ m/s}) + (2.0\text{ kg})(-24\text{ m/s}) = (1.0\text{ kg})\upsilon_1 + (2.0\text{ kg})\upsilon_2$$

la cual se convierte en

$$-36\text{ m/s} = \upsilon_1 + 2\upsilon_2$$

a) En este caso $e = 2/3$ y así

$$e = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{u_1 - u_2} \quad \text{se convierte en} \quad \frac{2}{3} = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{(12\text{ m/s}) - (-24\text{ m/s})}$$

de donde $24\text{ m/s} = \upsilon_2 - \upsilon_1$. Combinando ésta con la ecuación de cantidad de movimiento encontrada anteriormente, nos da $\upsilon_2 = -4.0$ m/s y $\upsilon_1 = -28$ m/s.

b) En este caso $\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon$ y así la ecuación de cantidad de movimiento se transforma en

$$3\upsilon = -36\text{ m/s} \qquad \text{o} \qquad \upsilon = -12\text{ m/s}$$

c) Aquí $e = 1$ y por lo tanto

$$e = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{u_1 - u_2} \quad \text{se convierte en} \quad 1 = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{(12\text{ m/s}) - (-24\text{ m/s})}$$

de donde $\upsilon_2 - \upsilon_1 = 36$ m/s. Sumando esta ecuación a la de cantidad de movimiento se obtiene $\upsilon_2 = 0$. Utilizando este valor para υ_2, entonces nos da $\upsilon_1 = -36$ m/s.

8.17 Se deja caer una pelota desde una altura h sobre un piso de loseta, y rebota a una altura de $0.65h$. Encuéntrese el coeficiente de restitución entre la pelota y el piso.

Las velocidades inicial y final del piso, u_1 y υ_1, son cero. Por lo tanto,

$$e = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{u_1 - u_2} - \frac{\upsilon_2}{u_2}$$

A partir del intercambio de EP_G y EC puede escribirse lo siguiente

$$mgh = \tfrac{1}{2}mu_2^2 \quad \text{y} \qquad mg(0.65h) = \tfrac{1}{2}m\upsilon_2^2$$

Así es que si se considera la caída vertical *hacia abajo* como positiva, $u_2 = \sqrt{2gh}$ y υ_2 cantidad de movimiento después $= -\sqrt{1.30gh}$. Sustituyendo se tiene

$$e = \frac{\sqrt{1.30gh}}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{0.65} = 0.81$$

8.18 Las dos bolas que se muestran en la Fig. 8-4 chocan y rebotan como se muestra. *a*) ¿Cuál es la velocidad final de la bola de 500 g si la bola de 800 g tiene una rapidez de 15 cm/s después del choque? *b*) ¿Es el choque perfectamente elástico?

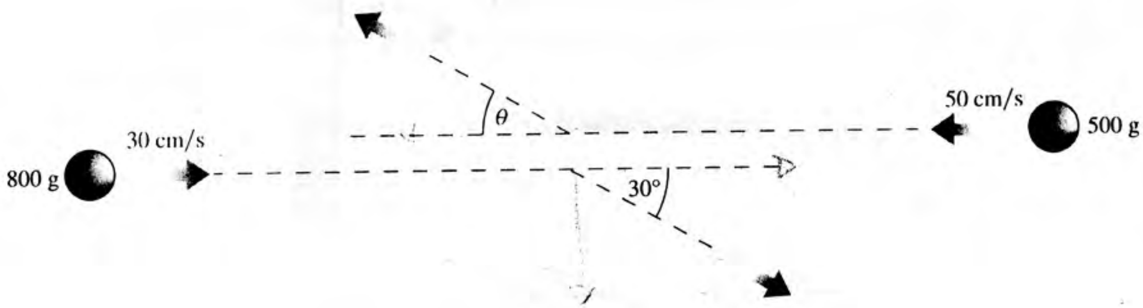


Fig. 8-4

a) De la ley de conservación de la cantidad de movimiento,

$$(\text{cantidad de movimiento antes})_x = (\text{cantidad de movimiento después})_x$$

$$(0.80\text{ kg})(0.30\text{ m/s}) + (0.50\text{ kg})(-0.5\text{ m/s}) = (0.80\text{ kg})[(0.15\text{ m/s})\cos 30°] + (0.50\text{ kg})v_x$$

de donde $v_x = -0.228$ m/s. Tomando la dirección hacia arriba como positiva

$$(\text{cantidad de movimiento antes})_y = (\text{cantidad de movimiento después})_y$$

$$0 = (0.80\text{ kg})[-(0.15\text{ m/s})\text{ sen }30°] + (0.50\text{ kg})v_y$$

de donde v_y, = 0.120 m/s. Entonces

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-0.228\text{ m/s})^2 + (0.120\text{ m/s})^2} = 0.26\text{ m/s}$$

y $\vec{v}$ = 0.26 m/s —HACIA LA DERECHA.

También para el ángulo θ, que se muestra en la Fig. 8-4,

$$\theta = \arctan\left(\frac{0.120}{0.228}\right) = 28°$$

b)

$$\text{EC total antes} = \tfrac{1}{2}(0.80\text{ kg})(0.30\text{ m/s})^2 + \tfrac{1}{2}(0.50\text{ kg})(0.50\text{ m/s})^2 = 0.099\text{ J}$$

$$\text{EC total después} = \tfrac{1}{2}(0.80\text{ kg})(0.15\text{ m/s})^2 + \tfrac{1}{2}(0.50\text{ kg})(0.26\text{ m/s})^2 = 0.026\text{ J}$$

Como puede observarse, hay pérdida de EC durante el choque y, por lo tanto, éste no es perfectamente elástico.

8.19 ¿Qué fuerza se ejerce sobre un plato plano y fijo, sostenido perpendicularmente a la salida de un chorro de agua, como se muestra en la Fig. 8–5? La rapidez horizontal del agua es 80 cm/s y 30 mL de agua golpean el plato cada segundo. Considérese que el agua se mueve paralelamente al plato después de que choca con él. Un centímetro cúbico de agua tiene una masa de 1.00 g.

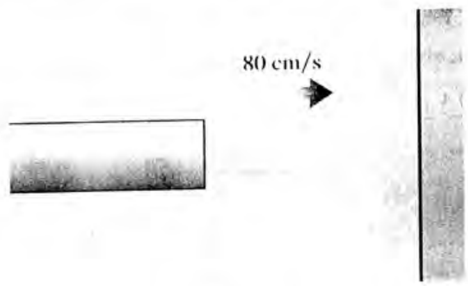


Fig. 8-5

El plato ejerce un impulso sobre el agua y cambia su cantidad de movimiento horizontal, por lo tanto puede escribirse,

$$(\text{impulso})_x = \text{cambio en la cantidad de movimiento en la dirección } x$$

$$F_x\,\Delta t = (mv_x)_{\text{final}} - (mv_x)_{\text{inicial}}$$

Sea $t = 1.00$ s y sea m la masa que choca con el plato en 1.00 s, es decir, 30 g. Entonces, la ecuación anterior se convierte en

$$F_x\,(1.00\text{ s}) = (0.030\text{ kg})(0\text{ m/s}) - (0.030\text{ kg})(0.80\text{ m/s})$$

de la cual $F_x = -0.024$ N. Ésta es la fuerza que ejerce el plato sobre el agua. La ley de acción y reacción establece que el agua ejerce una fuerza igual en magnitud, pero de sentido contrario, en el plato.

8.20 Un cohete erguido en su plataforma de lanzamiento apunta en línea recta hacia arriba. Su mecanismo de propulsión se ha activado y expulsa gas a razón de 1500 kg/s. Las moléculas son expulsadas con una rapidez de 50 km/s. ¿Cuánta masa puede tener inicialmente el cohete, si se va a elevar lentamente, debido al empuje de su mecanismo?

Ya que el movimiento de un cohete es despreciable en comparación con la velocidad de los gases expulsados, puede suponerse que el gas se acelera desde el reposo a una rapidez de 50 km/s. El impulso que se requiere para provocar esta aceleración a la masa m del gas es

$$F\Delta t = mv_f - mv_0 = m(50\,000\text{ m/s}) - 0$$

de donde

$$F = (50\,000\text{ m/s})\frac{m}{\Delta t}$$

Pero además, se conoce que la masa expulsada por segundo ($m/\Delta t$) es 1500 kg/s y por lo tanto, la fuerza ejercida en el gas expulsado es

$$F = (50\,000 \text{ m/s})(1500 \text{ kg/s}) = 75 \text{ MN}$$

Una fuerza de reacción igual y opuesta actúa sobre el cohete y éste es el empuje ascendente que experimenta. El mecanismo puede, por consiguiente, soportar un peso de 75 MN y así la masa máxima que tendrá el cohete será

$$M_{\text{cohete}} = \frac{\text{peso}}{g} = \frac{75 \times 10^6 \text{ N}}{9.81 \text{ m/s}^2} = 7.7 \times 10^6 \text{ kg}$$

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

8.21 Por lo general, una pelota de tenis golpeada durante un servicio viaja a alrededor de 51 m/s. Si la pelota se encuentra en reposo en medio del aire al ser golpeada y tiene una masa de 0.058 kg, ¿cuál es el cambio en su cantidad de movimiento al salir de la raqueta? *Resp.* 3.0 kg · m/s

8.22 Durante un juego de futbol, una pelota (cuya masa es de 0.425 kg), la cual está inicialmente en reposo, es pateada por uno de los jugadores. La pelota sale disparada a 26 m/s. Dado que el impacto duró 8.0 ms, ¿cuál fue la fuerza promedio ejercida sobre la pelota? *Resp.* 1.4 kN

8.23 Un camión de carga de 40 000 kg, viaja con una rapidez de 5.0 m/s a lo largo de una pista recta y choca con un camión de carga estacionado de 30 000 kg, quedando enganchado. ¿Cuál será la rapidez de ambos después del impacto? *Resp.* 2.9 m/s

8.24 Un camión de carga de 15 000 kg está viajando por una pista plana a 5.00 m/s. Súbitamente, se dejan caer dentro del camión 5000 kg de carbón. La velocidad del carbón en la dirección horizontal es cero. Encuéntrese la rapidez final del camión. *Resp.* 3.75 m/s

8.25 Se deja caer arena a razón de 2000 kg/min desde la parte final de una tolva sobre una cinta transportadora que se mueve horizontalmente a 250 m/min. Determínese la fuerza necesaria en el motor de la cinta transportadora, despreciando la fricción. *Resp.* 139 N

8.26 Dos cuerpos cuyas masas son 8 y 4 kg se mueven a lo largo del eje x en sentidos opuestos con velocidades de 11 m/s —DIRECCIÓN x POSITIVA y 7 m/s —DIRECCIÓN x NEGATIVA, respectivamente. Después de chocar, los cuerpos se mantienen unidos. Encuéntrese su velocidad después del choque. *Resp.* 5 m/s —DIRECCIÓN x POSITIVA

8.27 Un cañón de 1200 kg montado sobre ruedas, dispara un proyectil de 8.00 kg con una velocidad en la boca del cañón de 600 m/s, formando un ángulo de 30.0° por arriba de la horizontal. Determínese la velocidad horizontal de retroceso. *Resp.* 3.46 m/s

8.28 Tres masas se sitúan en el eje y: una de 2 kg en $y = 300$ cm, otra de 6 kg en $y = 150$ cm y la tercera de 4 kg en $y = -75$ cm. Hállese la posición de su centro de masa. *Resp.* $y = 1$ m

8.29 Cuatro masas están localizadas en el plano xy como a continuación se describe: 300 g en ($x = 0$, $y = 2.0$ m), 500 g en (−2.0 m, −3.0 m), 700 g en (50 cm, 30 cm) y 900 g en (−80 cm, 150 cm). Determínese la posición del centro de masa. *Resp.* $x = -0.57$ m, $y = 0.28$ m

8.30 Una bola de masa m situada en el origen de un sistema de referencia explota y se divide en dos piezas que salen disparadas a lo largo del eje de las x, en sentidos opuestos. Cuando una de las piezas, cuya masa es de $0.270m$, se encuentra en $x = 70$ cm, ¿dónde se encuentra la otra pieza? (*Sugerencia*: ¿qué sucede con el centro de la masa?) *Resp.* En $x = -26$ cm

8.31 Una bola de masa m en reposo se localiza en el origen del sistema de referencia cuando explota y se divide en tres piezas idénticas. En cierto momento, una de las piezas está sobre el eje de x en $x = 40$ cm y otra se encuentra en $x = 20$ cm $y = -60$ cm. ¿Dónde se halla la tercera pieza en ese instante? *Resp.* En $x = -60$ cm, $y = 60$ cm

8.32 Un bloque de madera de 2.0 kg descansa sobre una larga mesa. Una bala de 5.0 g moviéndose horizontalmente con una rapidez de 150 m/s se incrusta en el bloque. Entonces el bloque se desliza 270 cm a lo largo de la mesa y se detiene. *a*) ¿Cuál es la rapidez del bloque inmediatamente después del impacto? *b*) Determínese la fuerza de fricción entre el bloque y la mesa. *Resp.* *a*) 0.37 m/s; *b*) 0.052 N

8.33 Un bloque de madera de 2.0 kg está sobre una mesa. Se dispara una bala de 7.0 g directo a través de un orificio en la mesa, debajo del bloque. La bala se incrusta en el bloque y éste se levanta 2.[illegible] cm por encima de la mesa. ¿Cuál es la velocidad inicial de la bala? *Resp.* 0.64 km/s

8.34 Un camión de carga de 6000 kg viaja hacia el norte a 5.0 m/s y choca con otro camión de carga de 4000 kg que se dirige hacia el oeste a 15 m/s. Si los camiones permanecen unidos después del impacto, ¿con qué rapidez y en qué dirección se moverán inmediatamente después del impacto? *Resp.* 6.7 m/s a 27° al noroeste

8.35 ¿Cuál es la fuerza promedio de resistencia que debe actuar en una masa de 3.0 kg para reducir su rapidez de 65 a 15 cm/s en 0.20 s? *Resp.* 7.5 N

8.36 Una bala de 7.00 g, moviéndose horizontalmente a 200 m/s, choca y pasa a través de una lata delgada de 150 g colocada sobre un poste. Inmediatamente después de la colisión, la lata tiene una rapidez horizontal de 180 cm/s. ¿Cuál fue la rapidez de la bala después de salir de la lata? *Resp.* 161 m/s

8.37 Dos bolas de igual masa, moviéndose con rapidez de 3 m/s, chocan de frente. Encuéntrese la velocidad de cada una después del impacto si *a*) quedan unidas, *b*) el choque es perfectamente elástico, *c*) el coeficiente de restitución es 1/3. *Resp.* *a*) 0 m/s; *b*) cada una rebota a 3 m/s; *c*) cada una rebota a 1 m/s

8.38 Una pelota de 90 g choca a 100 cm/s de frente con otra pelota de 10 g que se encuentra en reposo. Determínese la velocidad de cada una después del impacto, si *a*) quedan unidas, *b*) la colisión es perfectamente elástica, *c*) el coeficiente de restitución es de 0.90. *Resp.* *a*) 90 cm/s; *b*) 80 cm/s, 1.8 m/s; *c*) 81 cm/s, 1.7 m/s

8.39 Se deja caer una pelota sobre un piso horizontal y alcanza una altura de 144 cm en el primer rebote y 81 cm en el segundo. Encuéntrese *a*) el coeficiente de restitución entre la pelota y el piso, *b*) la altura que alcanza en el tercer rebote. *Resp.* *a*) 0.75; *b*) 46 cm

8.40 Dos pelotas idénticas sufren una colisión en el origen de los ejes coordenados. Antes del choque, las componentes de sus velocidades eran ($u_x = 40$ cm/s, $u_y = 0$) y ($u_x = -30$ cm/s, $u_y = 20$ cm/s). Después de la colisión, la primera pelota queda en reposo. Determínense las componentes de la velocidad de la segunda pelota. *Resp.* $\upsilon_x = 10$ cm/s, $\upsilon_y = 20$ cm/s

8.41 Dos pelotas idénticas que viajan paralelas al eje x tienen velocidades de igual magnitud, en sentidos opuestos, de 30 cm/s. Sufren una colisión perfectamente elástica. Después del choque, una de las pelotas se mueve en un ángulo de 30° sobre el eje $+x$. Encuéntrese la rapidez y la velocidad de la otra pelota. *Resp.* 30 cm/s, 30 cm/s a 30° debajo del eje $-x$ (opuesto a la primera pelota)

8.42 *a*) ¿Cuál es el mínimo empuje que deben tener los motores a chorro de un cohete de 2.0×10^5 kg si éste debe ser capaz de elevarse verticalmente desde el suelo? *b*) Si los motores expulsan el combustible a razón de 20 kg/s, ¿con qué rapidez deben de moverse los gases a la salida de los motores? Despréciese el pequeño cambio en la masa del cohete debido al combustible que expulsa. *Resp.* *a*) 20×10^5 N; *b*) 98 km/s

capítulo 9

Movimiento angular en un plano

EL DESPLAZAMIENTO ANGULAR (θ) generalmente se expresa en radianes, grados o revoluciones:

$$1 \text{ rev} = 360° = 2\pi \text{ rad} \qquad \text{o bien} \qquad 1 \text{ rad} = 57.3°$$

Un radián es el ángulo subtendido en el centro del círculo por un arco de igual longitud que el radio del círculo. Así, un ángulo θ en radianes está dado en términos de la longitud del arco s que éste subtiende sobre un círculo de radio r por

$$\theta = \frac{s}{r}$$

La medida en radianes de un ángulo es un número adimensional. Los radianes, como los grados, no son una unidad física; el radián no se puede expresar en términos de metros, kilogramos o segundos. No obstante, se usará la abreviatura rad para recordar que se está trabajando con radianes.

LA VELOCIDAD ANGULAR (ω) de un objeto es la razón con la cual la coordenada angular, el desplazamiento angular θ, cambia con el tiempo. Si θ cambia de θ_0 a θ_f en un tiempo t, entonces la *velocidad angular promedio* es

$$\omega_{prom} = \frac{\theta_f - \theta_0}{t}$$

Las unidades de ω_{prom} son exclusivamente rad/s. También, un sistema de rotación, después de dar una vuelta completa o ciclo, hace un recorrido de 2π rad

$$\omega = 2\pi f$$

donde f es la *frecuencia de rotación* en rev/s, rotaciones por segundo o ciclos por segundo. En consecuencia, ω también se conoce como *frecuencia angular*. A ω se le puede asociar una dirección, y, de este modo, crear una cantidad vectorial $\vec{\omega}$. Así, si los dedos de la mano derecha se curvan en la dirección de la rotación, el pulgar apunta a lo largo del eje de rotación en la dirección de $\vec{\omega}$, el vector *velocidad angular*.

LA ACELERACIÓN ANGULAR (α) de un objeto es la razón con la cual la velocidad angular cambia con el tiempo. Si la velocidad angular cambia uniformemente de ω_0 a ω_f en un tiempo t, entonces la *aceleración angular* es constante y

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{t}$$

Las unidades típicas de α son rad/s^2, rev/min^2, etc. Es posible asociar una dirección a $\Delta\omega$ y, por lo tanto, a α, especificando de este modo el vector aceleración angular $\vec{\alpha}$, pero no necesitaremos hacerlo en lo que sigue.

LAS ECUACIONES PARA EL MOVIMIENTO ANGULAR UNIFORMEMENTE ACELERADO son análogas a las del movimiento lineal uniformemente acelerado. En la notación acostumbrada, se tiene:

Lineal	Angular
$\upsilon_{prom} = \frac{1}{2}(\upsilon_0 + \upsilon_f)$	$\omega_{prom} = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega_f)$
$x = \upsilon_{prom}t$	$\theta = \omega_{prom}t$
$\upsilon_f = \upsilon_0 + at$	$\omega_f = \omega_0 + \alpha t$
$\upsilon_f^2 = \upsilon_0^2 + 2ax$	$\omega_f^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$
$x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

Tomándolas por separado, la segunda ecuación es la definición de velocidad promedio, y es válida, sea la aceleración constante o no.

RELACIONES ENTRE CANTIDADES ANGULARES TANGENCIALES: Cuando una rueda de radio r gira sobre su propio eje, un punto en el borde de la rueda se puede describir en términos de la distancia circular s que se ha desplazado, su rapidez tangencial υ y su aceleración tangencial a_T. Estas cantidades están relacionadas con las cantidades angulares θ, ω y α, que describen la rotación de la rueda a través de las relaciones

$$s = r\theta \qquad \upsilon = r\omega \qquad a_T = r\alpha$$

teniendo cuidado de que las medidas sean en radianes para θ, ω y α. Con un simple razonamiento se puede demostrar que s es la longitud de una banda enredada en la rueda, o bien la distancia que la rueda avanzaría (sin resbalar) si estuviera en libertad de hacerlo. En tal caso, υ y a_T son la rapidez y aceleración de un punto en la banda o del centro de la rueda.

ACELERACIÓN CENTRÍPETA (a_C): Un punto de masa m que se mueve con rapidez constante v en un círculo de radio r está siendo acelerado. Aunque la magnitud de su velocidad lineal no cambia, la dirección de la velocidad está cambiando continuamente. Este cambio en la velocidad da origen a una aceleración a_C de la masa, dirigida hacia el centro del círculo. A esta aceleración se le llama *centrípeta;* su valor está dado por

$$ac = \frac{\text{rapidez tangencial}}{\text{radio de la trayectoria circular}} = \frac{v^2}{r}$$

donde v es la rapidez de la masa en su desplazamiento perimetral en el círculo.

Como $v = r\omega$, también se tiene $a_C = r\omega^2$, donde ω debe estar en rad/s. Advierta que, en física, es común usar la palabra "aceleración" como una cantidad escalar o vectorial. Por fortuna, suele no haber ambigüedad.

LA FUERZA CENTRÍPETA ($\vec{\mathbf{F}}_C$) es la fuerza no balanceada que debe actuar sobre una masa m que se mueve en una trayectoria circular de radio r para proporcionarle una aceleración centrípeta v^2/r. De la ecuación $F = ma$, se tiene

$$F_C = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2$$

en donde $\vec{\mathbf{F}}_C$ debe estar dirigida al centro de la trayectoria circular.

PROBLEMAS RESUELTOS

9.1 Expresar cada una de las siguientes cantidades en medidas angulares: *a*) 28°, *b*) $\frac{1}{4}$ rev/s, *c*) 2.18 rad/s².

a)
$$28° = (28°)\left(\frac{1\text{ rev}}{360°}\right) = 0.078\text{ rev}$$
$$= (28°)\left(\frac{2\pi\text{ rad}}{360°}\right) = 0.49\text{ rad}$$

b)
$$\frac{1}{4}\frac{\text{rev}}{\text{s}} = \left(0.25\frac{\text{rev}}{\text{s}}\right)\left(\frac{360°}{1\text{ rev}}\right) = 90°/\text{s}$$
$$= \left(0.25\frac{\text{rev}}{\text{s}}\right)\left(\frac{2\pi\text{ rad}}{1\text{ rev}}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$ $\to 1{,}57\ \text{rad/s}$

c)
$$2.18\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} = \left(2.18\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right)\left(\frac{360°}{2\pi\text{ rad}}\right) = 125°/\text{s}^2$$
$$= \left(2.18\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right)\left(\frac{1\text{ rev}}{2\pi\text{ rad}}\right) = 0.347\frac{\text{rev}}{\text{s}^2}$$

9.2 La lenteja de un péndulo de 90 cm de longitud se balancea en un arco de 15 cm, como se muestra en la Fig. 9-1. Encuéntrese el ángulo de oscilación θ, en radianes y en grados.

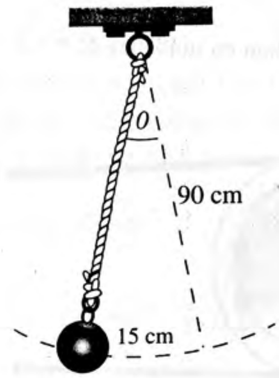


Fig. 9-1

Recuerde que $s = r\theta$ sólo se aplica a ángulos medidos en radianes. Entonces, en radianes

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{0.15\,\text{m}}{0.90\,\text{m}} = 0.167\,\text{rad} = 0.17\,\text{rad}$$

Entonces en grados

$$\theta = (0.167\,\text{rad}) = \left(\frac{360°}{2\pi\,\text{rad}}\right) = 9.6°$$

9.3 Un ventilador gira a razón de 900 rpm (rev/min). *a*) Calcular la rapidez angular de un punto que se encuentra en una de las aspas del ventilador. *b*) Determínese la rapidez tangencial del extremo del aspa, si la distancia desde el centro al extremo es de 20.0 cm.

a)
$$f = 900\,\frac{\text{rev}}{\text{min}} = 15.0\,\frac{\text{rev}}{\text{s}}$$

y, puesto que $\omega = 2\pi f$

$$\omega = 94.2\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

para cualquier punto del aspa.

b) La rapidez tangencial es ωr, donde ω debe estar en radianes. Por tanto,

$$v = \omega r = (94.2\,\text{rad/s})(0.200\,\text{m}) = 18.8\,\text{m/s}$$

Nótese que el radián, que no es una unidad real, no aparece en el resultado final.

9.4 Una banda pasa por una rueda de radio 25 cm, como se muestra en la Fig. 9-2. Si un punto en la banda tiene una rapidez de 5 m/s, ¿qué tan rápido gira la rueda?

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{5.0\ \text{m/s}}{0.25\ \text{m}} = 20\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Por regla general, los valores de ω resultan en unidades de s^{-1}; los radianes deben usarse apropiadamente en la resolución del problema.

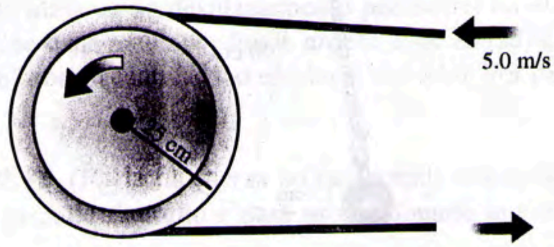


Fig. 9-2

9.5 Una rueda de 40 cm de radio gira sobre su eje, que está fijo. Su rapidez se incrementa uniformemente desde el reposo hasta una rapidez de 900 rpm en un tiempo de 20 s. Encontrar *a*) la aceleración angular de la rueda y *b*) la aceleración tangencial de un punto que se encuentra en el borde.

a) Como la aceleración es constante, podemos usar la definición $\alpha = (\omega_f - \omega_0)/t$ para obtener

$$\alpha = \frac{\left(2\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{rev}}\right)\left(\frac{900\ \text{rev}}{60\ \text{s}}\right) - \left(2\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{rev}}\right)\left(0\ \frac{\text{rev}}{\text{s}}\right)}{20\ \text{s}} = 4.7\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

b) Entonces

$$a_T = r\alpha = (0.40\ \text{m})\left(4.7\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right) = 1.88\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1.9\ \text{m/s}^2$$

9.6 Una polea de 5.0 cm de radio, instalada en un motor, está girando a 30 rev/s y disminuye su velocidad uniformemente a 20 rev/s en 2.0 s. Calcular *a*) la aceleración angular del motor, *b*) el número de revoluciones que efectúa en este tiempo y *c*) la longitud de la banda que se enreda durante este lapso.

a) $$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{t} = 2\pi\ \frac{(20-30)\ \text{rad/s}}{2.0\ \text{s}} = -10\pi\ \text{rad/s}^2$$

b) $$\theta = \omega_{prom}t = \tfrac{1}{2}(\omega_f + \omega_0) = \tfrac{1}{2}(100\pi \text{ rad/s})(2.0 \text{ s}) = 100\pi \text{ rad}$$

c) Con $\theta = 314$ rad

$$s = r\theta = (0.050 \text{ m})(314 \text{ rad}) = 16 \text{ m}$$

9.7 Un automóvil tiene llantas de 30 cm de radio. Parte del reposo y acelera uniformemente hasta una rapidez de 15 m/s en un tiempo de 8.0 s. Encontrar la aceleración angular de las llantas y el número de vueltas que da una llanta en este tiempo.

Sabemos que $a_T = (v_f - v_0)/t$, por tanto

$$a_T = \frac{15 \text{ m/s}}{8.0 \text{ s}} = 1.875 \text{ m/s}^2$$

Entonces $a = r\alpha$ da

$$\alpha = \frac{a_T}{r} = \frac{1.875 \text{ m/s}^2}{0.30 \text{ m}} = 6.2 \text{ rad/s}^2$$

Nótese que se han usado las unidades angulares correctas, los radianes.

Ahora podemos utilizar $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ para calcular

$$\theta = 0 + \tfrac{1}{2}(6.2 \text{ rad/s}^2)(8.0 \text{ s})^2 = 200 \text{ rad}$$

y

$$(200 \text{ rad})\left(\frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}}\right) = 32 \text{ rev}$$

9.8 La centrífuga de secado de una lavadora que gira a 900 rpm frena uniformemente a 300 rpm mientras efectúa 50 revoluciones. Calcular *a)* la aceleración angular y *b)* el tiempo requerido para completar las 50 revoluciones.

Fácilmente se encuentra que 900 rev/min = 15.0 rev/s = 30.0π rad/s y 300 rev/min = 5.00 rev/s = 10.0π rad/s.

a) De la ecuación $\omega_f^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$, tenemos

$$\alpha = \frac{\omega_f^2 - \omega_0^2}{2\theta} = \frac{(10.0\pi \text{ rad/s})^2 - (30.0\pi \text{ rad/s})^2}{2(100\pi \text{ rad})} = -4.0\pi \text{ rad/s}^2$$

b) Como $\omega_{prom} = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega_f) = 20.0\pi$ rad/s, $\theta = \omega_{prom}t$ da

$$t = \frac{\theta}{\omega_{prom}} = \frac{100\pi \text{ rad}}{20.0\pi \text{ rad/s}} = 5.0 \text{ s}$$

9.9 Un objeto de 200 g se amarra al extremo de una cuerda haciéndolo girar en un círculo horizontal de radio 1.20 m a razón de 3.0 rev/s. Considérese que la cuerda se encuentra en posición horizontal, es decir, el efecto de la gravedad se puede despreciar. Determínense *a*) la aceleración del objeto y *b*) la tensión en la cuerda.

a) El objeto no acelera tangencialmente a la circunferencia, pero sufre una aceleración radial o centrípeta dada por

$$a_C = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

donde ω debe tener los radianes como unidad. Puesto que $\omega = 3.0$ rev/s $= 6.0\pi$ rad/s,

$$a_C = (6.0\pi \text{ rad/s})^2(1.20 \text{ m}) = 426 \text{ m/s}^2 = 0.43 \text{ km/s}^2$$

b) Para producir la aceleración calculada en *a*), la cuerda debe tirar de la masa de 0.200 kg con una fuerza centrípeta dada por

$$F_C = ma_C = (0.200 \text{ kg})(426 \text{ m/s}^2) = 85 \text{ N}$$

Ésta es la tensión en la cuerda.

9.10 ¿Cuál es la máxima rapidez con la que un automóvil puede tomar una curva de 25 m de radio en un camino plano si el coeficiente de fricción estática entre las llantas y la carretera es de 0.80?

La fuerza radial requerida para mantener al auto en la curva (fuerza centrípeta) es proporcionada por la fuerza de fricción entre las llantas y el camino. Si la masa del auto es m, entonces la máxima fuerza de fricción (en este caso la centrípeta) es $0.80mg$; ésta surge cuando el auto se encuentra a punto de derrapar y volcarse. Por tanto, la máxima rapidez está dada por

$$\frac{mv^2}{r} = 0.80mg \quad \text{o bien} \quad v = \sqrt{0.80gr} = \sqrt{(0.80)(9.81 \text{ m/s}^2)(25 \text{ m})} = 14 \text{ m/s}$$

9.11 Una nave espacial se encuentra en órbita alrededor de la Luna a una altura de 20 000 m. Suponga que solamente la atracción gravitacional lunar actúa sobre ella. Encontrar la rapidez y el tiempo que tarda en completar una órbita. Para la Luna, $m_L = 7.34 \times 10^{22}$ kg y $r = 1.738 \times 10^6$ m.

La fuerza gravitacional con que la Luna atrae a la nave es igual a la fuerza centrípeta:

$$G = \frac{m_n m_L}{R^2} = \frac{m_n v^2}{R}$$

donde R es el radio de la órbita. Resolviendo, se encuentra que

$$v = \sqrt{\frac{Gm_L}{R}} = \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(7.34 \times 10^{22} \text{ kg})}{(1.738 + 0.020\,0) \times 10^6 \text{ m}}} = 1.67 \text{ km/s}$$

de donde deducimos que

$$\text{Tiempo para una órbita} = \frac{2\pi R}{v} = 6.62 \times 10^3 \text{ s} = 110 \text{ min}$$

9.12 Como se muestra en la Fig. 9-3, una pelota B está amarrada a un extremo de un cordel de 24 cm de longitud, y el otro extremo se encuentra sujeto a un punto fijo O. La pelota se mueve en un círculo horizontal como se muestra. Encontrar la rapidez de la pelota en su trayectoria circular si el cordel forma un ángulo de 30° con la vertical.

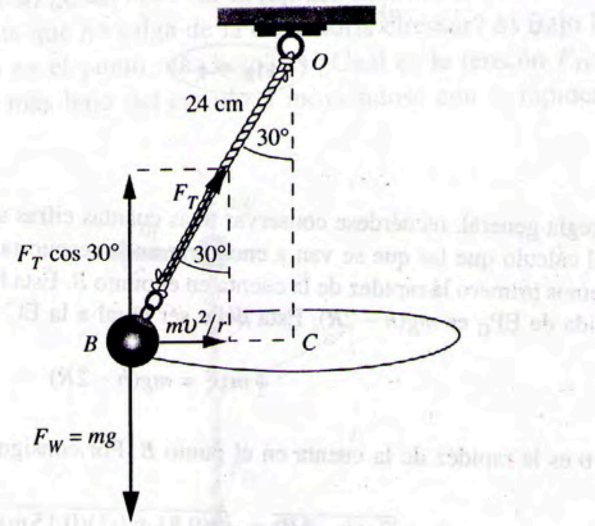


Fig. 9-3

Las únicas fuerzas que actúan sobre la pelota son su peso mg y la tensión F_T en el cordel. La tensión debe hacer dos cosas: 1) balancear el peso de la pelota por medio de su componente vertical, $F_T \cos 30°$: 2) proporcionar la fuerza centrípeta requerida por medio de su componente horizontal, F_T sen 30°. Entonces se puede escribir

$$F_T \cos 30° = mg \quad y \quad F_T \operatorname{sen} 30° = \frac{mv^2}{r}$$

Resolviendo para F_T la primera ecuación y sustituyendo en la segunda se llega a

$$\frac{\cancel{m}g \operatorname{sen} 30°}{\cos 30°} = \frac{\cancel{m}v^2}{r} \quad \text{o} \quad v = \sqrt{rg(0.577)}$$

Sin embargo, $r = \overline{BC} = (0.24 \text{ m}) \operatorname{sen} 30° = 0.12 \text{ m}$ y $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, de donde $v = 0.82$ m/s.

9.13 Como se muestra en la Fig. 9-4, una cuenta de 20 g resbala desde el reposo en el punto A a lo largo de un alambre (considere que no hay fricción). Si h tiene 25 cm y R tiene 5.0 cm, ¿cuál es la magnitud de la fuerza sobre la cuenta en *a*) el punto B y *b*) el punto D?

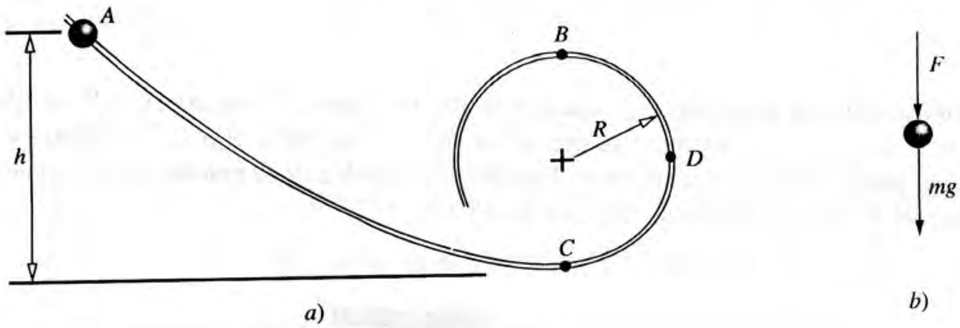


Fig. 9-4

a) Como regla general, recuérdese conservar unas cuantas cifras significativas más en los pasos intermedios del cálculo que las que se van a encontrar en la respuesta. Esto evitará los errores por redondeo. Calculemos primero la rapidez de la cuenta en el punto B. Ésta ha caído a una altura $h - 2R$ y, por tanto, la pérdida de EP_G es $mg(h - 2R)$. Ésta debe ser igual a la EC en el punto B:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mg(h - 2R)$$

donde v es la rapidez de la cuenta en el punto B. Por consiguiente,

$$v = \sqrt{2g(h-2R)} = \sqrt{2(9.81\,\mathrm{m/s^2})(0.15\,\mathrm{m})} = 1.716\,\mathrm{m/s}$$

Como se muestra en la Fig. 9-4*b*, dos fuerzas actúan sobre la cuenta cuando ésta se encuentra en B: 1) el peso de la cuenta mg y 2) la fuerza F (considerada hacia abajo) del alambre sobre la cuenta. La suma algebraica de las dos fuerzas es igual a la fuerza centrípeta requerida, mv^2/R, si la cuenta sigue la trayectoria circular. Podemos escribir

$$mg + F = \frac{mv^2}{R}$$

o

$$F = \frac{mv^2}{R} - mg = (0.020\,\mathrm{kg})\left[\left(\frac{1.716^2}{0.050} - 9.81\right)\mathrm{m/s^2}\right] = 0.98\,\mathrm{N}$$

El alambre debe ejercer una fuerza de 0.98 N hacia abajo sobre la cuenta para mantenerla en trayectoria circular.

b) La situación es similar en el punto *D*, pero ahora el peso es perpendicular a la dirección de la fuerza centrípeta. Esto es, el alambre debe proporcionar esta fuerza. Siguiendo un procedimiento como el anterior, se llega a

$$\upsilon = \sqrt{2g(h-R)} = \sqrt{2(9.81\,\mathrm{m/s^2})(0.20\,\mathrm{m})} = 1.98\,\mathrm{m/s}$$

y

$$F = \frac{m\upsilon^2}{R} = \frac{(0.020\,\mathrm{kg})(1.98\,\mathrm{m/s})^2}{0.050\,\mathrm{m}} = 1.6\,\mathrm{N}$$

9.14 Como se muestra en la Fig. 9-5, un cuerpo de 0.90 kg amarrado a una cuerda gira en un círculo vertical de 2.50 m de radio. *a*) ¿Cuál debe ser la rapidez mínima υ_t que debe tener en el punto más alto del círculo, de tal forma que no salga de la trayectoria circular? *b*) Bajo la condición *a*), ¿cuál es la rapidez υ_b del objeto en el punto más bajo? *c*) ¿Cuál es la tensión F_{Tb} en la cuerda cuando el cuerpo está en el punto más bajo del círculo y moviéndose con la rapidez crítica υ_b?

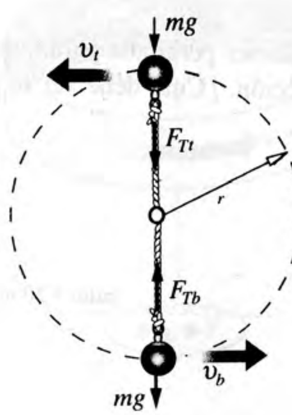


Fig. 9-5

a) Como lo muestra la Fig 9-5, dos fuerzas radiales actúan sobre el cuerpo en el punto más alto: 1) su peso *mg* y 2) la tensión F_{Tt}. La resultante de estas dos fuerzas debe ser igual a la fuerza centrípeta.

$$\frac{m\upsilon^2}{r} = mg + F_{Tt}$$

Para una *r* dada, υ tendrá el valor más pequeño cuando $F_{Tt} = 0$. En este caso,

$$\frac{m\upsilon_t^2}{r} = mg \quad \text{o} \quad \upsilon_t = \sqrt{rg}$$

Utilizando $r = 2.50$ m y $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$ se encuentra $\upsilon_t = 4.95$ m/s como la rapidez en el punto más alto.

b) Viajando de abajo hacia arriba el cuerpo sube una altura $2r$. Dado que la rapidez en el punto más alto es $v_t = 4.95$ m/s, y la rapidez en el punto más bajo es v_b, por conservación de la energía se tiene:

$$\text{EC en el punto bajo} = \text{EC en el punto alto} + \text{EP}_G \text{ en el punto alto}$$

$$\tfrac{1}{2}mv_b^2 = \tfrac{1}{2}mv_t^2 + mg(2r)$$

donde hemos escogido el punto bajo del círculo como el nivel cero EP_G. Obsérvese que m se cancela. Con $v_t = 4.95$ m/s, $r = 2.50$ m y $g = 9.81$ m/s² se obtiene $v_b = 11.1$ m/s.

c) Cuando el objeto se encuentra en el punto bajo de la trayectoria, vemos en la Fig. 9-5 que la fuerza radial no balanceada sobre él es $F_{Tb} - mg$. Esta fuerza proporciona la fuerza centrípeta:

$$F_{Tb} - mg = \frac{mv_b^2}{r}$$

Con $m = 0.90$ kg, $g = 9.81$ m/s², $v_b = 11.1$ m/s y $r = 2.50$ m da

$$F_{Tb} = m\left(g + \frac{v_b^2}{r}\right) = 53\text{ N}$$

9.15 Una curva de 30 m de radio va a ser peraltada para que un auto pueda tomarla con una rapidez de 13 m/s sin depender de la fricción. ¿Cuál debe ser la pendiente de la curva (peralte)?

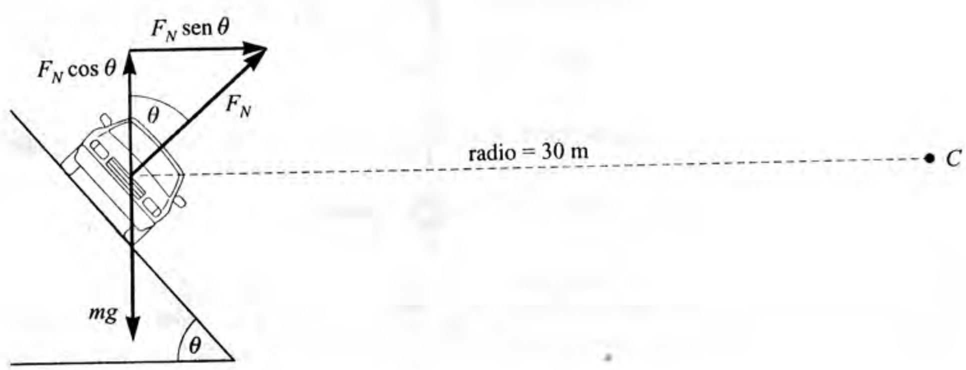


Fig. 9-6

En la Fig. 9-6 se muestra la situación cuando no hay fricción. Solamente dos fuerzas actúan sobre el carro: 1) el peso mg del auto y 2) la fuerza normal F_N que ejerce el pavimento sobre el auto.

La fuerza normal F_N tiene dos funciones; 1) su componente vertical, $F_N \cos\theta$, debe balancear el peso del auto: 2) su componente horizontal, F_N sen θ, proporciona la fuerza centrípeta requerida. Con las suposiciones anteriores podemos escribir

$$F_N \cos\theta = mg \quad y \quad F_N \operatorname{sen}\theta = \frac{mv^2}{r}$$

Dividiendo la segunda ecuación entre la primera, se cancelan F_N y m obteniendo

$$\tan\theta = \frac{v^2}{gr} = \frac{(13\,\text{m/s})^2}{(9.81\,\text{m/s}^2)(30\,\text{m})} = 0.575$$

De aquí encontramos que θ, el ángulo de peralte debe ser 30°.

9.16 Como se muestra en la Fig. 9-7, un cascarón cilíndrico de radio interior r gira con una velocidad angular ω. Un bloque de madera se recarga en la superficie interior y gira con él. Si el coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie es μ_e, ¿con qué rapidez debe girar el cascarón para que el bloque no resbale y caiga? Suponga $r = 150$ cm y $\mu_e = 0.30$.

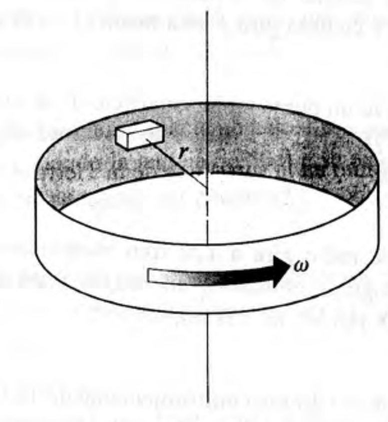


Fig. 9-7

La superficie mantiene al bloque en su lugar presionándolo con la fuerza centrípeta $mr\omega^2$. Esta fuerza es perpendicular a la superficie. La fuerza normal es la que proporciona la fuerza de fricción sobre el bloque para que éste no resbale y caiga. Como $F_f = \mu_e F_N$ y $F_N = mr\omega^2$, se puede escribir

$$F_f - \mu_e F_N = \mu_e mr\omega^2$$

Esta fuerza de fricción debe balancear al peso mg del bloque si éste no ha de resbalar; por tanto,

$$mg = \mu_e mr\omega^2 \quad \text{o} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\mu_e r}}$$

Sustituyendo los valores dados, se obtiene

$$\omega = \sqrt{\frac{9.81\,\text{m/s}^2}{(0.30)(1.50\,\text{m})}} = 4.7\,\text{rad/s} = 0.74\,\text{rev/s}$$

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

9.17 Convertir *a*) 50.0 rev a radianes, *b*) 48π rad a revoluciones, *c*) 72.0 rps a rad/s, *d*) 1.50×10^3 rpm a rad/s, *e*) 22.0 rad/s a rpm, *f*) 2.000 rad/s a°/s. *Resp.* *a*) 314 rad; *b*) 24 rev; *c*) 452 rad/s; *d*) 157 rad/s; *e*) 210 rev/min; *f*) 114.6°/s

9.18 Exprese la rapidez angular 40.0°/s en *a*) rev/s, *b*) rev/min y *c*) rad/s. *Resp.* *a*) 0.111 rev/s; *b*) 6.67 rev/min; *c*) 0.698 rad/s

9.19 Un volantín gira a 480 rpm. Calcular la rapidez angular en cualquier punto del volantín y la rapidez tangencial a 30.0 cm del centro. *Resp.* 50.3 rad/s, 15.1 m/s

9.20 Se desea que el contorno exterior de una rueda de molino de 9.0 cm de radio se mueva a razón de 6.0 m/s. *a*) Determínese la rapidez angular de la rueda. *b*) ¿Cuántos metros de cordón se pueden enredar en la cara lateral de la rueda en 3.0 s cuando gira a esta razón? *Resp.* *a*) 67 rad/s; *b*) 18 m

9.21 ¿Cuántos radianes se mueve un punto en la superficie de la Tierra cuando ésta gira 6.00 h como resultado del movimiento de rotación? ¿Cuál es la rapidez de un punto en el ecuador? El radio de la Tierra es 6370 km. *Resp.* 1.57 rad, 463 m/s

9.22 Una rueda de 25.0 cm de radio gira a 120 rpm incrementando su rapidez a 660 rpm en 9.00 s. Encontrar *a*) la aceleración angular constante en rad/s^2 y *b*) la aceleración tangencial de un punto en el borde. *Resp.* *a*) 6.28 rad/s^2; *b*) 157 cm/s^2

9.23 La rapidez angular de un disco decrece uniformemente de 12.00 a 4.00 rad/s en 16.0 s. Calcular la aceleración angular y el número de revoluciones que da en este tiempo. *Resp.* −0.500 rad/s^2, 20.4 rev

9.24 Una llanta de 30 cm de radio gira a razón de 8.0 rev/s cuando el automóvil comienza a detenerse uniformemente hasta el reposo en un tiempo de 14 s. Encontrar el número de revoluciones que da la llanta y la distancia recorrida por el automóvil en los 14 s. *Resp.* 56 rev, 0.11 km

9.25 Una rueda que gira a 6.00 rev/s tiene una aceleración angular de 4.00 rad/s^2. Encontrar el número de vueltas que debe dar la rueda para alcanzar una rapidez angular de 26.0 rev/s, así como el tiempo requerido. *Resp.* 502 rev, 31.4 s

9.26 Un cordel enredado en el borde de una rueda de 20 cm de diámetro se jala a razón de 75 cm/s. ¿Cuántas vueltas habrá dado la rueda cuando se han desenredado 9.0 m de cordel? ¿Qué tiempo llevará este proceso? *Resp.* 14 rev, 12 s

9.27 Una masa de 1.5 kg se mueve en un círculo de radio 25 cm a 2.0 rev/s. Calcúlense *a*) la velocidad tangencial, *b*) la aceleración y *c*) la fuerza centrípeta requerida para este movimiento. *Resp.* *a*) 3.1 m/s; *b*) 39 m/s^2 radialmente hacia adentro; *c*) 59 N

9.28 *a*) Calcular la aceleración radial de un punto en el ecuador de la Tierra. *b*) Repita el problema para el polo norte de la Tierra. Tómese el radio de la Tierra como 6.37×10^6 m *Resp.* *a*) 0.033 7 m/s^2; *b*) cero

9.29 Un carro que se mueve a 5.0 m/s trata de dar vuelta en una esquina, describiendo un arco circular de 8.0 m de radio. El pavimento es plano. ¿Qué tan grande debe ser el coeficiente de fricción entre las llantas y el pavimento para que no derrape? *Resp.* 0.32

9.30 Una caja descansa en un punto que se encuentra a 2.0 m del eje de una plataforma circular en posición horizontal. El coeficiente de fricción estático entre la caja y la plataforma es 0.25. Si la razón de giro de la plataforma se incrementa lentamente desde cero, ¿con qué rapidez angular empezará a resbalar la caja? *Resp.* 1.1 rad/s

9.31 Una piedra se encuentra en el fondo de un balde que se mueve en un círculo vertical de radio 60 cm. ¿Cuál es la rapidez mínima que debe tener la piedra en el punto más alto de la trayectoria si ésta debe permanecer en contacto con el fondo del balde? *Resp.* 2.4 m/s

9.32 Un péndulo de 80.0 cm de longitud es jalado hacia un lado, hasta que su lenteja se eleva 20.0 cm sobre el punto más bajo, y entonces se suelta. Cuando la lenteja de 50.0 g se encuentra en el punto más bajo, *a*) ¿cuál es su rapidez y *b*) cuál es la tensión en la cuerda del péndulo? *Resp.* *a*) 1.98 m/s, *b*) 0.735 N

9.33 Refiérase a la Fig. 9-4. ¿Qué tan grande debe ser h (en términos de R) si el alambre no debe ejercer fuerza alguna sobre la cuenta al pasar por el punto B? Suponga que la cuenta parte del reposo en el punto A y que no hay fricción. *Resp.* 2.5 R

9.34 Si, en la Fig. 9-4 y en el problema 9.33, $h = 2.5R$, ¿cuál debe ser la fuerza que ejerce la cuenta de 50 g sobre el alambre al pasar por el punto C? *Resp.* 2.9 N

9.35 Un satélite orbita la Tierra a una altura de 200 km en un círculo de radio de 6570 km. Encuéntrese la rapidez del satélite y el tiempo que le toma en completar una revolución. Supóngase que la masa de la Tierra es 6.0×10^{24} kg. (*Sugerencia*: La fuerza gravitacional proporciona la fuerza centrípeta.) *Resp.* 7.8 km/s, 88 min

9.36 El carrito de una montaña rusa se mueve lentamente mientras se aproxima al punto más alto de la colina mayor. Rueda casi sin fricción colina abajo y después hacia arriba en una colina más baja que tiene un radio de curvatura de 15 m. ¿Cuánto más alta debe ser la primera colina que la segunda, si los pasajeros no deben ejercer fuerza alguna sobre los asientos en la cúspide de la colina más baja? *Resp.* 7.5 m

9.37 El cuerpo humano puede soportar, sin sufrir daño alguno, una aceleración de hasta 9.00 veces la gravedad. ¿Con qué radio de curvatura mínimo un piloto puede hacer que el avión gire hacia arriba, sin peligro, al final de una picada, si la rapidez del avión es de 770 km/h? *Resp.* 519 m

9.38 Un piloto de 60.0 kg que viaja en un planeador a 40.0 m/s desea hacer un giro vertical hacia adentro, de tal forma que ejerza una fuerza de 350 N sobre el asiento cuando el planeador se encuentre en el punto más alto del lazo. ¿Cuál debe ser el radio del lazo, en estas condiciones? (*Sugerencia*: Tanto la gravedad como el asiento ejercen una fuerza sobre el piloto.) *Resp.* 102 m

9.39 Suponga que la Tierra es una esfera perfecta con $R = 6370$ km. Si una persona pesa exactamente 600.0 N en el polo norte, ¿cuánto pesará la misma persona en el ecuador? (*Sugerencia*: El empuje hacia arriba de la balanza sobre la persona es lo que leerá la balanza y es a lo que le llamamos peso en este caso.) *Resp.* 597.9 N

9.40 Una masa m que cuelga en el extremo de un péndulo de longitud L se suelta con un ángulo de 40° respecto a la vertical. Encontrar la tensión en la cuerda del péndulo cuando ésta forma un ángulo de 20.0° con la vertical. (*Sugerencia*: Separar el peso en componentes a lo largo y perpendicular a la cuerda.) *Resp.* $1.29mg$

capítulo 10

Rotación de un cuerpo rígido

LA TORCA (O MOMENTO DE TORSIÓN) debida a una fuerza ejercida alrededor de un eje, se definió en el capítulo 5.

EL MOMENTO DE INERCIA (I) de un cuerpo es la medida de la inercia rotacional de éste. Si un objeto que puede girar libremente alrededor de un eje presenta gran dificultad para hacerlo girar, se dice que su momento de inercia alrededor de ese eje es grande. Un objeto con I pequeña tiene poca inercia rotacional.

Si un objeto se considera constituido por masas pequeñísimas $m_1, m_2, m_3, \ldots$, a las distancias respectivas $r_1, r_2, r_3, \ldots$, a partir de un eje, su momento de inercia con respecto a ese eje es

$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \ldots = \sum m_ir_i^2$$

Las unidades de I son $kg \cdot m^2$.

Es conveniente definir un *radio de giro* (k) para un objeto alrededor de un eje por la relación

$$I = Mk^2$$

donde M es la masa total del objeto. En consecuencia, k es la distancia a la cual se debe colocar una masa puntual M, si la masa va a tener la misma I que tiene el cuerpo real.

TORCA Y ACELERACIÓN ANGULAR: Una torca no balanceada τ, actuando sobre un cuerpo de momento de inercia produce una aceleración angular α dada por

$$\tau = I\alpha$$

Aquí, τ, I y α están calculadas con respecto al mismo eje. En relación a las unidades, τ está dada en $N \cdot m$, I en $kg \cdot m^2$ y α debe darse en rad/s^2.

ENERGÍA CINÉTICA DE ROTACIÓN (EC_r) de una masa cuyo momento de inercia alrededor de un eje es I y se encuentra rotando alrededor del eje con una velocidad angular ω, es

$$EC_r = \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

donde la energía está en joules (J) y ω debe estar dada en rad/s.

ROTACIÓN Y TRASLACIÓN COMBINADAS: La EC de una pelota que rueda, o de otro objeto de masa M que ruede es la suma de 1) su energía cinética rotacional EC *alrededor de un eje que pasa por su centro de masa* (capítulo 8); y 2) la energía cinética traslacional EC de una masa puntual equivalente que se mueve con el centro de masa. Expresado en una fórmula,

$$EC_{\text{total}} = \tfrac{1}{2}I\omega^2 + \tfrac{1}{2}Mv^2$$

Nótese que I es el momento de inercia del objeto respecto a un eje que pasa a través de su centro de masa.

EL TRABAJO (W) efectuado sobre un cuerpo rodante durante un desplazamiento angular θ por una torca constante τ está dado por

$$W = \tau\theta$$

donde W está dado en joules y θ debe estar dado en radianes.

LA POTENCIA (P) transmitida a un cuerpo por una torca, está dada por

$$P = \tau\omega$$

donde τ es la torca aplicada y ω es la velocidad angular en el mismo sentido de rotación que la torca, ω debe darse en radianes.

LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR es un vector que tiene como magnitud $I\omega$ y que está dirigido a lo largo del eje de rotación. Si la torca neta sobre un cuerpo es cero, la cantidad de movimiento angular permanece constante tanto en magnitud como en dirección. Ésta es la *ley de conservación de momento angular*.

EL IMPULSO ANGULAR tiene la magnitud τt, donde t es el tiempo durante el cual una torca τ constante actúa sobre el cuerpo. Análogamente al caso lineal, un impulso angular τt que actúa sobre un cuerpo causa un cambio en la cantidad de movimiento angular de este mismo cuerpo, dado por la ecuación

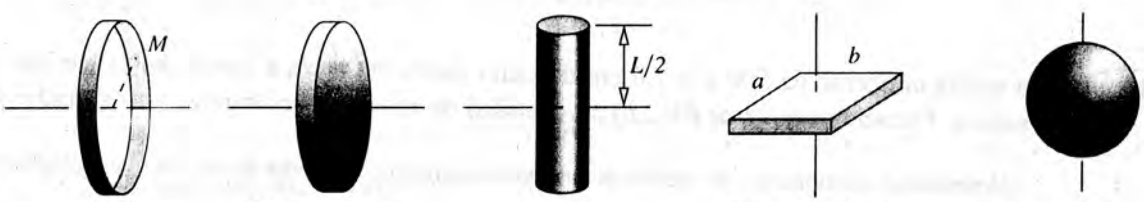
$$\tau t = I\omega_f - I\omega_0$$

TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS: El momento de inercia I de un cuerpo, alrededor de un eje paralelo a un eje que pasa por su centro de masa, es

$$I = I_{\text{cm}} + Mh^2$$

donde I_{cm} = momento de inercia alrededor de un eje que pasa por su centro de masa
M = masa total del cuerpo
h = distancia perpendicular entre los dos ejes

Los momentos de inercia (alrededor de un eje que pasa a través del centro de masa) de algunos objetos uniformes, de masa M, se muestran en la Fig. 10-1.



Aro o cilindro hueco $I = Mr^2$ | Disco uniforme o cilindro $I = \frac{1}{2}Mr^2$ | Varilla uniforme $I = \frac{1}{12}ML^2$ | Block rectangular uniforme $I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$ | Esfera uniforme $I = \frac{2}{5}Mr^2$

Fig. 10-1

ANALOGÍA ENTRE CANTIDADES LINEALES Y ANGULARES:

Desplazamiento lineal	x	$\leftrightarrow$	desplazamiento angular	θ
Rapidez lineal	υ	$\leftrightarrow$	rapidez angular	ω
Aceleración lineal	a_T	$\leftrightarrow$	aceleración angular	α
Masa (inercia)	m	$\leftrightarrow$	momento de inercia	I
Fuerza	F	$\leftrightarrow$	torca	τ
Cantidad de movimiento lineal	$m\upsilon$	$\leftrightarrow$	cantidad de movimiento angular	$I\omega$
Impulso lineal	Ft	$\leftrightarrow$	impulso angular	τt

Si en las ecuaciones de movimiento lineal se reemplazan las cantidades lineales por las cantidades angulares correspondientes, se obtendrán las ecuaciones de movimiento angular correspondientes. Así pues, tenemos

$$\textit{Lineal:}\quad F = ma \quad \text{EC} = \tfrac{1}{2}m\upsilon^2 \quad W = Fs \quad \text{P} = F\upsilon$$

$$\textit{Angular:}\quad \tau = I\alpha \quad \text{EC}_r = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \quad W = \tau\theta \quad \text{P} = \tau\omega$$

En estas ecuaciones, θ, ω y α deben estar expresadas en radianes.

PROBLEMAS RESUELTOS

10.1 Una rueda de 6.0 kg de masa y de radio de giro 40 cm está rodando 300 rpm. Encuéntrense su momento de inercia y su EC rotacional.

$$I = Mk^2 = (6.0 \text{ kg})(0.40 \text{ m})^2 = 0.96 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

La EC rotacional es EC $= \frac{1}{2} I\omega^2$ donde ω debe estar expresada en rad/s. Tenemos

$$\omega = \left(300 \frac{\text{rev}}{\text{min}}\right)\left(\frac{1 \text{ min}}{60.0 \text{ s}}\right)\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}}\right) = 31.4 \text{ rad/s}$$

así

$$\text{EC}_r = \tfrac{1}{2} I\omega^2 = \tfrac{1}{2}(0.96 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(31.4 \text{ rad/s})^2 = 0.47 \text{ kJ}$$

10.2 Una esfera uniforme de 500 g y 7.0 cm de radio gira a 30 rev/s a través de un eje que pasa por su centro. Encuéntrense su *a*) EC$_r$, *b*) su cantidad de movimiento angular y *c*) su radio de giro.

Necesitamos el momento de inercia de una esfera uniforme alrededor de un eje que pase por su centro. De la Fig. 10-1,

$$I = \tfrac{2}{5} Mr^2 = (0.40)(0.50 \text{ kg})(0.070 \text{ m})^2 = 0.000\,98 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

a) Sabemos que $\omega = 30$ rev/s = 188 rad/s, por lo tanto

$$\text{EC}_r = \tfrac{1}{2} I\omega^2 = 1\,(0.000\,98 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(188 \text{ rad/s})^2 = 0.017 \text{ kJ}$$

Nótese que ω está dada en rad/s.

b) Su cantidad de movimiento angular es

$$I\omega = (0.\,000\,98 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(188 \text{ rad/s}) = 0.18 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

c) Para cualquier objeto, $I = Mk^2$, donde k es el radio de giro. Entonces

$$k = \sqrt{\frac{I}{M}} = \sqrt{\frac{0.000\,98 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{0.50 \text{ kg}}} = 0.044 \text{ m} = 4.4 \text{ cm}$$

Nótese que éste es un valor razonable en vista de que se trata de una esfera cuyo radio es de 7.0 cm.

10.3 Una hélice de avión tiene una masa de 70 kg y un radio de giro de 75 cm. Encuéntrese su momento de inercia. ¿De qué magnitud es la torca no equilibrada que se necesita para darle una aceleración angular de 4.0 rev/s²?

$$I = Mk^2 = (70 \text{ kg})(0.75 \text{ m})^2 = 39 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Si utilizamos $\tau = I\alpha$, se debe tener α en rad/s^2:

$$\alpha = \left(4.0\,\frac{\text{rev}}{\text{s}^2}\right)\left(2\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{rev}}\right) = 8.0\pi \text{ rad/s}^2$$

entonces

$$\tau = I\alpha = (39 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(8.0\pi \text{ rad/s}^2) = 0.99 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

10.4 Como se muestra en la Fig.10-2, una fuerza constante de 40 N se aplica tangencialmente al perímetro de una rueda de 20 cm de radio. La rueda tiene un momento de inercia de 30 kg · m^2. Encuéntrense *a*) la aceleración angular, *b*) la rapidez angular después de 4.0 s si parte del reposo, y *c*) el número de revoluciones realizadas en 4.0 s. *d*) Demuéstrese que el trabajo efectuado sobre la rueda en los 4.0 s es igual a la EC$_r$ de la rueda al cabo de los 4.0 s.

a) Utilizando $\tau = I\alpha$, se obtiene

$$(40 \text{ N})(0.20 \text{ m}) = (30 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)\,\alpha$$

de donde $\alpha = 0.267$ rad/s^2 o 0.27 rad/s^2.

b) Utilícese $\omega_f = \omega_0 + \alpha t$, para encontrar

$$\omega_f = 0 + (0.\,267 \text{ rad/s}^2)(4.0 \text{ s}) = 1.07 \text{ rad/s} = 1.1 \text{ rad/s}$$

c) En virtud que $\theta = \omega_{prom} t = \frac{1}{2}(\omega_f + \omega_0)t$, se tiene

$$0 = \tfrac{1}{2}(1.07 \text{ rad/s})(4.0 \text{ s}) = 2.14 \text{ rad}$$

que equivale a 0.34 rev.

d) Se sabe que el trabajo = torca × θ, por lo tanto

$$\text{Trabajo} = (40 \text{ N} \times 0.20 \text{ m})(2.14 \text{ rad}) = 17 \text{ J}$$

Nótese que debe usarse la medida del ángulo en radianes. La EC$_r$ final es $\frac{1}{2}I\omega_f^2$, por lo tanto

$$\text{EC}_r = \tfrac{1}{2}(30 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(1.07 \text{ rad/s})^2 = 17 \text{ J}$$

El trabajo realizado es igual a la EC$_r$.

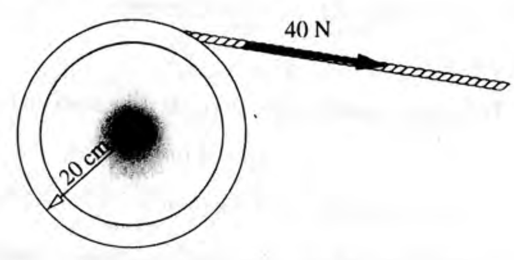


Fig. 10-2

10.5 La rueda de un molino es un disco uniforme de 0.90 kg y de 8.0 cm de radio. Se lleva uniformemente al reposo desde una rapidez de 1400 rpm en un tiempo de 35 s. ¿De qué magnitud es la torca debida al rozamiento que se opone al movimiento?

Primero se encontrará α, planteando el problema de movimiento; a continuación se empleará $\tau = I\alpha$ para encontrar τ. Se sabe que $f = 1400$ rev/min = 23.3 rev/s, y a partir de $\omega = 2\pi f$, $\omega_0 = 146$ rad/s y $\omega_f = 0$. Entonces,

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{t} = \frac{-146 \text{ rad/s}}{35 \text{ s}} = -4.2 \text{ rad/s}^2$$

También se necesita conocer I. Para un disco uniforme,

$$I = \tfrac{1}{2}Mr^2 = \tfrac{1}{2}(0.90 \text{ kg})(0.080 \text{ m})^2 = 2.9 \times 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Entonces

$$\tau = I\alpha = (0.002\,9 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)(-4.2 \text{ rad/s}^2) = -1.2 \times 10^{-2} \text{ N}\cdot\text{m}$$

10.6 Repítase el problema 10.5 utilizando la relación entre trabajo y energía.

La rueda originalmente tiene EC_r, pero a medida que la rueda se va deteniendo, esta energía se va perdiendo al realizar trabajo en contra de la fuerza de fricción. Por consiguiente podemos escribir

$$EC_r \text{ inicial} = \text{trabajo realizado en contra de torca de la fricción}$$

$$\tfrac{1}{2}I\omega_0^2 = \tau\theta$$

Para encontrar θ se observa que

$$\theta = \omega_{prom}t = \tfrac{1}{2}(\omega_0 + \omega_f)t = \tfrac{1}{2}(146 \text{ rad/s})(35 \text{ s}) = 2550 \text{ rad}$$

Del problema 10.5, $I = 0.002\,9$ kg · m², y así la ecuación de energía es

$$\tfrac{1}{2}(0.002\,9 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)(146 \text{ rad/s})^2 = \tau(2550 \text{ rad})$$

de donde $\tau = 0.012$ N · m $= 1.2 \times 10^{-2}$ N · m.

10.7 Un volante tiene un momento de inercia de 3.8 kg · m². ¿Qué torca no balanceada y constante se requiere para incrementar su rapidez de 2.0 rev/s a 5.0 rev/s en 6.0 revoluciones?

Dado que

$$\theta = 12\pi \text{ rad} \qquad \omega_0 = 4.0\pi \text{ rad/s} \qquad \omega_f = 10\pi \text{ rad/s}$$

podemos escribir

$$\text{Trabajo efectuado sobre la rueda} = \text{cambio en la } EC_r \text{ de la rueda}$$

$$\tau\theta = \tfrac{1}{2}I\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_0^2$$

$$(\tau)(12\pi \text{ rad}) = \tfrac{1}{2}(3.8 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)[(100\pi^2 - 16\pi^2)(\text{rad/s})^2]$$

de donde $\tau = 42$ N · m. Nótese que en todo este problema fueron usadas las unidades de radianes y segundos.

10.8 Como se muestra en la Fig. 10-3, una masa de $m = 400$ g cuelga del perímetro de una rueda de radio $r = 15$ cm. Cuando se suelta desde el reposo, la masa cae 2.0 m en 6.5 s. Determínese el momento de inercia de la rueda.

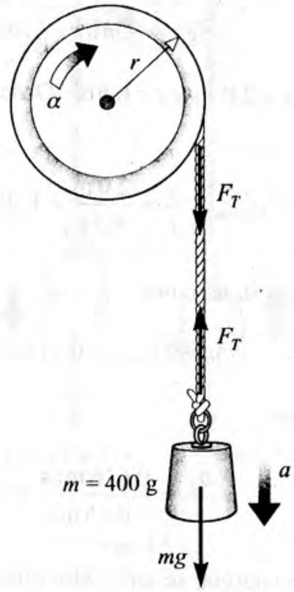


Fig. 10-3

Se escribirá $\tau = I\alpha$ para la rueda y $F = ma$ para la masa. Pero primero determinaremos a del planteamiento del problema de movimiento, utilizando $y = v_0t + \frac{1}{2}at^2$:

$$2.0 \text{ m} = 0 + \tfrac{1}{2}a(6.5 \text{ s})^2$$

la cual da $a = 0.095$ m/s^2. Ya que $a_T = \alpha r$,

$$\alpha = \frac{a_T}{r} = \frac{0.095 \text{ m/s}^2}{0.15 \text{ m}} = 0.63 \text{ rad/s}^2$$

La fuerza F no equilibrada que actúa sobre la masa m es $mg - F_T$. Como $F = ma$, entonces

$$mg - F_T = ma_T$$
$$(0.40 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) - F_T = (0.40 \text{ kg})(0.095 \text{ m/s}^2)$$

de donde $F_T = 3.88$ N.

Ahora se escribe $\tau = I\alpha$ para la rueda:

$$(F_T)(r) = I\alpha \qquad \text{o bien} \qquad (3.88 \text{ N})(0.15 \text{ m}) = I(0.63 \text{ rad/s}^2)$$

de donde $I = 0.92$ kg · m^2.

10.9 Repítase el problema 10.8, utilizando consideraciones de energía.

Inicialmente la masa m tiene $EP_G = mgh$, donde $h = 2.0$ m. Esta EP_G se convierte en una cantidad igual de EC. Parte de esta EC es la EC traslacional de la masa y la restante es la EC_r de la rueda.

$$EP_G \text{ inicial} = \text{EC final de } m + EC_r \text{ final de la rueda}$$

$$mgh = \tfrac{1}{2}mv_f^2 + \tfrac{1}{2}I\omega_f^2$$

Para calcular v_f se tiene que $v_0 = 0$, $y = 2.0$ m y $t = 6.5$ s. (Obsérvese que $a \neq g$ para la masa, ya que ésta no cae libremente.) Entonces

$$v_{prom} = \frac{y}{t} = \frac{2.0\,\text{m}}{6.5\,\text{s}} = 0.308\,\text{m/s}$$

y como $v_{prom} = \frac{1}{2}(v_0 + v_f)$ y con $v_0 = 0$, tenemos

$$v_f = 2v_{prom} = 0.616\ \text{m/s}$$

Por otro lado, como $v = \omega r$ se obtiene

$$\omega_f = \frac{v_f}{r} = \frac{0.616\,\text{m/s}}{0.15\,\text{m}} = 4.1\,\text{rad/s}$$

Sustituyendo en la ecuación de energía, se encuentra que

$$(0.40\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2)(2.0\ \text{m}) = \tfrac{1}{2}(0.40\ \text{kg})(0.62\ \text{m/s})^2 + \tfrac{1}{2}I(4.1\ \text{rad/s})^2$$

de donde $I = 0.92\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$.

10.10 El momento de inercia del sistema de poleas que se muestra en la Fig. 10-4 es $I = 1.70\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$, mientras que $r_1 = 50$ cm y $r_2 = 20$ cm. Encuéntrese la aceleración angular del sistema de poleas y las tensiones F_{T1} y F_{T2}.

Nótese, para iniciar que $a = \alpha r$, por lo tanto $a_1 = (0.50\ \text{m})\alpha$ y $a_2 = (0.20\ \text{m})\alpha$. Para ambas masas escribiremos $F = ma$, mientras que para la rueda escribiremos $\tau = I\alpha$, considerando positiva la dirección que tiene el movimiento.

$$(2.0)(9.81)\ \text{N} - F_{T1} = 2a_1 \quad \text{o bien} \quad 19.6\ \text{N} - F_{T1} = (1.0\ \text{m})\alpha$$

$$F_{T2} - (1.8)(9.81)\ \text{N} = 1.8a_2 \quad \text{o bien} \quad F_{T2} - 17.6\ \text{N} = (0.36\ \text{m})\alpha$$

$$(F_{T1})(r_1) - (F_{T2})(r_2) = I\alpha \quad \text{o bien} \quad (0.50\ \text{m})F_{T1} - (0.20\ \text{m})F_{T2} = (1.70\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)\alpha$$

Estas tres ecuaciones tienen tres incógnitas. Resolviendo para F_{T1} en la primera ecuación y sustituyendo en la tercera se obtiene

$$(9.81\ \text{N}\cdot\text{m}) - (0.50\ \text{m})\alpha - (0.20\ \text{m})F_{T2} = (1.70\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)\alpha$$

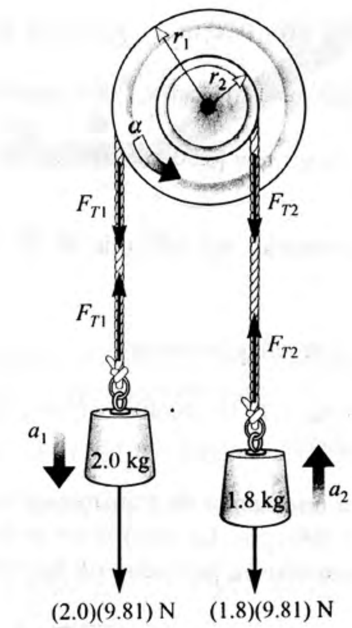


Fig. 10-4

Resolviendo esta ecuación para F_{T2} y sustituyendo en la segunda ecuación se obtiene

$$-11\alpha + 49 - 17.6 = 0.36\alpha$$

de donde $\alpha = 2.8\ \mathrm{rad/s^2}$.

Ahora es posible referirse a la primera ecuación para obtener $F_{T1} = 17$ N y a la segunda ecuación para obtener $F_{T2} = 19$ N.

10.11 Utilícese el método de energías para calcular la rapidez de la masa de 2.0 kg de la Fig.10-4 cuando ha caído 1.5 m desde el reposo. Utilícense los mismos valores que en el problema 10.10 para I, r_1 y r_2.

Si la velocidad angular de la rueda es ω, entonces $v_1 = r_1\omega$ y $v_2 = r_2\omega$. Si la rueda gira un ángulo θ, la masa de 2.0 kg cae una distancia x_1 y la masa de 1.8 kg sube una distancia x_2:

$$\theta = \frac{x_1}{r_1} = \frac{x_2}{r_2} \quad \text{de donde} \quad x_2 = x_1\frac{r_2}{r_1}$$

De la conservación de la energía, dado que EP_G disminuye, la EC aumenta

$$m_1 g x_1 - m_2 g x_2 = \tfrac{1}{2}m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_2^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

Dado que

$$x_2 = (20/50)(1.5\text{ m}) = 0.60\text{ m} \qquad \upsilon_1 = (0.50\text{ m})\omega \qquad \upsilon_2 = (0.20\text{ m})\omega$$

resolviendo podemos encontrar que $\omega = 4.07$ rad/s. Por consiguiente

$$\upsilon_1 = r_1\omega = (0.50\text{ m})(4.07\text{ rad/s}) = 2.0\text{ m/s}$$

10.12 Un motor gira a 20 rev/s y suministra una torca de 75 N · m. ¿Cuál es la potencia en hp que está desarrollando?

Utilizando, $\omega = 20$ rev/s $= 40\pi$ rad/s, tenemos

$$P = \tau\omega = (75\text{ N}\cdot\text{m})(40\pi\text{ rad/s}) = 9.4\text{ kW} = 13\text{ hp}$$

10.13 Una rueda motriz que acciona una banda de transmisión conectada a un motor eléctrico tiene un diámetro de 38 cm y realiza 1200 rpm. La tensión en la banda es de 130 N en el lado flojo y de 600 N en el lado tenso. Encuéntrese la potencia, en hp, que transmite la rueda a la banda.

Se usará $P = \tau\omega$. En este caso, dos torcas, debidas a las dos partes de la banda, actúan sobre la rueda. Se tiene

$$f = 1200\text{ rev/min} = 20\text{ rev/s}$$

y

$$\omega = 40\pi\text{ rad/s}$$

así

$$P = [(600 - 130)(0.19)\text{N}\cdot\text{m}](40\pi\text{ rad/s}) = 11\text{ kW} = 15\text{ hp}$$

10.14 Un motor de 0.75 hp actúa durante 8.0 s sobre una rueda que inicialmente está en reposo y que tiene un momento de inercia de 2.0 kg · m². Encuéntrese la rapidez que desarrolla la rueda, considerando que no hay pérdidas.

$$\text{Trabajo realizado por el motor en 8.0 s} = \text{EC de la rueda después de 8.0 s}$$

$$(\text{potencia}) \times (\text{tiempo}) = \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

$$(0.75\text{ hp})(746\text{ W/hp}) \times (8.0\text{ s}) = \tfrac{1}{2}(2.0\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\omega^2$$

de donde $\omega = 67$ rad/s.

10.15 Como se muestra en la Fig. 10-5, una esfera sólida y uniforme rueda sobre una superficie horizontal a 20 m/s. Después rueda hacia arriba sobre un plano inclinado, como se muestra. Si las pérdidas debidas a la fricción son despreciables, ¿cuál será el valor de h en el lugar donde se detiene momentáneamente la esfera?

Fig. 10-5

Las EC traslacional y rotacional que tiene la esfera en la base del plano inclinado, se cambiarán por EP_G cuando la esfera se detiene; por lo tanto, puede escribirse

$$\left(\tfrac{1}{2}Mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2\right)_{\text{inicial}} = (Mgh)_{\text{final}}$$

Para una esfera sólida, $I = \frac{2}{5}Mr^2$. Como $\omega = v/r$, la ecuación se convierte en

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)(Mr^2)\left(\frac{v}{r}\right)^2 = Mgh \quad \text{o} \quad \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{5}v^2 = (9.81\,\text{m/s}^2)h$$

Utilizando $v = 20$ m/s obtenemos $h = 29$ m. Nótese que la respuesta no depende de la masa de la esfera, ni del ángulo del plano inclinado.

10.16 Inicialmente en reposo, un anillo de 20 cm de radio rueda hacia abajo de una colina hasta un punto que se encuentra 5.0 m por debajo del punto inicial. ¿Qué tan rápido está rotando en ese punto?

$$EP_G \text{ inicial} = (EC_r + EC_t) \text{ final}$$
$$Mgh = \tfrac{1}{2}I\omega^2 + \tfrac{1}{2}Mv^2$$

Para un anillo $I = Mr^2$ y dado que $v = \omega r$. De ambas ecuaciones tenemos

$$Mgh = \tfrac{1}{2}M\omega^2r^2 + \tfrac{1}{2}M\omega^2r^2$$

de donde

$$\omega = \sqrt{\frac{gh}{r^2}} = \sqrt{\frac{(9.81\,\text{m/s}^2)(5.0\,\text{m})}{(0.20\,\text{m})^2}} = 35\,\text{rad/s}$$

10.17 Un disco sólido rueda sobre una pista; en la parte más alta de una colina su rapidez es de 80 cm/s. Si las pérdidas por fricción son despreciables, ¿con qué rapidez se estará moviendo cuando se encuentra a 18 cm por debajo de la cima?

En la cima, el disco tiene EC traslacional y rotacional, más la EP_G relativa al punto 18 cm abajo. En el punto final, la EP_G se ha transformado en más energía cinética de rotación y traslación; por lo tanto, con $h = 18$ cm podemos escribir

$$(EC_t + EC_r)_{\text{inicial}} + Mgh = (EC_t + EC_r)_{\text{final}}$$
$$\tfrac{1}{2}Mv_0^2 + \tfrac{1}{2}I\omega_0^2 + Mgh = \tfrac{1}{2}Mv_f^2 + \tfrac{1}{2}I\omega_f^2$$

Para un disco sólido, $I = \frac{1}{2}Mr^2$. También $\omega = v/r$. Al sustituir estos valores y simplificar se obtiene

$$\frac{1}{2}v_0^2 + \frac{1}{4}v_0^2 + gh = \frac{1}{2}v_f^2 + \frac{1}{4}v_f^2$$

Como $v_0 = 0.80$ m/s y $h = 0.18$ m; al sustituir encontramos que $v_f = 1.7$ m/s.

10.18 Determínese el momento de inercia de las cuatro masas que se muestran en la Fig. 10-6, relativo a un eje perpendicular a la página y que pase a través *a*) del punto *A* y *b*) del punto *B*.

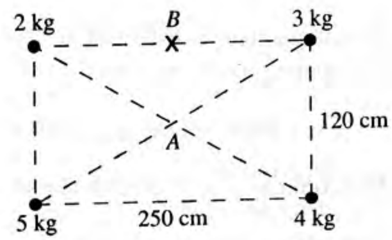


Fig. 10-6

a) De la definición de momento de inercia

$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \cdots + m_Nr_N^2 = (2.0\text{ kg} + 3.0\text{ kg} + 4.0\text{ kg} + 5.0\text{ kg})(r^2)$$

donde r es la mitad de la longitud de la diagonal.

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(1.20\text{ m})^2 + (2.50\text{ m})^2} = 1.39\text{ m}$$

Entonces, $I = 27\text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

b) No podemos utilizar el teorema de ejes paralelos en este problema, en virtud de que ni el punto *A* ni el punto *B* están en el centro de masa. Así pues se repite el procedimiento anterior considerando $r = 1.25$ m para las masas de 2.0 y 3.0 kg, mientras que $r = \sqrt{(1.20)^2 + (1.25)^2} = 1.733$ para las otras dos masas,

$$I_B = (2.0\text{ kg} + 3.0\text{ kg})(1.25\text{ m})^2 + (5.0\text{ kg} + 4.0\text{ kg})(1.733\text{ m})^2 = 33\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

10.19 El disco uniforme circular que se muestra en la Fig. 10-7 tiene una masa de 6.5 kg y un diámetro de 80 cm. Calcúlese el momento de inercia alrededor de un eje perpendicular a la página que pase *a*) a través de *G* y *b*) a través de *A*.

a)
$$I_G = \frac{1}{2}Mr^2 = \frac{1}{2}(6.5\text{ kg})(0.40\text{ m})^2 = 0.52\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

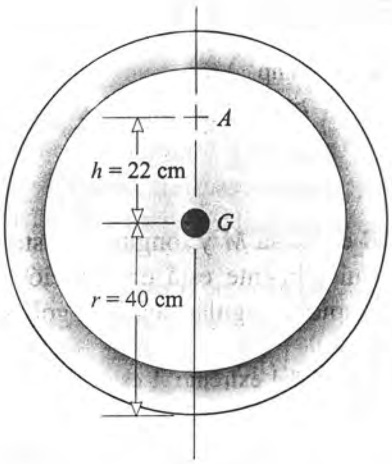


Fig. 10-7

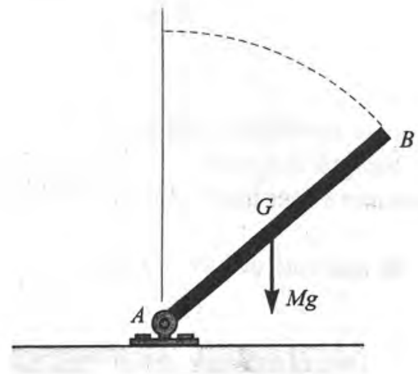


Fig. 10-8

b) Utilícese el resultado de *a*) y el teorema de los ejes paralelos

$$I_A = I_G + Mh^2 = 0.52\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 + (6.5\ \text{kg})(0.22\ \text{m})^2 = 0.83\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

10.20 Un enorme rodillo uniforme en forma de cilindro es jalado por un tractor para compactar la tierra. Este rodillo tiene 1.80 m de diámetro y un peso de 10 kN. Si los efectos de la fricción son despreciables, ¿qué potencia promedio, en hp, debe tener el tractor para acelerar desde el reposo hasta una rapidez de 4.0 m/s en una distancia de 3.0 m?

La potencia es igual al trabajo realizado por el tractor, dividido por el tiempo que toma hacerlo. El tractor realiza el siguiente trabajo:

$$\text{Trabajo} = (\Delta\text{EC})_r + (\Delta\text{EC})_t = \tfrac{1}{2}I\omega_f^2 + \tfrac{1}{2}mv_f^2$$

Tenemos que $v_f = 4.0$ m/s, $\omega_f = v_f/r = 4.44$ rad/s y $m = 10\,000/9.81 = 1019$ kg. El momento de inercia del cilindro es

$$I = \tfrac{1}{2}mr^2 = \tfrac{1}{2}(1019\ \text{kg})(0.90\ \text{m})^2 = 413\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

Sustituyendo estos valores, encontramos que el trabajo requerido es de 12.23 kJ.

Requerimos saber el tiempo que se emplea en realizar este trabajo, por lo que calcularemos la velocidad promedio $v_{prom} = \tfrac{1}{2}(4 + 0) = 2.0$ m/s que tiene el rodillo cuando recorre los 3.0 m por lo tanto

$$t = \frac{x}{v_{prom}} = \frac{3.0\ \text{m}}{2.0\ \text{m/s}} = 1.5\ \text{s}$$

entonces

$$\text{Potencia} = \frac{\text{trabajo}}{\text{tiempo}} = \frac{12\,230\ \text{J}}{1.5\ \text{s}} = (8150\ \text{W})\left(\frac{1\ \text{hp}}{746\ \text{W}}\right) = 11\ \text{hp}$$

10.21 Como se muestra en la Fig. 10-8, una varilla delgada AB de masa M y longitud L está sujeta por una bisagra colocada en el piso en su extremo A. Si inicialmente está en posición vertical y comienza a caer hacia el piso como se muestra, ¿con qué rapidez angular llegará a golpear el piso?

El momento de inercia alrededor de un eje transversal a través del extremo A es:

$$I_A = I_G + Mh^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{3}$$

Como la varilla cae al piso, el centro de masa G cae una distancia $L/2$. Por lo que podemos escribir:

$$\text{EP}_\text{G}\ \text{perdida por la varilla} = \text{EC}_r\ \text{ganada por la varilla}$$

$$Mg\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{ML^2}{3}\right)\omega^2$$

de donde $\omega = \sqrt{3g/L}$.

10.22 Un hombre se encuentra colocado sobre una plataforma con libertad de girar, como se muestra en la Fig. 10-9. Con sus brazos extendidos, su rapidez de giro es de 0.25 rev/s; pero cuando los contrae hacia él, su rapidez es de 0.80 rev/s. Encuéntrese la relación de su momento de inercia en el primer caso con respecto al segundo.

Ya que no existe torca neta sobre el sistema (¿por qué?), la ley de conservación del momento angular establece que

$$\text{Momento angular antes} = \text{momento angular después}$$

$$I_0\omega_0 = I_f\omega_f$$

O, ya que se pide I_0/I_f,

$$\frac{I_0}{I_f} = \frac{\omega_f}{\omega_0} = \frac{0.80\ \text{rev/s}}{0.25\ \text{rev/s}} = 3.2$$

10.23 Un disco con momento de inercia I_1 gira libremente con una rapidez angular ω_1 cuando se deja caer sobre él un segundo disco que no gira, con un momento de inercia I_2 (Fig. 10-10). Los dos giran después como una unidad. Encuéntrese la rapidez angular final.

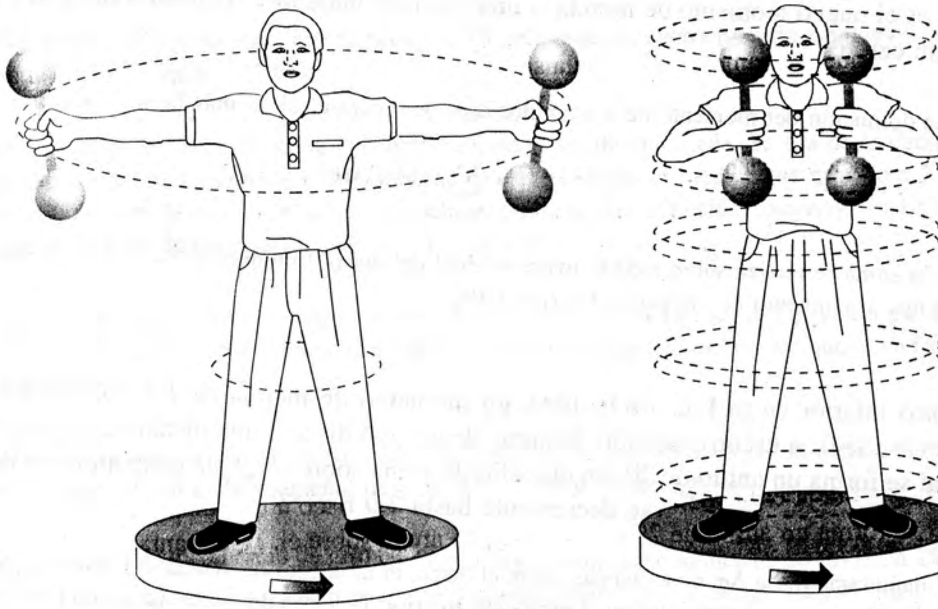


Fig. 10-9

De la ley de conservación del momento angular,

$$\text{Momento angular antes} = \text{momento angular después}$$

$$I_1\omega_1 + I_2(0) = I_1\omega + I_2\omega$$

Después de resolver, se encuentra

$$\omega = \frac{I_1\omega_1}{I_1 + I_2}$$

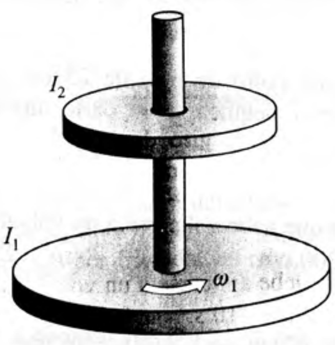


Fig. 10-10

10.24 **El disco inferior en la Fig. 10-10 tiene un momento de inercia I_1 alrededor del eje que se muestra. ¿Cuál es el nuevo momento de inercia si una pequeña masa M es colocada sobre él a una distancia R de su centro?**

La definición del momento de inercia nos dice que, para el disco más la masa añadida,

$$I = \sum_{\text{disco}} m_0 r_0^2 + MR^2$$

donde la suma se realiza sobre toda la masa original del disco. Entonces el valor de esta suma es I_1, por lo que el nuevo momento de inercia es $I = I_1 + MR^2$.

10.25 **El disco inferior en la Fig. 10-10 tiene un momento de inercia de $I = 0.015\,0\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$ y gira a 3.0 rev/s. Se deja escurrir un hilo de arena dentro del disco a una distancia de 20 cm del eje, con lo cual se forma un anillo de 20 cm de radio de arena sobre él. ¿Qué tanta arena se dejó caer sobre el disco para que su rapidez se decremente hasta 2.0 rev/s?**

Cuando una masa Δm de arena cae sobre el disco, el momento de inercia del disco se incrementa en un factor de $r^2 \Delta m$, como se demostró en el problema anterior. Después de que la masa m ha caído sobre el disco, su momento de inercia se ha incrementado a $I + mr^2$. Debido a que la arena inicialmente no tiene momento angular, la ley de conservación del momento nos da

$$(\text{momento antes}) = (\text{momento después}) \qquad \text{o} \qquad I\omega_0 = (I + mr^2)\omega_f$$

de donde

$$m = \frac{I(\omega_0 - \omega_f)}{r^2 \omega_f} = \frac{(0.015\,0\ \text{kg} \cdot \text{m}^2)(6.0\pi - 4.0\pi)\ \text{rad/s}}{(0.040\ \text{m}^2)(4.0\pi\ \text{rad/s})} = 0.19\ \text{kg}$$

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

10.26 Una fuerza tangencial de 200 N actúa sobre el perímetro de una rueda de 25 cm de radio. Encuéntrese *a*) la torca. *b*) Repítase el cálculo si la fuerza forma un ángulo de 40° con respecto a un rayo de rueda. *Resp.* *a*) 50 N · m; *b*) 32 N · m

10.27 Cierta rueda de 8.0 kg tiene un radio de giro de 25 cm. *a*) ¿Cuál es su momento de inercia? *b*) ¿De qué magnitud es la torca que se requiere para darle una aceleración angular de 3.0 rad/s²? *Resp.* *a*) 0.50 kg · m²; *b*) 1.5 N · m

10.28 Determínese la torca constante que debe aplicarse a un volante de 50 kg con un radio de giro de 40 cm, para darle una rapidez angular de 300 rpm en 10 s. *Resp.* 25 N · m

10.29 Una rueda de 4.0 kg y radio de giro de 20 cm está rotando a 360 rpm. La torca debida a la fuerza de fricción es de 0.12 N · m. Calcúlese el tiempo necesario para llevar la rueda hasta el reposo. *Resp.* 50 s

10.30 Determínese la EC rotacional de una rueda de 25 kg que se encuentra rotando a 6.0 rev/s, si su radio de giro es de 22 cm. *Resp.* 0.86 kJ

10.31 Una cuerda de 3.0 m de longitud está enrollada en el eje de una rueda. Se tira de la cuerda con una fuerza constante de 40 N. Cuando la cuerda termina de desenredarse, la rueda sigue girando a 2.0 rev/s. Determínese el momento de inercia de la rueda y del eje. Despréciese la fricción. (*Sugerencia:* La solución más fácil es por el método de energía.) *Resp.* 1.5 kg · m²

10.32 Una rueda de 500 g que tiene un momento de inercia de 0.015 kg · m² se encuentra girando inicialmente a 30 rev/s. Alcanza el reposo después de 163 rev. ¿De qué magnitud es la torca que la va frenando? *Resp.* 0.26 N · m

10.33 Cuando se aplican 100 J de trabajo sobre un volante, su rapidez angular se incrementó de 60 rev/min a 180 rev/min. ¿Cuál es su momento de inercia? *Resp.* 0.63 kg · m²

10.34 Una rueda de 5.0 kg con radio de giro de 20 cm llega a tener una rapidez de 10 rev/s en 25 rev partiendo del reposo. Determínese la torca constante no balanceada requerida. *Resp.* 2.5 N · m

10.35 Un motor eléctrico funciona a 900 rpm y desarrolla 2.0 hp ¿De qué magnitud es la torca que produce? *Resp.* 16 N · m

10.36 El extremo de transmisión o motriz de una banda tiene una tensión de 1600 N y el lado suelto tiene una tensión de 500 N. La banda hace girar una polea de 40 cm de radio a razón de 300 rpm. Esta polea mueve un dínamo que tiene un 90% de eficiencia. ¿Cuántos kilowatts son generados por el dínamo? *Resp.* 12 kW

10.37 Una rueda de 25 kg tiene un radio de 40 cm y gira libremente alrededor de un eje horizontal. El radio de giro de la rueda es de 30 cm. Una masa de 1.2 kg cuelga de un extremo de la cuerda que está enredada al perímetro de la rueda. Esta masa cae y hace que gire la rueda. Encuéntrese la aceleración de la masa al caer y la tensión de la cuerda. *Resp.* 0.77 m/s², 11 N

10.38 Una rueda con eje tiene un momento de inercia total de 0.002 0 kg · m² y se pone a girar por medio de una masa de 800 g que cuelga en el extremo de una cuerda enredada en su eje. El radio del eje es de 2.0 cm. Partiendo del reposo, ¿qué distancia debe caer la masa para producir en el sistema una rapidez de 3.0 rev/s? *Resp.* 5.3 cm

10.39 Un disco sólido ($I = \frac{1}{2}Mr^2$) de 20 kg rueda sobre una superficie horizontal a razón de 4.0 m/s. Determínese su EC total. *Resp.* 0.24 kJ

10.40 Una bola de boliche de 6.0 kg ($I = 2Mr^2/5$) parte del reposo y rueda hacia abajo de una pendiente regular, hasta que alcanza un punto que se encuentra 80 cm más abajo que el punto de partida. ¿Con qué rapidez se está moviendo? Ignórense las pérdidas por fricción. *Resp.* 3.3 m/s

10.41 Una diminuta bola sólida ($I = 2Mr^2/5$) rueda sin resbalar sobre la superficie interior de una semiesfera, como se muestra en la Fig. 10-11 (la bola es mucho más pequeña que lo que se muestra). Si la bola se deja caer en el punto A, ¿con qué rapidez se moverá cuando pase *a*) por el punto B, *b*) por el punto C? *Resp.* *a*) 2.65 m/s; *b*) 2.32 m/s.

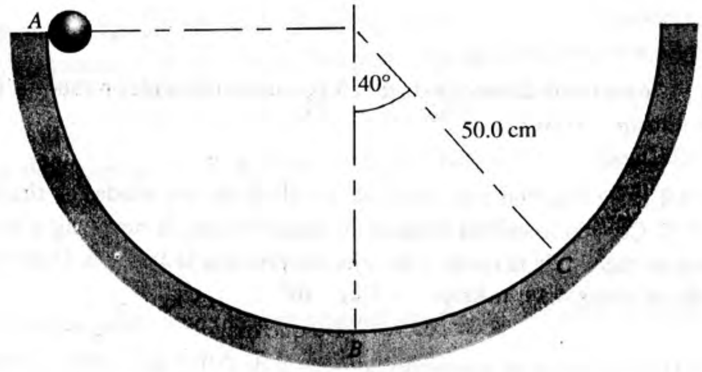


Fig. 10-11

10.42 Determínese el radio de giro de un disco sólido, de diámetro 24 cm, alrededor de un eje que pasa a través de su centro de masa y es perpendicular a su cara plana. *Resp.* 8.5 cm

10.43 En la Fig. 10-12 se muestran cuatro masas que están en las esquinas de un marco cuadrado muy ligero. ¿Cuál es el momento de inercia del sistema alrededor de un eje perpendicular a la página *a*) que pase a través de *A* y *b*) que pase a través de *B*? *Resp.* *a*) 1.4 kg · m^2; *b*) 2.1 kg · m^2

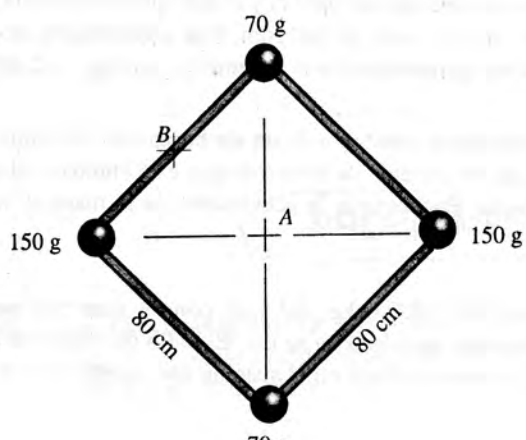


Fig. 10-12

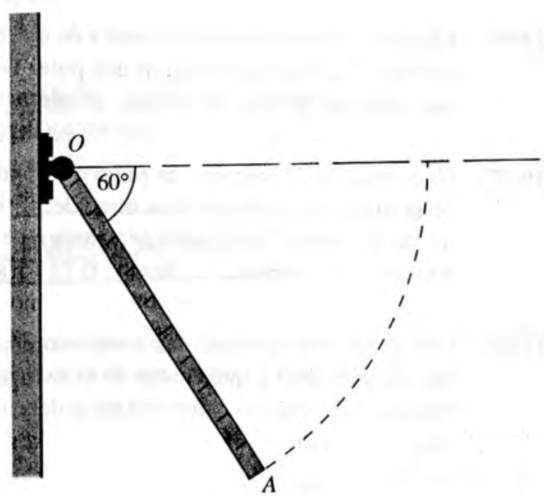


Fig. 10-13

10.44 Determínese el momento de inercia de *a*) un aro vertical delgado, de 2 kg de masa y radio de 9 cm, con respecto a un eje horizontal paralelo a su canto; *b*) de una esfera sólida de 2 kg y 5 cm de radio alrededor de un eje tangente a la esfera. *Resp.* *a*) $I = Mr^2 + Mr^2 = 0.03$ kg · m^2; *b*) $I = \frac{2}{5}Mr^2 + Mr^2 = 7 \times 10^{-3}$ kg · m^2

10.45 La varilla OA en la Fig. 10-13 es una regla de un metro. Está articulada en el punto O de tal manera que puede dar vueltas en un plano vertical. Se sostiene horizontalmente y después se suelta. Calcúlese la rapidez angular de la varilla y la rapidez lineal de su extremo libre cuando pasa a través de la posición que se muestra en la figura. (*Sugerencia*: Demuestre que $I = mL^2/3$.) *Resp.* 5.0 rad/s, 5.0 m/s

10.46 Supóngase que un satélite en viaje orbital a la Luna describe una órbita elíptica. En su punto más cercano a la Luna, tiene una rapidez v_c y un radio de r_c desde el centro de la Luna. En su punto más lejano tiene una rapidez v_f y un radio r_f. Encuéntrese la relación v_c/v_f. (*Sugerencia:* En los puntos más cercano y más lejano, es válida la relación $v = r\omega$.) *Resp.* r_f/r_c

10.47 Un disco grande, horizontal, está dando vueltas en un eje vertical a través de su centro; para el disco $I = 4000\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$. El disco se desliza cuesta abajo y viene girando a razón de 0.150 rev/s cuando una persona de 90.0 kg que está colgando de la copa de un árbol se deja caer sobre el disco. La persona aterriza y permanece a una distancia de 3.00 m en relación con el eje de rotación. ¿Cuál es la rapidez de rotación del disco después de que la persona ha aterrizado? *Resp.* 0.125 rev/s

10.48 Una estrella de neutrones se forma cuando un objeto como nuestro Sol se colapsa. Supongamos que una estrella esférica uniforme de masa M y radio R se colapsa hasta ser una esfera uniforme de radio $10^{-5}\,R$. Si la estrella inicialmente rota a razón de 1 rev por cada 25 días (como el Sol), ¿cuál será la razón de rotación de la estrella de neutrones? *Resp.* 5×10^3 rev/s

10.49 Una persona de 90 kg se encuentra parada en la orilla de un tiovivo (esencialmente un disco) a una distancia de 5.0 m de su centro. La persona comienza a caminar alrededor del perímetro del disco con una rapidez de 0.80 m/s relativa al suelo. ¿Cuál es la rapidez angular proporcionada al disco, si se considera que para el disco $I_{\text{disco}} = 20\,000\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$? (*Sugerencia*: Para la persona $I = mr^2$.) *Resp.* 0.018 rad/s

capítulo 11

Movimiento armónico simple y resortes

EL PERIODO (T) de un sistema vibratorio es el tiempo que requiere éste para completar un ciclo o vibración completa. En el caso de la vibración, es el tiempo total para el movimiento combinado, hacia atrás y hacia delante, del sistema. El periodo es *el número de segundos por ciclo.*

LA FRECUENCIA (f) es el número de vibraciones que se realizan en la unidad de tiempo o *el número de ciclos por segundo.* Como T es el tiempo para una vibración, $f = 1/T$. La unidad de frecuencia es el *hertz* (Hz) que equivale a un ciclo/s.

LA GRÁFICA DE UN MOVIMIENTO VIBRATORIO se muestra en la Fig. 11-1. El movimiento que ahí se ilustra es el de ascenso y descenso de una masa sujeta en el extremo de un resorte. Un ciclo completo es desde a hasta b, o desde c hasta d, o desde e hasta f. El tiempo que transcurre en un ciclo es T, o sea el periodo.

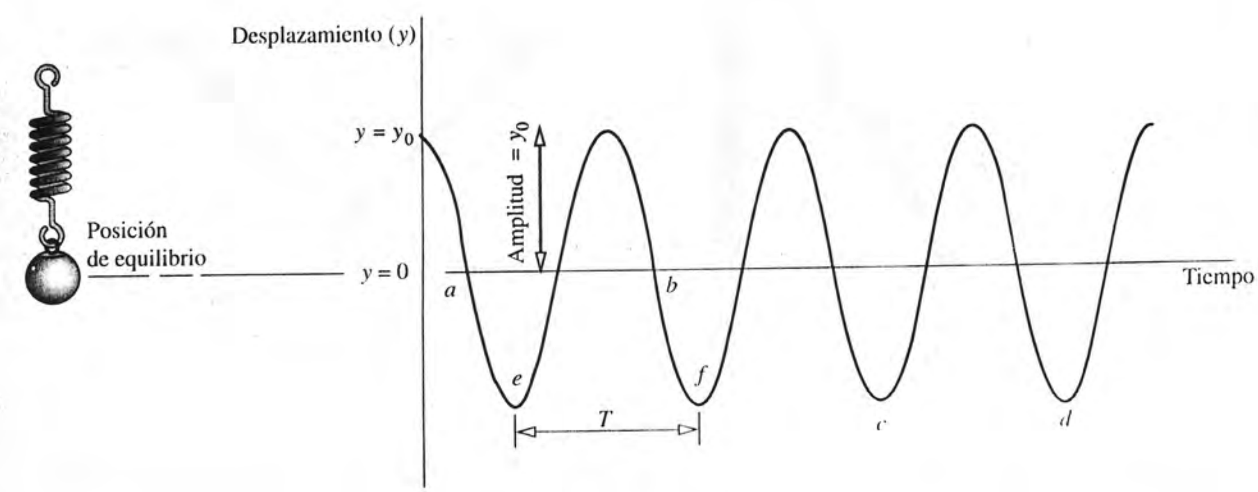


Fig. 11-1

EL DESPLAZAMIENTO (x o y) es la distancia de la posición del objeto que vibra, medida desde la posición de equilibrio (posición normal de reposo), es decir, desde el centro de su trayectoria de vibración. Al desplazamiento máximo se le llama *amplitud* (véase la Fig. 11-1).

UNA FUERZA RESTAURADORA es aquella que se opone al desplazamiento del sistema; es necesaria para que ocurra una vibración. En otras palabras, es una fuerza cuya dirección siempre es tal que empuja o jala el sistema a su posición de equilibrio (reposo normal). En el caso de una masa en el extremo de un resorte, al estirar el resorte, éste tira de la masa hacia atrás hasta llevarla a su posición de equilibrio, mientras que un resorte comprimido la empuja hacia atrás hasta llevarla también a la posición de equilibrio.

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE (MAS) es el movimiento vibratorio de un sistema que obedece la ley de Hooke. La Fig. 11-1 ilustra un movimiento armónico simple (MAS). Debido a la semejanza de su gráfica con las curvas de las funciones seno y coseno, el MAS se llama con frecuencia *movimiento senoidal.* Una característica central del MAS es que el sistema oscila a una sola frecuencia constante. Eso es lo que hace que el movimiento armónico sea "simple".

UN SISTEMA HOOKEANO (un resorte, un alambre, una varilla, etc.) es aquel que regresa a su configuración original después de haber sido deformado, y a continuación, dejado en libertad. Es más, cuando ese sistema se estira una distancia x (para comprensión, x es negativa), la fuerza de restitución ejercida por el resorte se expresa por la **ley de Hooke**.

$$F = -kx$$

El signo menos indica que la fuerza restauradora siempre tiene dirección opuesta a la de la deformación. La *constante del resorte k* tiene unidades de N/m y es una medida de la rigidez (dureza) del resorte. La mayoría de los resortes obedecen la ley de Hooke si las deformaciones son pequeñas.

En algunas ocasiones es útil expresar dicha ley en términos de la fuerza externa F_{ext} necesaria para estirar el resorte una cierta cantidad x. Esta fuerza es el negativo de la fuerza restauradora, y por lo tanto

$$F_{ext} = kx$$

LA ENERGÍA POTENCIAL ELÁSTICA almacenada en un resorte de Hooke (EP_e) que se deforma una distancia x es $\frac{1}{2}kx^2$. Si la amplitud del movimiento es x_0 para una masa sujeta en el extremo de un resorte, entonces la energía de vibración del sistema es $\frac{1}{2}kx_0^2$ para todo tiempo. Sin embargo, esta energía está completamente almacenada en el resorte cuando $x = \pm x_0$, esto es, cuando la masa tiene su máximo desplazamiento.

EL INTERCAMBIO DE ENERGÍA entre la energía cinética y la energía potencial ocurre constantemente en un sistema que vibra. Cuando éste pasa por su posición de equilibrio, la EC = máxima y la $EP_e = 0$. Cuando el sistema tiene su máximo desplazamiento, entonces EC = 0 y la EP_e = máxima. De la ley de la conservación de la energía, en un sistema en el que no hay pérdidas por fricción

$$EC + EP_e = \text{constante}$$

Para una masa m que se encuentra en el extremo de un resorte (cuya propia masa es despreciable), ésta se convierte en

$$\tfrac{1}{2}\,m v^2 + \tfrac{1}{2}\,k x^2 = \tfrac{1}{2}\,k x_0^2$$

donde x_0 es la amplitud del movimiento.

LA RAPIDEZ EN UN MAS está dada por la ecuación anterior de la energía

$$|v| = \sqrt{(x_0^2 - x^2)\frac{k}{m}}$$

LA ACELERACIÓN EN EL MAS está dada por la ley de Hooke, $F = -kx$, y $F = ma$. Igualando estas dos ecuaciones para F nos da

$$a = -\frac{k}{m}x$$

El signo menos indica que la dirección de $\vec{a}$ (y $\vec{F}$) siempre es opuesta a la dirección del desplazamiento $\vec{x}$. Téngase presente que ni $\vec{F}$ ni $\vec{a}$ son constantes.

CÍRCULO DE REFERENCIA: Supóngase que un punto P se mueve con rapidez constante v_0 alrededor de un círculo, como se muestra en la Fig. 11-2. Este círculo se llama *círculo de referencia* para el MAS. El punto A es la proyección del punto P sobre el eje x, que coincide con el diámetro horizontal del círculo. El movimiento del punto A de un lado hacia otro del punto O como centro es el MAS. La amplitud del movimiento es x_0, que es el radio del círculo. El tiempo que emplea P en dar una vuelta alrededor del círculo es el periodo T del movimiento. La velocidad, $\vec{v}_0$, del punto A tiene un componente escalar en x de

$$v_x = -v_0 \text{ sen } \theta$$

Cuando esta cantidad es positiva, $\vec{v}_x$ apunta en dirección positiva de las x; cuando es negativa, $\vec{v}_x$ apunta en dirección negativa de las x.

PERIODO EN EL MAS: El periodo T en un MAS es el tiempo que emplea el punto P en dar una vuelta al círculo de referencia en la Fig. 11-2, por lo tanto,

$$T = \frac{2\pi r}{v_0} = \frac{2\pi x_0}{v_0}$$

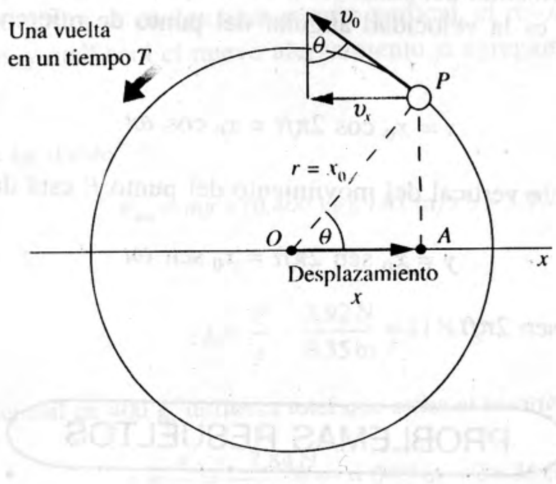


Fig. 11-2

Pero υ_0 es la rapidez máxima del punto A en la Fig. 11-2, es decir, υ_0 es el valor de $|\upsilon_x|$ en el MAS cuando $x = 0$:

$$|\upsilon_x| = \sqrt{(x_0^2 - x^2)\frac{k}{m}} \quad \text{da} \quad \upsilon_0 = x_0\sqrt{\frac{k}{m}}$$

De donde se puede obtener el periodo del MAS

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

para un resorte de Hooke.

ACELERACIÓN EN TÉRMINOS DE T: Eliminando la cantidad k/m entre las dos ecuaciones $a = -(k/m)x$ y $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, se encuentra

$$a = -\frac{4\pi^2}{T^2}x$$

EL PÉNDULO SIMPLE describe de manera aproximada un MAS si el ángulo de oscilación no es muy grande. El periodo de oscilación de un péndulo de longitud L en un lugar donde la aceleración de la gravedad es g, está dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

EL MOVIMIENTO SENOIDAL (o MAS) se puede expresar analíticamente; podemos ver en la Fig. 11-2 que el desplazamiento horizontal del punto P está dado por $x = x_0 \cos \theta$. Como $\theta = \omega t = 2\pi f t$, donde la *frecuencia angular* $\omega = 2\pi f$ es la velocidad angular del punto de referencia localizado en el círculo, de donde

$$x = x_0 \cos 2\pi f t = x_0 \cos \omega t$$

En forma similar, la componente vertical del movimiento del punto P está dado por

$$y = x_0 \operatorname{sen} 2\pi f t = x_0 \operatorname{sen} \omega t$$

También de la figura, $\upsilon_x = \upsilon_0 \operatorname{sen} 2\pi f t$.

PROBLEMAS RESUELTOS

11.1 Para el movimiento que se muestra en la Fig. 11-3, ¿cuál es la amplitud, el periodo y la frecuencia?

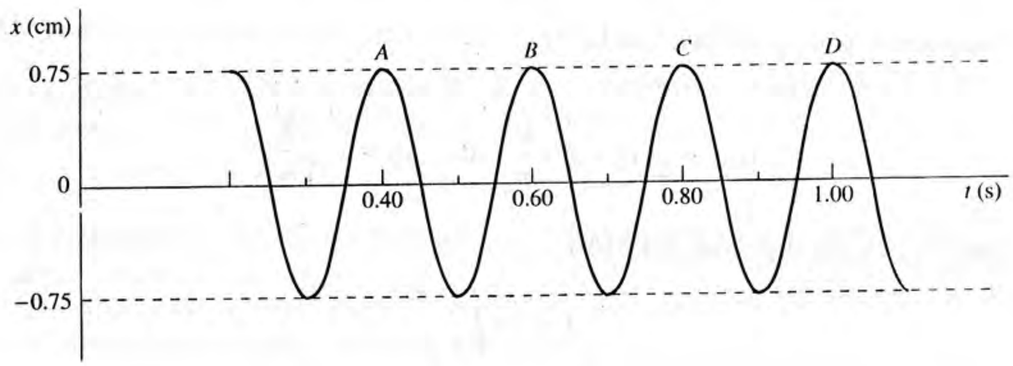


Fig. 11-3

La amplitud es el desplazamiento máximo a partir de la posición de equilibrio y es de 0.75 cm. El periodo es el tiempo empleado para completar un círculo, por ejemplo, el utilizado desde A hasta B. Por esto el periodo es 0.20 s. La frecuencia es

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.20\,\text{s}} = 5.0\,\text{ciclos/s} = 5.0\,\text{Hz}$$

11.2 Un resorte realiza 12 oscilaciones en 40 s. Calcular el periodo y la frecuencia de oscilación.

$$T = \frac{\text{intervalo de tiempo}}{\text{oscilaciones efectuadas}} = \frac{40\,\text{s}}{12} = 3.3\,\text{s} \qquad f = \frac{\text{oscilaciones efectuadas}}{\text{intervalo de tiempo}} = \frac{12}{40\,\text{s}} = 0.30\,\text{Hz}$$

11.3 Cuando una masa de 400 g se cuelga a un resorte vertical, el resorte se estira 35 cm. ¿Cuál es la constante del resorte, y cuál será el nuevo alargamiento si agregamos una masa de 400 g a la que se colgó primero?

Utilizamos $F_{ext} = ky$, donde

$$F_{ext} = mg = (0.400\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) = 3.92\text{ N}$$

para obtener

$$k = \frac{F}{y} = \frac{3.92\text{ N}}{0.35\text{ m}} = 11\text{ N/m}$$

Con la carga adicional de 400 g, la fuerza total que estira el resorte es 7.84 N. Por consiguiente

$$y = \frac{F}{k} = \frac{7.84\text{ N}}{11.2\text{ N/m}} = 0.70\text{ m} = 2 \times 35\text{ cm}$$

Como se puede observar, cada carga extra de 400 g estira al resorte la misma cantidad, ya sea que el resorte esté o no cargado.

11.4 Una masa de 200 g oscila horizontalmente y sin fricción en el extremo de un resorte horizontal para el cual $k = 7.0$ N/m. La masa de desplaza 5.0 cm de su posición de equilibrio y luego se suelta. Encuéntrense *a*) su máxima rapidez y *b*) su rapidez cuando se encuentra a 3.0 cm de la posición de equilibrio. *c*) ¿Cuál es su aceleración en cada uno de los casos?

Del principio de conservación de la energía

$$\tfrac{1}{2}kx_0^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2$$

donde $k = 7.0$ N/m, $x_0 = 0.050$ m y $m = 0.200$ kg. Resolviendo para v

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}(x_0^2 - x^2)}$$

a) La rapidez es máxima cuando $x = 0$; esto es, cuando la masa pasa por la posición de equilibrio:

$$v = x_0\sqrt{\frac{k}{m}} = (0.050\text{ m})\sqrt{\frac{7.0\text{ N/m}}{0.200\text{ kg}}} = 0.30\text{ m/s}$$

b) Cuando $x = 0.030$ m,

$$v = \sqrt{\frac{7.0\text{ N/m}}{0.200\text{ kg}}\left[(0.050\text{ m})^2 - (0.030)^2\right]\text{m}^2} = 0.24\text{ m/s}$$

c) Utilizando $F = ma$ y $F = kx$, se obtiene

$$a = \frac{k}{m}x = (35\text{ s}^{-2})(x)$$

y da como resultado $a = 0$ cuando la masa está en $x = 0$ y $a = 1.1\text{ m/s}^2$ cuando $x = 0.030$ m.

11.5 Una masa de 50 g sujeta al extremo de un resorte oscila con MAS. La amplitud del movimiento es 12 cm y el periodo es de 1.70 s. Calcular: *a*) la frecuencia, *b*) la constante del resorte, *c*) la máxima rapidez de la masa, *d*) la aceleración máxima de ésta, *e*) la rapidez cuando el desplazamiento es de 6.0 cm y *f*) la aceleración cuando $x = 6.0$ cm.

a)
$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1.70\,\text{s}} = 0.588\,\text{Hz}$$

b) Como $T = 2\pi\sqrt{m/k}$,

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4\pi^2(0.050\,\text{kg})}{(1.70\,\text{s})^2} = 0.68\,\text{N/m}$$

c)
$$\upsilon_0 = x_0\sqrt{\frac{k}{m}} = (0.12\,\text{m})\sqrt{\frac{0.68\,\text{N/m}}{0.050\,\text{kg}}} = 0.44\,\text{m/s}$$

d) De la ecuación $a = -(k/m)x$ se puede ver que la magnitud de a es máxima cuando la magnitud de x también es máxima, esto sucede en los puntos $x = \pm x_0$. De este modo,

$$a_0 = \frac{k}{m}x_0 = \frac{0.68\,\text{N/m}}{0.050\,\text{kg}}(0.12\,\text{m}) = 1.6\,\text{m/s}^2$$

e) De la ecuación $|\upsilon| = \sqrt{(x_0^2 - x^2)(k/m)}$,

$$|\upsilon| = \sqrt{\frac{[(0.12\,\text{m})^2 - (0.06\,m)^2](0.68\,\text{N/m})}{(0.050\,\text{kg})}} = 0.38\,\text{m/s}$$

f)
$$a = -\frac{k}{m}x = -\frac{0.68\,\text{N/m}}{0.050\,\text{kg}}(0.060\,\text{m}) = -0.82\,\text{m/s}^2$$

11.6 Una masa de 50 g cuelga del extremo de un resorte de Hooke. Cuando se añaden 20 g al extremo del resorte, éste se estira 7.0 cm más. *a*) Encontrar la constante del resorte. *b*) Si los 20 g se retiran, ¿cuál es ahora el periodo de oscilación?

a) Con el peso de 50 g de masa, $F_{\text{ext 1}} = kx_1$ donde x_1 es el alargamiento original del resorte. Cuando se agregan 20 g, la fuerza se convierte en $F_{\text{ext 1}} + F_{\text{ext 2}} = k(x_1 + x_2)$ donde $F_{\text{ext 2}}$ es el peso de la masa de 20 g, y x_2 es el alargamiento que ésta produce. Restando estas dos ecuaciones se obtiene

$$F_{\text{ext 2}} = kx_2$$

(Nótese que es el mismo caso cuando $F_{\text{ext}} = kx$, donde F_{ext} es la fuerza del alargamiento adicional y x es la cantidad que se estira debida a ésta. Por esto podríamos haber ignorado el hecho de que el resorte ya tenía colgada la masa de 50 g en su extremo.) Resolviendo para k, se obtiene

$$k = \frac{F_{\text{ext 2}}}{x_2} = \frac{(0.020\,\text{kg})(9.81\,\text{m/s}^2)}{0.070\,\text{m}} = 2.8\,\text{N/m}$$

b)
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.050\,\text{kg}}{2.8\,\text{N/m}}} = 0.84\,\text{s}$$

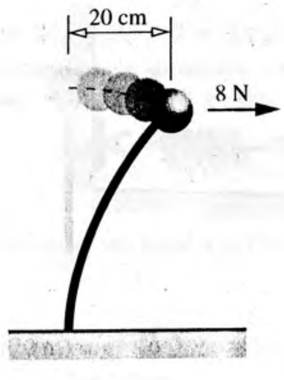


Fig. 11-4

11.7 Como se muestra en la Fig. 11-4, un resorte ligero y largo de acero está fijo en su extremo inferior y tiene amarrada una pelota de 2.0 kg en la parte superior. Se requiere una fuerza de 8.0 N para desplazar la pelota 20 cm de su posición de equilibrio. Si el sistema entra en MAS cuando se libera. *a*) Calcular la constante de fuerza del resorte y *b*) el periodo con el cual oscilará la pelota.

a)
$$k = \frac{\text{fuerza externa } F_{\text{ext}}}{\text{desplazamiento } x} = \frac{8.0\,\text{N}}{0.20\,\text{m}} = 40\,\text{N/m}$$

b)
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2.0\,\text{kg}}{40\,\text{N/m}}} = 1.4\,\text{s}$$

11.8 Cuando una masa m se cuelga de un resorte, éste se estira 6.0 cm. Determínese el periodo de oscilación cuando se tira del resorte hacia abajo un poco y después se suelta.

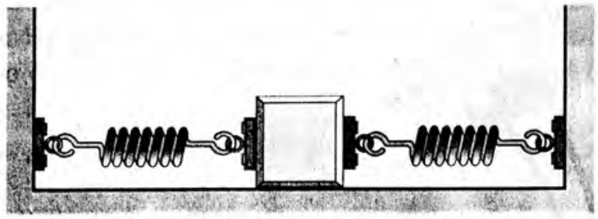
Como

$$k = \frac{F_{\text{ext}}}{x} = \frac{mg}{0.060\,\text{m}}$$

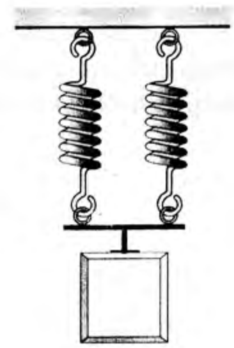
se obtiene

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.060\,\text{m}}{g}} = 0.49\,\text{s}$$

11.9 Dos resortes idénticos tienen, cada uno, $k = 20$ N/m. Una masa de 0.30 kg se sujeta a ellos como se muestra en las Figs. 11-5*a* y *b*. Encontrar el periodo de oscilación de cada sistema. Despreciar la fuerza de fricción.



a)



b)

Fig. 11-5

a) Considérese qué pasa cuando a la masa se le da un desplazamiento $x > 0$. Un resorte se alarga una distancia x mientras que el otro se comprime la misma distancia x. Cada uno de ellos ejercerá una fuerza de magnitud (20 N/m)x sobre la masa en dirección contraria al desplazamiento. Por ello la fuerza restauradora será

$$F = -(20\ \text{N/m})x - (20\ \text{N/m})x = -(40\ \text{N/m})x$$

Comparando con $F = -kx$ se puede ver que el sistema tiene una constante de resorte de $k = 40$ N/m. Por lo mismo,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.30\ \text{kg}}{40\ \text{N/m}}} = 0.54\ \text{s}$$

b) Cuando la masa se desplaza una distancia y hacia abajo, cada resorte se estira una distancia y. La fuerza neta de desplazamiento sobre la masa es entonces

$$F = -(20\ \text{N/m})y - (20\ \text{N/m})y = -(40\ \text{N/m})y$$

Comparando con $F = -ky$ la constante k resulta ser 40 N/m, la misma que en *a*). Por consiguiente, en esta situación resulta ser también 0.54 s.

11.10 En una máquina un pistón oscila con MAS y amplitud 7.0 cm. Una arandela descansa en la parte superior del pistón. A medida que el motor incrementa lentamente su velocidad, ¿a qué frecuencia la arandela no estará en contacto con el pistón?

La aceleración máxima de la arandela hacia abajo será aquella en la cual se encuentre en caída libre, g. Si el pistón se acelera hacia abajo más rápido que ésta, la arandela perderá el contacto.

En un MAS, la aceleración está dada en términos del desplazamiento y del periodo

$$a = -\frac{4\pi^2}{T^2}x$$

(Para ver esto, note que $a = -F/m = -kx/m$. Pero $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, de donde $k = 4\pi^2 m/T^2$, obteniéndose la expresión para a.) Tomando como positiva la dirección hacia arriba, la mayor aceleración hacia abajo (considérese negativa) ocurre cuando $x = +x_0 = 0.070$ m; esto es

$$a_0 = \frac{4\pi^2}{T^2}(0.070\,\text{m})$$

La arandela se separará del pistón cuando a_0 sea igual a g. Por esta razón, el periodo crítico para el MAS, T_c, está dado por

$$\frac{4\pi^2}{T_c^2}(0.070\,\text{m}) = g \quad \text{o} \quad T_c = 2\pi\sqrt{\frac{0.070\,\text{m}}{g}} = 0.53\,\text{s}$$

Éste corresponde a una frecuencia $f_c = 1/T_c = 1.9$ Hz. La arandela perderá contacto con el pistón si la frecuencia del pistón excede los 1.9 ciclos/s.

11.11 Un motor eléctrico de 20 kg se monta sobre cuatro resortes verticales, teniendo cada uno de ellos una constante de resorte de 30 N/cm. Calcular el periodo con el cual oscilará verticalmente.

Igual que en el problema 11.9, podemos reemplazar los resortes por un resorte equivalente. En este caso la constante de fuerza será 4(3000 N/m) o 12 000 N/m. Luego

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{20\,\text{kg}}{12\,000\,\text{N/m}}} = 0.26\,\text{s}$$

11.12 Se vierte mercurio dentro de un tubo de vidrio en U. En equilibrio el mercurio se encontrará a la misma altura en ambas columnas, pero cuando es perturbado oscilará hacia arriba y hacia abajo a partir de la posición de equilibrio en ambos brazos. (Véase la Fig. 11-6.) Un centímetro de la columna de mercurio tiene una masa de 15.0 g. Suponga que la columna se desplaza como se muestra, después se libera y oscila sin fricción. Calcular *a*) la constante efectiva del resorte en este movimiento y *b*) el periodo de oscilación.

a) Cuando el mercurio se desplaza una distancia x de su posición de equilibrio como se muestra, la fuerza restauradora es igual al peso de la columna no balanceada de longitud $2x$. El mercurio tiene una masa de 1.50 kg por metro. La masa de la columna es $(2x)(1.50\text{ kg})$, por lo que su peso es $mg = (29.4\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2)(x)$. Por esto la fuerza restauradora es

$$F = (29.4\,\text{N/m})(x)$$

que es de la forma $F = kx$ con $k = 29.4$ N/m. Ésta es la constante efectiva del resorte para este movimiento.

b) El periodo del movimiento es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 1.16\sqrt{M}\,\text{s}$$

donde M es la masa total de la columna de mercurio en el tubo en U, esto es, la masa total se mueve debido a la fuerza restauradora.

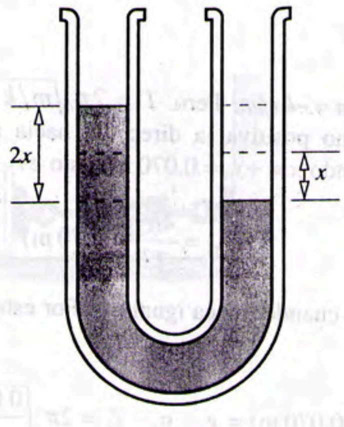


Fig. 11-6

11.13 Calcular la aceleración de la gravedad en un lugar donde un péndulo simple de 150.3 cm de longitud efectúa 100.0 ciclos en 246.7 s.

Se tiene

$$T = \frac{246.7\,\mathrm{s}}{100.0} = 2.467\,\mathrm{s}$$

Elevando al cuadrado $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ y resolviendo para g obtenemos

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}\,L = 9.749\,\mathrm{m/s^2}$$

11.14 La masa de 200 g mostrada en la Fig. 11-7 se empuja hacia la izquierda contra un resorte comprimiéndolo 15 cm a partir de la posición de equilibrio. Entonces se libera el sistema y la masa sale disparada hacia la derecha. Si la fricción se puede despreciar, ¿qué tan rápido se moverá la masa conforme se aleja? Supóngase que la masa del resorte es muy pequeña.

Cuando el resorte se comprime, almacena energía en su interior. La energía está dada por $\frac{1}{2}kx_0^2$ donde $x_0 = 0.15$ m. Después de soltar el sistema, esta energía se le comunica a la masa en forma de energía cinética

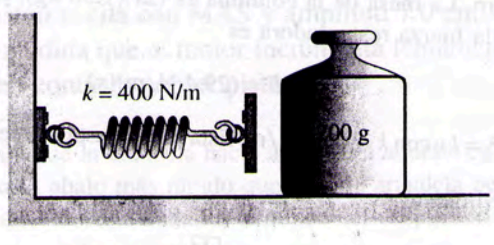


Fig. 11-7

EC. Cuando el resorte pasa por la posición de equilibrio, toda la EP_e se convertirá en EC. (Como la masa del resorte es pequeña, su energía cinética se puede despreciar.) Por esta razón,

$$EP_e \text{ Original} = \text{EC final de la masa}$$

$$\tfrac{1}{2} kx_0^2 = \tfrac{1}{2} m\upsilon^2$$

$$\tfrac{1}{2}(400\ \text{N/m})(0.15\ \text{m})^2 = \tfrac{1}{2}(0.200\ \text{kg})\upsilon^2$$

de donde $\upsilon = 6.7$ m/s.

11.15 Supóngase que, en la Fig. 11-7, la masa de 200 g se mueve hacia la izquierda con una rapidez de 8.0 m/s. Choca contra el resorte quedando sujeta a éste. *a*) ¿Qué tanto se comprime el resorte? *b*) Si el sistema entra en oscilación, ¿cuál es su amplitud? Desprecie la fricción y la masa del resorte.

a) Ya que la masa del resorte es despreciable, toda la EC de la masa se utiliza para comprimir el resorte. Por esto podemos escribir

$$\text{EC original de la masa} = EP_e \text{ final}$$

$$\tfrac{1}{2} m\upsilon_0^2 = \tfrac{1}{2} kx_0^2$$

donde $\upsilon_0 = 8.0$ m/s y x_0 es la máxima compresión del resorte. Para $m = 0.200$ kg y $k = 400$ N/m, la relación anterior nos da $x_0 = 0.179$ m $= 0.18$ m.

b) El resorte se comprime 0.179 m desde su posición de equilibrio. En esta posición toda la energía del sistema masa-resorte es EP_e. Conforme el resorte empuja a la masa regresándola hacia la derecha, ésta pasará por la posición de equilibrio. La masa se detendrá en un punto a la derecha de la posición de equilibrio donde toda la energía se ha convertido otra vez en EP_e. Como no existen pérdidas, la energía almacenada en el resorte estirado debe ser la misma que la almacenada en el resorte comprimido. Por esta razón, el alargamiento será $x_0 = 0.18$ m medido desde la posición de equilibrio. La amplitud de oscilación es por tanto 0.18 m.

11.16 En la Fig. 11-8, la masa de 2.0 kg se suelta cuando el resorte no ha sido estirado. Despreciando la inercia y la fricción de la polea, encontrar *a*) la amplitud de la oscilación resultante y *b*) su centro o punto de equilibrio.

a) Suponga que la masa cae una distancia h antes de detenerse. En ese instante, la EP_G perdida (mgh) estará almacenada en el resorte, por tanto

$$mgh = \frac{1}{2} kh^2 \quad \text{o} \quad h = 2\frac{mg}{k} = 0.13\ \text{m}$$

En su movimiento hacia arriba la masa se detiene cuando la energía del sistema es recobrada como EP_G. Por esta razón la masa subirá 0.13 m arriba de la posición de equilibrio. Luego, la amplitud es $0.13/2 = 0.065$ m.

b) El punto central del movimiento se localiza a una distancia de 0.065 m abajo del punto de donde la masa fue liberada, esto es, una distancia igual a la mitad de la recorrida debajo del punto más alto.

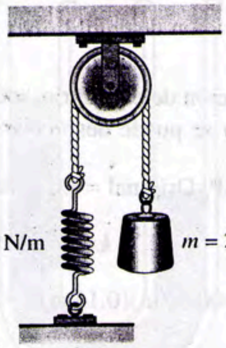


Fig. 11-8

11.17 **Una partícula de 3.0 g sujeta al extremo de un resorte se mueve de acuerdo con la ecuación $y = 0.75$ sen $63t$ donde y está dada en cm y t está en segundos. Calcular la amplitud y la frecuencia de su movimiento, su posición en $t = 0.020$ s, y la constante del resorte.**

La ecuación de movimiento es $y = y_0$ sen $2\pi f t$. Por comparación, vemos que la amplitud es $y_0 = 0.75$ cm. También

$$2\pi f = 63\ \text{s}^{-1} \quad \text{de donde} \quad f = 10\ \text{Hz}$$

(Nótese que el argumento de la función seno es adimensional; como t está en segundos, $2\pi f$ debe tener las unidades 1/s.)

Cuando $t = 0.020$ s, tenemos

$$y = 0.75 \text{ sen } (1.26 \text{ rad}) = (0.75)(0.952) = 0.71 \text{ cm}$$

Obsérvese que el argumento de la función seno está en radianes, no en grados.

Para calcular la constante del resorte, utilizamos $f = (1/2\pi)\sqrt{k/m}$ para obtener

$$k = 4\pi^2 f^2 m = 11.9 \text{ N/m} = 12 \text{ N/m}$$

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

11.18 Un péndulo es cronometrado cuando oscila. El reloj se arranca cuando la lenteja está en el extremo izquierdo de su oscilación. Cuando la lenteja regresa al extremo izquierdo después de la vuelta 90, el reloj marca 60.0 s. ¿Cuál es el periodo de oscilación y cuál la frecuencia? *Resp.* 0.667 s, 1.50 Hz

11.19 Una masa de 300 g en el extremo de un resorte de Hooke oscila en dirección vertical de tal forma que su punto más bajo se encuentra a 2.0 cm de la cubierta de una mesa y a 16 cm en el punto más alto. Su periodo es 4.0 s. Determine *a*) la amplitud de vibración, *b*) la constante del resorte, *c*) la rapidez y la aceleración cuando la masa se encuentra a 9 cm arriba de la cubierta de la mesa, *d*) la rapidez y la aceleración de la masa cuando ésta se encuentra a 12 cm arriba de la cubierta. *Resp.* *a*) 7.0 cm; *b*) 0.74 N/m; *c*) 0.11 m/s, cero; *d*) 0.099 m/s, 0.074 m/s^2

11.20 Un resorte de Hooke helicoidal se estira 10 cm cuando una masa de 1.5 kg cuelga de él. Supóngase que una masa de 4.0 kg cuelga del resorte y entra en oscilación con una amplitud de 12 cm. Calcular *a*) la constante de fuerza del resorte, *b*) la fuerza restauradora que actúa sobre el cuerpo que oscila, *c*) el periodo de oscilación, *d*) la máxima rapidez y la máxima aceleración del cuerpo que oscila y *e*) la rapidez y aceleración cuando el desplazamiento es de 9 cm. *Resp.* *a*) 0.15 kN/m; *b*) 18 N; *c*) 1.0 s; *d*) 0.73 m/s, 4.4 m/s²; *e*) 0.48 m/s, 3.3 m/s²

11.21 Una masa de 2.5 kg entra en oscilación con MAS y efectúa 3 oscilaciones cada segundo. Calcular la aceleración y la fuerza restauradora que actúan sobre el cuerpo cuando se desplaza 5.0 cm de la posición de equilibrio. *Resp.* 18 m/s², 44 N

11.22 Una masa de 300 g en el extremo de un resorte oscila con una amplitud de 7.0 cm y una frecuencia de 1.80 Hz. *a*) Calcular la rapidez y la aceleración máxima. *b*) ¿Cuál es la rapidez cuando se encuentra a 3.0 cm de la posición de equilibrio?. *Resp.* *a*) 0.79 m/s, 8.9 m/s²; *b*) 0.72 m/s

11.23 Un resorte de Hooke se estira 20 cm cuando una determinada masa cuelga de él. ¿Cuál es su frecuencia de oscilación cuando la masa se jala hacia abajo y después se suelta? *Resp.* 1.1 Hz

11.24 Una masa de 300 g en el extremo de un resorte ejecuta un MAS con un periodo de 2.4 s. Calcular el periodo de oscilación de una masa de 133 g que se cuelga al mismo resorte. *Resp.* 1.6 s

11.25 Con una masa de 50 g en su extremo, un resorte entra en oscilación en un MAS con una frecuencia de 0.70 Hz. ¿Cuánto trabajo se necesita para estirar el resorte una longitud de 15 cm? ¿Cuánta energía se almacena en el resorte? *Resp.* 0.011 J, 0.011 J

11.26 En una situación similar a la que se muestra en la Fig. 11-7, una masa presiona contra un resorte de masa despreciable para el cual $k = 400$ N/m. La masa comprime al resorte 8.0 cm y después se suelta dejando el resorte. Después de resbalar 55 cm sobre la cubierta de una mesa desde el punto en que se suelta, la masa llega al reposo. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza de fricción que se opone al movimiento? *Resp.* 2.3 N

11.27 Una masa de 500 g está sujeta al extremo de un resorte vertical, inicialmente sin alargar, para el cual $k = 30$ N/m. Después se suelta la masa, de modo que cae y alarga el resorte. ¿Cuánto caerá antes de detenerse? (*Sugerencia:* La EP_G perdida por la masa debe aparecer como EP_e.) *Resp.* 33 cm

11.28 Una escopeta que dispara balas de corcho utiliza un resorte para el cual $k = 20$ N/cm. Cuando está cargado el resorte se comprime 3.0 cm. ¿Qué altura alcanzará un proyectil de 5.0 g disparado con esta escopeta? *Resp.* 18 m

11.29 Un bloque de forma cúbica oscila horizontalmente en MAS con una amplitud de 8.0 cm y una frecuencia de 1.50 Hz. Si un bloque más pequeño colocado sobre el primero no ha de resbalar, ¿cuál es el valor mínimo del coeficiente de fricción estático que puede existir entre los dos bloques? *Resp.* 0.72

11.30 Calcular la frecuencia de oscilación en Marte de un péndulo simple que tiene 50 cm de longitud. El peso de los objetos en Marte es 0.40 veces el peso en la Tierra. *Resp.* 0.45 Hz

11.31 Un "péndulo segundero" marca pulsaciones de segundo, esto es, tarda 1 s para completar medio ciclo. *a*) ¿Cuál es la longitud de un péndulo segundero simple en un lugar donde $g = 9.80\ \text{m/s}^2$? *b*) En ese lugar ¿cuál es la longitud de un péndulo para el cual $T = 1.00$ s? *Resp.* *a*) 99.3 cm: *b*) 24.8 cm

11.32 Demuéstrese que el periodo natural de oscilación vertical de una masa colgada en un resorte de Hooke es el mismo que el periodo de un péndulo simple cuya longitud es igual a la elongación del resorte producida por la masa colgada.

11.33 Una partícula localizada en el origen de coordenadas en $t = 0$ oscila alrededor del origen a lo largo del eje y con una frecuencia de 20 Hz y una amplitud de 3.0 cm. Escríbase su ecuación de movimiento en centímetros. *Resp.* $y = 3.0$ sen $125.6t$

11.34 Una partícula oscila de acuerdo con la ecuación $x = 20 \cos 16t$, donde x está en cm. Encuéntrense la amplitud, la frecuencia y la posición en $t = 0$ s. *Resp.* 20 cm, 2.6 Hz, $x = 20$ cm

11.35 Una partícula oscila de acuerdo a la ecuación $y = 5.0 \cos 23t$, donde y está en cm. Calcular la frecuencia de oscilación y su posición en $t = 0.15$ s. *Resp.* 3.7 Hz, −4.8 cm

capítulo 12

Densidad; elasticidad

LA DENSIDAD (ρ) de un material es la masa por unidad de volumen del material:

$$\rho = \frac{\text{masa del cuerpo}}{\text{volumen del cuerpo}} = \frac{m}{V}$$

La unidad en el SI para la densidad es kg/m^3, también es usado el g/cm^3: 1000 kg/m^3 = 1 g/cm^3. La densidad del agua es aproximadamente 1000 kg/m^3.

DENSIDAD RELATIVA (ρ_{rel}) de una sustancia es la razón de la densidad de una sustancia respecto a la densidad de una sustancia estándar. Ésta generalmente es el agua (a 4°C) para sólidos y líquidos, mientras que para los gases, generalmente es el aire.

$$\rho_{\text{rel}} = \frac{\rho}{\rho_{\text{estándar}}}$$

Como la densidad relativa es adimensional, tiene el mismo valor para todos los sistemas de unidades.

ELASTICIDAD es una propiedad en virtud de la cual un cuerpo recobra su tamaño y forma original cuando la fuerza que lo deformó deja de actuar.

ESFUERZO (σ) que experimenta un sólido es la magnitud de la fuerza actuante (F) dividida por el área (A) sobre la que actúa dicha fuerza:

$$\text{Esfuerzo} = \frac{\text{fuerza}}{\text{área sobre la que actúa la fuerza}}$$

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Su unidad en el SI es el *pascal* (Pa), donde 1 Pa = 1 N/m^2. De esta manera, si una columna soporta una carga, el esfuerzo en cualquier punto de la columna es la carga dividida entre el área de la sección transversal en ese punto; las secciones más delgadas experimentan un mayor esfuerzo.

DEFORMACIÓN (ε) es la fracción del cambio de forma que resulta de un esfuerzo. Se mide por la relación del cambio de alguna dimensión del cuerpo con respecto a la original en la cual ocurre el cambio.

$$\text{Deformación} = \frac{\text{cambio en la dimensión}}{\text{dimensión original}}$$

Así, la deformación normal de un cuerpo bajo una carga axial es el cambio de la longitud (ΔL) sobre la longitud original L_0 de dicho cuerpo:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

La deformación no tiene unidades, ya que es una relación entre cantidades con las mismas dimensiones. La definición exacta de deformación para varias situaciones particulares se dará después.

LÍMITE DE ELASTICIDAD es el valor mínimo de esfuerzo requerido para producir una deformación permanente en un cuerpo. Cuando se aplica un esfuerzo que excede este límite, el cuerpo no regresa a su estado original exacto, después de que se elimina el esfuerzo aplicado.

MÓDULO DE YOUNG (Y) o *módulo de elasticidad* se describe como

$$\text{Módulo de elasticidad} = \frac{\text{esfuerzo}}{\text{deformación}}$$

El módulo tiene las mismas unidades que el esfuerzo. Entre más grande sea el valor del módulo de elasticidad de un cuerpo, será necesario aplicar un esfuerzo de las mismas proporciones para deformarlo, es decir, el cuerpo es muy rígido.

De acuerdo a lo anterior,

$$Y = \frac{F/A}{\Delta L/L_0} = \frac{FL_0}{A\,\Delta L}$$

Las unidades del módulo de Young en el SI es el Pa. A diferencia de la constante k de la ley de Hooke, el valor de Y depende sólo de la naturaleza de material del alambre o la varilla, y no de sus dimensiones. En consecuencia, el módulo de Young es un instrumento muy importante para conocer el comportamiento mecánico de los materiales.

EL MÓDULO VOLUMÉTRICO DE ELASTICIDAD (B) describe la elasticidad volumétrica de un material. Supóngase que una fuerza de compresión, uniformemente distribuida, actúa sobre la superficie de un objeto y está aplicada de tal forma que es perpendicular a la superficie en todos los puntos. Entonces, si F es la fuerza que actúa sobre y perpendicularmente a la superficie A, se define:

$$\text{Presión sobre } A = P = \frac{F}{A}$$

En el SI la unidad de presión es Pa.

Supóngase que la presión sobre un objeto de volumen inicial V_0 se incrementa en una cantidad ΔP. El incremento en la presión origina un cambio de volumen ΔV donde ΔV es negativo. Entonces se define:

$$\text{Esfuerzo volumétrico} = \Delta P \qquad \text{Deformación volumétrica} = -\frac{\Delta V}{V_0}$$

Por lo tanto

$$\text{Deformación volumétrica} = \frac{\text{esfuerzo}}{\text{deformación}}$$

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V / V_0} = -\frac{V_0 \Delta P}{\Delta V}$$

El signo menos se utiliza para eliminar el valor numérico negativo de ΔV y, por consiguiente, para convertir a B en un número positivo. El módulo volumétrico de elasticidad tiene unidades de presión.

El recíproco del módulo volumétrico de elasticidad se llama *compresibilidad* K de una sustancia.

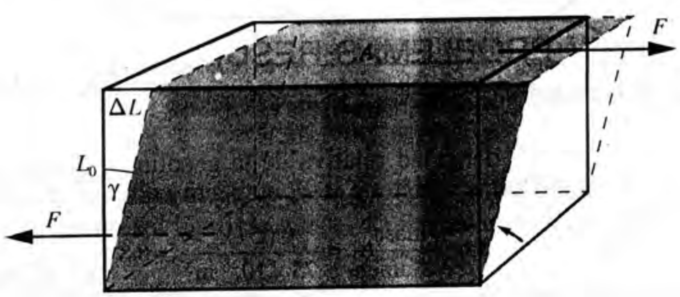


Fig. 12-1

EL MÓDULO DE CORTE (O CORTANTE) (S) describe la elasticidad de la forma de un material. Supóngase, como se muestra en la Fig. 12-1, que sobre un bloque rectangular actúan fuerzas tangenciales F iguales y opuestas. Estas *fuerzas cortantes* deforman el bloque rectangular como se indica, pero su volumen permanece constante. Se define

$$\text{Esfuerzo cortante} = \frac{\text{fuerza tangencial}}{\text{área que se corta}}$$

$$\sigma_s = \frac{F}{A}$$

$$\text{Deformación cortante} = \frac{\text{distancia que se corta}}{\text{distancia entre las superficies}}$$

$$\varepsilon_s = \frac{\Delta L}{L_0}$$

Entonces

$$\text{Módulo de corte} = \frac{\text{esfuerzo}}{\text{deformación}}$$

$$S = \frac{F/A}{\Delta L/L_0} = \frac{FL_0}{A\,\Delta L}$$

Ya que ΔL es en general muy pequeña, la relación $\Delta L/L_0$ es aproximadamente igual al ángulo de corte γ en radianes. En este caso

$$S = \frac{F}{A\gamma}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

12.1 Determínese la densidad y la densidad relativa de la gasolina, si 51 g ocupan 75 cm³.

$$\text{Densidad} = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} = \frac{0.051\text{ kg}}{75\times10^{-6}\text{ m}^3} = 6.8\times10^{2}\text{ kg/m}^3$$

$$\text{Densidad relativa} = \frac{\text{densidad de la gasolina}}{\text{densidad del agua}} = \frac{6.8\times10^{2}\text{ kg/m}^3}{1000\text{ kg/m}^3} = 0.68$$

o bien

$$\text{Densidad relativa} = \frac{\text{masa de 75 cm}^3\text{ de gasolina}}{\text{masa de 75 cm}^3\text{ de agua}} = \frac{51\text{ g}}{75\text{ g}} = 0.68$$

12.2 ¿Qué volumen ocupan 300 g de mercurio? La densidad del mercurio es 13 600 kg/m³.

De $\rho = m/V$,

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{0.300\ \text{kg}}{13\,600\ \text{kg/m}^3} = 2.21 \times 10^{-5}\ \text{m}^3 = 22.1\ \text{cm}^3$$

12.3 La densidad relativa del hierro colado es de 7.20. Determínese la densidad y la masa de 60.0 cm³ de hierro.

Para hacerlo se utilizará

$$\text{Densidad relativa} = \frac{\text{densidad de la sustancia}}{\text{densidad del agua}} \quad y \quad \rho = \frac{m}{V}$$

De la primera ecuación,

$$\text{Densidad del hierro} = (\text{densidad relativa})(\text{densidad del agua}) = (7.20)(1000\ \text{kg/m}^3) = 7200\ \text{kg/m}^3$$

así pues,

$$\text{Masa de } 60.0\ \text{cm}^3 = \rho V = (7200\ \text{kg/m}^3)(60.0 \times 10^{-6}\ \text{m}^3) = 0.432\ \text{kg}$$

12.4 La masa de cierto matraz calibrado cuando está vacío es de 25.0 g, cuando se llena con agua es de 75.0 g y cuando se llena con glicerina es de 88.0 g. Encuéntrese la densidad relativa de la glicerina.

De los datos, se sabe que la masa de la glicerina es de 63.0 g, con un volumen igual al del agua que tiene una masa de 50.0 g. Entonces

$$\text{Densidad relativa} = \frac{\text{masa de la glicerina}}{\text{masa del agua}} = \frac{63.0\ \text{g}}{50.0\ \text{g}} = 1.26$$

12.5 Un matraz calibrado tiene una masa de 30.0 g cuando está vacío, de 81.0 g cuando está lleno de agua y de 68.0 g cuando está lleno de aceite. Determínese la densidad del aceite.

Primero se calculará el volumen del matraz por medio de $\rho = m/V$, utilizando los datos del agua:

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{(81.0 - 30.0) \times 10^{-3}\ \text{kg}}{1000\ \text{kg/m}^3} = 51.0 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$$

Entonces, para el aceite,

$$\rho_{\text{aceite}} = \frac{m_{\text{aceite}}}{V} = \frac{(68.0 - 30.0) \times 10^{-3}\ \text{kg}}{51.0 \times 10^{-6}\ \text{m}^3} = 745\ \text{kg/m}^3$$

12.6 Un cubo de aluminio sólido tiene 2.00 cm por lado. La densidad del aluminio es 2700 kg/m^3. Determínese la masa del cubo.

$$\text{Masa del cubo} = \rho V = (2700\ kg/m^3)(0.020\,0\ m)^3 = 0.021\,6\ kg = 21.6\ g$$

12.7 ¿Cuál es la masa de un litro (1000 cm^3) de aceite de semilla de algodón, cuya densidad es 926 kg/m^3? ¿Cuál es su peso?

$$m = \rho V = (926\ kg/m^3)(1000 \times 10^{-6}\ m^3) = 0.926\ kg$$

$$\text{Peso} = mg = (0.926\ kg)(9.81\ m/s^2) = 9.08\ N$$

12.8 Un proceso de chapeado electrolítico de estaño da un recubrimiento con un espesor de 7.5×10^{-5} cm. ¿Cuál será el área de la superficie que puede cubrirse por este método, si se utiliza 0.500 kg de estaño? La densidad del estaño es de 7300 kg/m^3.

El volumen de 0.500 kg de estaño se obtiene de la relación $\rho = m/V$ por lo tanto

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{0.500\ kg}{7300\ kg/m^3} = 6.85 \times 10^{-5}\ m^3$$

El volumen del chapeado se obtiene del área A y el espesor t es $V = At$. Despejando A, tenemos

$$A = \frac{V}{t} = \frac{6.85 \times 10^{-5}\ m^3}{7.50 \times 10^{-7}\ m} = 91.3\ m^2$$

que sería el área que se puede cubrir.

12.9 Una lámina delgada de oro tiene una masa de 6.50 mg y un área de 3.12 cm^2. ¿De qué grueso es la lámina? La densidad es 19 300 kg/m^3.

Un miligramo es igual a 10^{-6} kg, así que la masa de la lámina es de 6.50×10^{-6} kg. Su volumen es

$$V = (\text{área}) \times (\text{espesor}) = (3.12 \times 10^{-4}\ m^2)\ (\tau)$$

donde τ es el espesor de la lámina. Igualando la expresión con el volumen dada por m/ρ obtenemos

$$(3.12 \times 10^{-4}\ m^2)(\tau) = \frac{6.50 \times 10^{-6}\ kg}{19\,300\ kg/m^3}$$

de donde $\tau = 1.08 \times 10^{-6}\ m = 1.08\ \mu m$.

12.10 La masa de un litro de leche es 1.032 kg. La grasa que contiene cuenta con una densidad de 865 kg/m³ cuando está pura, y está contenida en un 4% del volumen de la leche. ¿Cuál es la densidad de la leche descremada?

Volumen de la grasa en 1000 cm³ de leche = 4% × 1000 cm³ = 40.0 cm³

$$\text{Masa de } 40.0\ \text{cm}^3 \text{ de grasa} = V\rho = (40.0 \times 10^{-6}\ \text{m}^3)(865\ \text{kg/m}^3) = 0.034\,6\ \text{kg}$$

$$\text{Densidad de la leche descremada} = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} = \frac{(1.032 - 0.034\,6)\ \text{kg}}{(100 - 40.0) \times 10^{-6}\ \text{m}^3} = 1.04 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$$

12.11 Un alambre de metal de 75.0 cm de longitud y 0.130 cm de diámetro se alarga 0.0350 cm cuando se le cuelga una carga de 8.00 kg en uno de sus extremos. Encuéntrense el esfuerzo, la deformación y el módulo de Young para el material del alambre.

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{(8.00\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2)}{\pi(6.50 \times 10^{-4}\ \text{m})^2} = 5.91 \times 10^7\ \text{N/m}^2 = 5.91 \times 10^7\ \text{Pa}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{0.0350\ \text{cm}}{75.0\ \text{cm}} = 4.67 \times 10^{-4}$$

$$Y = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{5.91 \times 10^7\ \text{Pa}}{4.67 \times 10^{-4}} = 1.27 \times 10^{11}\ \text{Pa} = 127\ \text{GPa}$$

12.12 Una columna cilíndrica de acero tiene 4.0 m de largo y 9.0 cm de diámetro. ¿Cuál será su decremento en longitud cuando soporta una carga de 80 000 kg? $Y = 1.9 \times 10^{11}$ Pa.

Primero se calcula

$$\text{Área de la sección transversal de la columna} = \pi r^2 = \pi(0.045\ \text{m})^2 = 6.36 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$$

Ahora, dado que $Y = (F/A)/(\Delta L/L_0)$, se tiene

$$\Delta L = \frac{FL_0}{AY} = \frac{[(8.00 \times 10^4)(9.81)\ \text{N}](4.0\ \text{m})}{(6.36 \times 10^{-3}\ \text{m}^2)(1.9 \times 10^{11}\ \text{Pa})} = 2.6 \times 10^{-3}\ \text{m} = 2.6\ \text{mm}$$

12.13 La presión atmosférica es aproximadamente 1.01×10^5 Pa. ¿De qué magnitud será la fuerza que ejerce la atmósfera sobre un área de 2.0 cm² situada en la parte superior de la cabeza?

Ya que $P = F/A$, donde F es perpendicular a A, se obtiene $F = PA$. Si se supone que 2.0 cm² de la cabeza son planos (aproximadamente correcto) y que la fuerza debida a la atmósfera es perpendicular a la superficie (como de hecho lo es), se obtiene

$$F = PA = (1.01 \times 10^5\ \text{N/m}^2)(2.0 \times 10^{-4}\ \text{m}^2) = 20\ \text{N}$$

12.14 Una mujer de 60 kg se encuentra de pie sobre una caja cúbica muy ligera que tiene 5.0 cm por lado. La caja se encuentra colocada en el piso. ¿Cuál es la presión que ejerce la caja sobre el piso?

$$P = \frac{F}{A} = \frac{(60)(9.81)\ \text{N}}{(5.0 \times 10^{-2}\ \text{m})^2} = 2.4 \times 10^5\ \text{N/m}^2$$

12.15 El módulo volumétrico para el agua es 2.1 GPa. Calcúlese la contracción volumétrica de 100 mL de agua cuando se someten a una presión de 1.5 MPa.

Dado que $B = -\Delta P/(\Delta V/V_0)$, tenemos

$$\Delta V = -\frac{V_0 \Delta P}{B} = -\frac{(100\ \text{mL})(1.5 \times 10^6\ \text{Pa})}{2.1 \times 10^9\ \text{Pa}} = -0.071\ \text{mL}$$

12.16 Una gelatina con forma de caja tiene un área en su base de 15 cm² y una altura de 3.0 cm. Cuando se aplica una fuerza cortante de 0.50 N en la cara superior, ésta se desplaza 4.0 mm en relación a la cara inferior. ¿Cuáles son el esfuerzo cortante, la deformación al corte y el módulo de corte para la gelatina?

$$\sigma_s = \frac{\text{fuerza tangencial}}{\text{área de cara}} = \frac{0.50\ \text{N}}{15 \times 10^{-4}\ \text{m}^2} = 0.33\ \text{kPa}$$

$$\varepsilon_s = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{altura}} = \frac{0.40\ \text{cm}}{3.0\ \text{cm}} = 0.13$$

$$S = \frac{0.33\ \text{kPa}}{0.13} = 2.5\ \text{kPa}$$

12.17 Una pelota de 15 kg y de radio 4.0 cm está suspendida de un punto localizado a 2.94 m sobre el piso por medio de un alambre de hierro cuya longitud es de 2.85 m y diámetro de 0.090 cm, siendo su módulo de Young de 180 GPa. Si la pelota se pone a oscilar de tal manera que su centro pase por el punto más bajo de su trayectoria a 5.0 m/s, ¿a qué distancia del piso pasará la pelota?

Sea F_T la tensión del alambre, cuando al oscilar pasa por el punto más bajo. Ya que F_T debe equilibrar la fuerza centrípeta y el peso,

$$F_T = mg + \frac{mv^2}{r} = m\left(9.81 + \frac{25}{r}\right)$$

todo en unidades del SI apropiadas. Esta expresión es complicada, ya que r es la distancia desde el pivote del soporte al centro de la pelota cuando el alambre está tensado, así que es igual a $r_0 + \Delta r$ donde r_0, la longitud no deformada del alambre, es

$$r_0 = 2.85\ \text{m} + 0.040\ \text{m} = 2.89\ \text{m}$$

y donde Δr es todavía desconocida. Sin embargo, la distancia no deformada desde el pivote al borde inferior de la pelota es 2.85 m + 0.080 m = 2.93 m, de donde el máximo valor posible para Δr es

$$2.94\ \text{m} - 2.93\ \text{m} = 0.01\ \text{m}$$

Por consiguiente, si se utiliza $r = r_0 = 2.89$ m, el error que se comete no es mayor a 1/3%. Por lo tanto tenemos que $F_T = 277$ N. Bajo esta tensión, el alambre se alargará

$$\Delta L = \frac{FL_0}{AY} = \frac{(277\ \text{N})(2.85\ \text{m})}{\pi(4.5\times10^{-4}\ \text{m})^2(1.80\times10^{11}\ \text{Pa})} = 6.9\times10^{-3}\ \text{m}$$

En consecuencia, la pelota libra por

$$2.94\ \text{m} - (2.85 + 0.006\,9 + 0.080)\ \text{m} = 0.003\,1\ \text{m} = 3.1\ \text{mm}$$

Para comprobar la aproximación que se ha realizado, podemos utilizar $r = 2.90$ m, que es su valor máximo posible. Entonces se encuentra que $\Delta L = 6.9$ mm, demostrándose que la aproximación realizada ha originado un error despreciable.

12.18 **Un alambre vertical de 5.0 m de largo y 0.008 8 cm² de área de sección transversal, tiene un módulo de Young $Y = 200$ GPa. Un objeto de 2.0 kg se sujeta a su extremo y alarga el alambre elásticamente. Si ahora se tira del objeto hacia abajo un poco y se suelta, el objeto experimentará un MAS vertical. Encuéntrese el periodo de su vibración.**

La constante del alambre que actúa como resorte vertical está dada por $k = F/\Delta L$, donde ΔL es la deformación producida por la fuerza (peso) F. Pero, de $F/A = Y(\Delta L/L_0)$,

$$k = \frac{F}{\Delta L} = \frac{AY}{L_0} = \frac{(8.8\times10^{-7}\ \text{m}^2)(2.00\times10^{11}\ \text{Pa})}{5.0\ \text{m}} = 35\ \text{kN/m}$$

Entonces para el periodo se tiene

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2.0\ \text{kg}}{35\times10^3\ \text{N/m}}} = 0.047\ \text{s}$$

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

12.19 Determínese la densidad y la densidad relativa del alcohol etílico si 63.3 g ocupan 80.0 mL. *Resp.* 791 kg/m³, 0.791

12.20 Obténgase el volumen de 200 g de tetracloruro de carbono, cuya densidad relativa es de 1.60. *Resp.* 125 mL

12.21 La densidad del aluminio es de 2.70 g/cm³. ¿Qué volumen ocuparán 2.00 kg? *Resp.* 740 cm³

12.22 Calcúlese la masa de un cubo de aluminio que tiene 5.00 cm por lado. La densidad del aluminio es de 2700 kg/m^2. *Resp.* 0.338 kg.

12.23 Un cilindro contiene 200 kg de agua o 132 kg de gasolina. Determínese para la gasolina *a*) su densidad relativa y *b*) su densidad en kg/m^3. *Resp.* *a*) 0.660; *b*) 660 kg/m^3

12.24 En condiciones estándar, el aire tiene una densidad de 1.29 kg/m^3. ¿Cuál es la masa del aire que se encuentra en un cuarto de dimensiones $10.0 \text{ m} \times 8.00 \text{ m} \times 3.00 \text{ m}$? *Resp.* 310 kg

12.25 ¿Cuál es la densidad de la materia contenida en el núcleo del átomo de hidrógeno? Puede suponerse que el núcleo es una esfera de radio 1.2×10^{-15} m y su masa es de 1.67×10^{-27} kg. El volumen de una esfera es $(4/3)\pi r^3$. *Resp.* 2.3×10^{17} kg/m^3

12.26 Para determinar el radio interno de un tubo capilar uniforme, el tubo se llena de mercurio. Se encontró que la columna de mercurio que lo llenó tiene 2.375 cm de largo y una masa de 0.24 g. ¿Cuál es el radio interno del tubo? La densidad del mercurio es 13 600 kg/m^3, y el volumen de un cilindro circular recto es $\pi r^2 h$. *Resp.* 0.49 mm

12.27 El ácido de los acumuladores tiene un $\rho_{rel} = 1.285$ y el 38.0% de su peso es ácido sulfúrico. ¿Cuál es la masa de este último contenida en un litro de ácido para acumulador? *Resp.* 488 g

12.28 Una película semitransparente de oro ($\rho = 19\,300$ kg/m^3) tiene un área de 14.5 cm^2 y una masa de 1.93 mg. *a*) ¿Cuál es el volumen de 1.93 mg de oro? *b*) ¿Cuál es el espesor de la película en angstroms, donde 1 Å = 10^{-10} m? *c*) El átomo de oro tiene un diámetro aproximado de 5 Å. ¿De cuántos átomos es el espesor de la película? *Resp.* *a*) 1.00×10^{-10} m^3; *b*) 690 Å; *c*) 138 átomos de espesor

12.29 En una fábrica de cemento polvorienta e insalubre había 2.6×10^9 partículas por metro cúbico ($\rho_{rel} = 3.0$). Considerando que las partículas son esferas de 2.0 μm de diámetro, determínese la masa del polvo *a*) en un cuarto de $20 \text{ m} \times 15 \text{ m} \times 8.0 \text{ m}$ y *b*) el inhalado en cada respiración promedio de 400 cm^3 de volumen. *Resp.* *a*) 78 g; *b*) 13 μg

12.30 Una varilla de hierro de 4.00 m de largo y 0.500 cm^2 de sección transversal, se alarga 1.00 mm cuando se le cuelga una masa de 225 kg en el extremo más bajo. Encuéntrese el módulo de Young para el hierro. *Resp.* 176 GPa

12.31 Una carga de 50 kg se aplica en el extremo inferior de una varilla de acero de 80 cm de longitud y 0.60 cm de diámetro. ¿Cuánto se alargará la varilla? Para el acero, $Y = 190$ GPa. *Resp.* 73 μm

12.32 Una plataforma está suspendida por cuatro alambres colocados en sus esquinas. Cada alambre tiene 3.0 m de largo y 2.0 mm de diámetro. El módulo de Young para el material del alambre es 180 GPa. ¿A qué distancia bajará la plataforma (debido a la elongación de los alambres) si se coloca una carga de 50 kg en el centro de la plataforma? *Resp.* 0.65 mm

12.33 Determínese la fracción de cambio de volumen cuando la presión de la atmósfera (1×10^5 Pa) alrededor de un bloque de metal se reduce a cero colocando el bloque en el vacío. El módulo volumétrico para el metal es 125 GPa. *Resp.* 8×10^{-7}

12.34 Calcúlese el cambio de volumen de un cubo sólido de cobre, de 40 mm por lado, cuando se somete a una presión de 20 MPa. El módulo volumétrico del cobre es 125 GPa. *Resp.* $-10\ \text{mm}^3$

12.35 La compresibilidad del agua es $5.0 \times 10^{-10}\ \text{m}^2/\text{N}$. Encuéntrese el decremento en el volumen de 100 mL de agua cuando se someten a una presión de 15 MPa. *Resp.* 0.75 mL

12.36 Dos fuerzas paralelas y opuestas, cada una de 4000 N, se aplican tangencialmente a las caras superior e inferior de un bloque metálico en forma de cubo, de 25 cm de lado. Calcúlense el ángulo de corte y el desplazamiento de la cara superior en relación a la inferior. El módulo de corte para el metal es de 80 GPa. *Resp.* 8.0×10^{-7} rad, 2.0×10^{-7} m

12.37 Un motor de 60 kg se coloca sobre cuatro bloques cilíndricos de hule. Cada cilindro tiene una altura de 3.0 cm y un área en su sección transversal de 15 cm^2. El módulo de corte para este hule es de 2.0 MPa. *a*) Si se aplica una fuerza lateral al motor de 300 N, ¿cuánto se moverá de lado? *b*) ¿Con qué frecuencia vibrará el motor hacia adelante y hacia atrás si se le perturba? *Resp.* *a*) 0.075 cm; *b*) 13 Hz

capítulo 13

Fluidos en reposo

LA PRESIÓN PROMEDIO sobre una superficie de área A se define como la fuerza dividida por el área donde la fuerza debe ser perpendicular (normal) al área:

$$\text{Presión promedio} = \frac{\text{fuerza normal sobre un área}}{\text{área sobre la que la fuerza se distribuye}}$$

$$P = \frac{F}{A}$$

Recuerde que la unidad SI de la presión es el pascal (Pa), y 1 Pa = 1 N/m^2.

LA PRESIÓN ATMOSFÉRICA ESTÁNDAR es 1.01×10^5 Pa, y es equivalente a 14.7 $lb/pulg^2$. Otras unidades para la presión son

$$1 \text{ atmósfera (atm)} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ torr} = 1 \text{ mm de mercurio (mmHg)} = 133.32 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ lb/pulg}^2 = 6.895 \text{ kPa}$$

LA PRESIÓN HIDROSTÁTICA debida a la columna de un fluido de altura h y densidad de masa ρ es

$$P = \rho g h$$

PRINCIPIO DE PASCAL: Cuando cambia la presión en cualquier punto en un fluido (líquido o gas) confinado, en cualquier otro punto en el fluido la presión también cambiará y en la misma proporción.

PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES: Un cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido es empujado hacia arriba con una fuerza igual al peso del fluido desplazado. Se puede considerar que la fuerza boyante actúa verticalmente hacia arriba a través del centro de gravedad del fluido desplazado.

$$F_B = \text{fuerza boyante} = \text{peso del fluido desplazado}$$

La fuerza boyante sobre un objeto de volumen V *totalmente* sumergido en un fluido de densidad ρ_f es $\rho_f Vg$, y si el peso del objeto equivale a $\rho_0 Vg$, donde ρ_0 es la densidad del objeto, la fuerza boyante neta sobre el objeto será

$$F_{\text{neta}}(\text{hacia arriba}) = Vg(\rho_f - \rho_0)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

13.1 Un cilindro metálico es de 80 kg, 2.0 m de longitud y un área de 25 cm² en cada base. Si una de sus bases está en contacto con el piso, ¿qué presión ejerce el cilindro sobre el suelo?

$$P = \frac{\text{fuerza normal}}{\text{área}} = \frac{(80\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2)}{25\times10^{-4}\text{ m}^2} = 3.1\times10^5\text{ Pa}$$

13.2 La presión atmosférica tiene un valor aproximado de 1.0×10^5 Pa. ¿Qué fuerza ejerce el aire confinado en un cuarto sobre una ventana de 40 cm × 80 cm?

La presión atmosférica ejerce una fuerza normal sobre cualquier superficie que se encuentre dentro de la atmósfera. Por consiguiente, la fuerza sobre la ventana es perpendicular a ésta y se obtiene por

$$F = PA = (1.0\times10^5\text{ N/m}^2)(0.40\times0.80\text{ m}^2) = 3.2\times10^4\text{ N}$$

Es claro que una fuerza casi igual, debida a la presión atmosférica sobre el exterior, impide que la ventana se rompa.

13.3 Calcular la presión originada por un fluido en reposo a una profundidad de 76 cm en *a*) agua ($\rho_a = 1.00$ g/cm³) y *b*) mercurio ($\rho = 13.6$ g/cm³).

a) $$P = \rho_a gh = (1000\text{ kg/m}^3)(9.81\text{ m/s}^2)(0.76\text{ m}) = 7450\text{ N/m}^2 = 7.5\text{ kPa}$$

b) $$P = \rho gh = (13\,600\text{ kg/m}^3)(9.81\text{ m/s}^2)(0.76\text{ m}) = 1.01\times10^5\text{ N/m}^2 \approx 1.0\text{ atm}$$

13.4 Cuando un submarino se sumerge a una profundidad de 120 m, ¿a qué presión total está sujeta su superficie exterior? La densidad del agua de mar es de aproximadamente 1.03 g/cm³.

$$\begin{aligned} P &= \text{presión atmosférica} + \text{presión del agua} \\ &= 1.01\times10^5\text{ N/m}^2 + \rho gh = 1.01\times10^5\text{ N/m}^2 + (1030\text{ kg/m}^3)(9.81\text{ m/s}^2)(120\text{ m}) \\ &= 1.01\times10^5\text{ N/m}^2 + 12.1\times10^5\text{ N/m}^2 = 13.1\times10^5\text{ N/m}^2 = 1.31\text{ MPa} \end{aligned}$$

13.5 **¿Qué tan alto subirá el agua por la tubería de un edificio si el manómetro que mide la presión del agua indica que ésta es de 270 kPa (alrededor de 40 lb/pulg^2) al nivel del piso?**

Un manómetro mide el exceso de presión debida al agua, esto es, la diferencia entre la presión producida por la columna de agua y la presión atmosférica. La columna de agua más alta que se tiene originaría una presión de 270 kPa. Por esta razón, $P = \rho_a gh$ da

$$h = \frac{P}{\rho_a g} = \frac{2.70 \times 10^5 \text{ N/m}^2}{(1000 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)} = 27.5 \text{ m}$$

13.6 **Una represa forma un lago artificial de 8.00 km^2. Inmediatamente detrás del dique, el lago tiene una profundidad de 12.0 m. ¿Cuál es la presión producida por el agua *a*) en la base del dique y *b*) en un punto localizado a 3.0 metros bajo la superficie del lago?**

El área del lago no tiene efecto alguno en la presión que se produce sobre el dique. Por lo que, sin importar el punto, $P = \rho_a gh$.

a) $$P = (1000 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(12.0 \text{ m}) = 118 \text{ kPa}$$

b) $$P = (1000 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(3.0 \text{ m}) = 29 \text{ kPa}$$

13.7 **Un pistón cargado confina a un fluido de densidad ρ en un recipiente cerrado, como se muestra en la Fig. 13-1. El peso combinado del pistón y la carga es de 200 N, y el área de la sección transversal del pistón es $A = 8.0$ cm^2. Calcular la presión en un punto B si el fluido es mercurio y $h = 25$ cm ($\rho_{Hg} = 13\,600$ kg/m^3). ¿Cuál sería la lectura en un manómetro colocado en el punto B?**

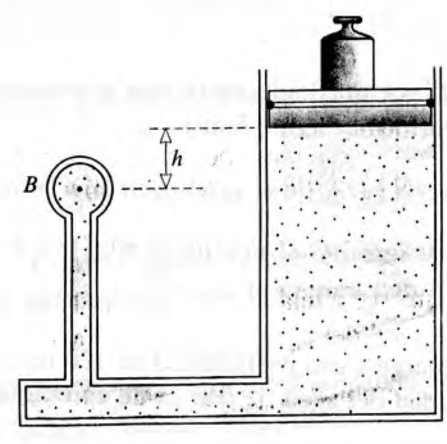


Fig. 13-1

La presión en el fluido originada tanto por la presión atmosférica como por la del pistón cargado, se puede calcular utilizando el principio de Pascal que dice: la presión sobre un fluido contenido en un recipiente cerrado es la misma en cualquier punto. Por esta razón la presión total en un punto B se compone de tres partes:

$$\text{Presión atmosférica} = 1.0 \times 10^5\ \text{Pa}$$

$$\text{Presión debida al pistón cargado} = \frac{F_W}{A} = \frac{200\ \text{N}}{8.0 \times 10^{-4}\ \text{m}^2} = 2.5 \times 10^5\ \text{Pa}$$

$$\text{Presión debida a la altura } h \text{ del fluido} = h\rho g = 0.33 \times 10^5\ \text{Pa}$$

En este caso, la presión del fluido es relativamente pequeña. Tendremos

$$\text{Presión total en } B = 3.8 \times 10^5\ \text{Pa}$$

La presión manométrica no incluye a la presión atmosférica. Por esto,

$$\text{Presión manométrica en } B = 2.8 \times 10^5\ \text{Pa}$$

13.8 En una prensa hidráulica como la que se muestra en la Fig. 13-2, el pistón más grande en la sección transversal tiene un área $A_1 = 200\ \text{cm}^2$, y el área de la sección transversal del pistón pequeño es $A_2 = 5.0\ \text{cm}^2$. Si una fuerza de 250 N es aplicada sobre el pistón pequeño, ¿cuál es la fuerza F_1 en el pistón grande?

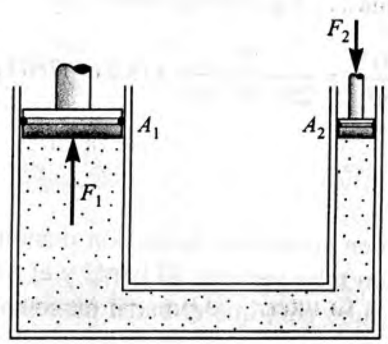


Fig. 13-2

Por el principio de Pascal,

$$\text{Presión en el pistón grande} = \text{presión en el pistón pequeño} \quad \text{o} \quad \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

de tal modo que,

$$F_1 = \frac{A_1}{A_2} F_2 = \frac{200}{5.0} 250\ \text{N} = 10\ \text{kN}$$

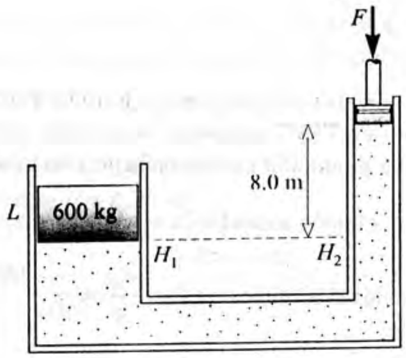


Fig. 13-3

13.9 Para el sistema explicado en la Fig. 13-3, el cilindro L de la izquierda tiene una masa de 600 kg y un área de sección transversal de 800 cm². El pistón S de la derecha tiene en su sección transversal un área de 25 cm² y peso despreciable. Si el dispositivo se llena con aceite ($\rho = 0.78$ g/cm³), calcúlese la fuerza F que se requiere para mantener al sistema en equilibrio.

Las presiones en los puntos H_1 y H_2 son iguales ya que en el fluido éstos se encuentran al mismo nivel. Por consiguiente,

$$\text{Presión en } H_1 = \text{presión en } H_2$$

$$\begin{pmatrix}\text{presión debida al}\\ \text{pistón de la izquierda}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{presión debida a } F\\ \text{y al pistón de la derecha}\end{pmatrix} + (\text{presión debida a los 8.0 m de aceite})$$

$$\frac{(600)(9.81)\,\text{N}}{0.080\,0\,\text{m}^2} = \frac{F}{25\times 10^{-4}\,\text{m}^2} + (8.0\,\text{m})(780\,\text{kg/m}^3)(9.81\,\text{m/s}^2)$$

de donde $F = 31$ N.

13.10 Un barril se abrirá cuando en su interior la presión manométrica sea de 350 kPa. En la parte más baja del barril se conecta un tubo vertical. El barril y el tubo se llenan de aceite ($\rho = 890$ kg/m³). ¿Qué altura debe tener el tubo para que el barril no se rompa?

De $P = \rho g h$ tenemos

$$h = \frac{P}{\rho g} = \frac{350\times 10^3\,\text{N/m}^2}{(9.81\,\text{m/s}^2)(890\,\text{kg/m}^3)} = 40.1\,\text{m}$$

13.11 Un tubo de ensayo tiene 2.0 cm de aceite ($\rho = 0.80$ g/cm³) flotando en 8.0 cm de agua. ¿Cuál es la presión en el fondo del tubo debida al fluido que contiene?

$$P = \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 = (800\,\text{kg/m}^3)(9.81\,\text{m/s}^2)(0.020\,\text{m}) + (1000\,\text{kg/m}^3)(9.81\,\text{m/s}^2)(0.080\,\text{m})$$
$$= 0.94\,\text{kPa}$$

13.12 Como se muestra en la Fig. 13-4, una columna de agua de 40 cm de altura sostiene otra columna de 31 cm de un fluido desconocido. ¿Cuál es la densidad del fluido que no se conoce?

La presión en el punto A debida a los dos fluidos debe ser la misma (de otra manera, el fluido con mayor presión empujará al fluido con menor presión). Por esta razón,

Presión debida a la columna de agua = presión debida a la columna de fluido desconocido

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2$$

de la cual

$$\rho_2 = \frac{h_1}{h_2}\rho_1 = \frac{40}{31}(1000\ \text{kg/m}^3) = 1290\ \text{kg/m}^3 = 1.3 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$$

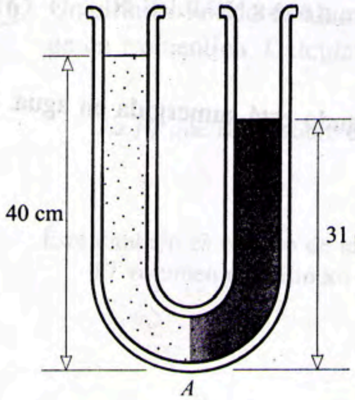


Fig. 13-4

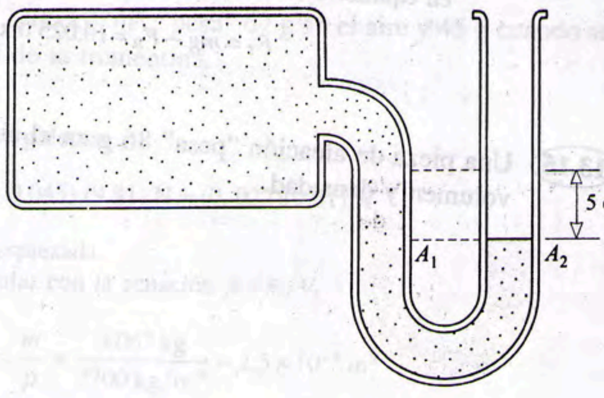


Fig. 13-5

13.13 Un *manómetro* compuesto por un tubo en U y mercurio está conectado con un tanque como se muestra en la Fig. 13-5. De este modo, la columna de mercurio se ve más alta en un brazo del tubo que en el otro. ¿Cuál es la presión en el tanque si la presión atmosférica es de 76 cm de mercurio? La densidad del mercurio es 13.6 g/cm³.

Presión en A_1 = presión en A_2

(P en el tanque) + (P debida a la columna de 5 cm de mercurio) = (P debida a la atmósfera)

$$P + (0.05\ \text{m})\,(13\,600\ \text{kg/m}^3)\,(9.81\ \text{m/s}^2) = (0.76\ \text{m})\,(13\,600\ \text{kg/m}^3)\,(9.81\ \text{m/s}^2)$$

de lo cual $P = 95$ kPa.

El problema se puede resolver con un razonamiento equivalente. Podemos observar que la presión en el tanque es de 5.0 cm de mercurio *menor* que la atmosférica. Por lo tanto, la presión será de 71 cm de mercurio, y equivale a 94.6 kPa.

13.14 La masa de un bloque de aluminio es de 25.0 g. *a*) ¿Cuál será su volumen? *b*) ¿Cuál será la tensión en una cuerda que sostiene al bloque cuando éste está totalmente sumergido en el agua? La densidad del aluminio es 2700 kg/m³.

a) Porque $\rho = m/V$ tenemos

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{0.025\,0\ \text{kg}}{2700\ \text{kg/m}^3} = 9.26 \times 10^{-6}\ \text{m}^3 = 9.26\ \text{cm}^3$$

b) El bloque desplaza 9.26×10^{-6} m³ de agua cuando está sumergido, así que la fuerza boyante sobre él es

$$F_B = \text{peso del agua desplazada} = (\text{volumen})(\rho\ \text{del agua})(g)$$
$$= (9.26 \times 10^{-6}\ \text{m}^3)(1000\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2) = 0.090\,8\ \text{N}$$

La tensión en la cuerda de sostén más la fuerza boyante debe ser igual al peso del bloque para que esté en equilibrio (véase la Fig. 13-6). Esto es, $F_T + F_B = mg$, de donde

$$F_T = mg - F_B = (0.025\,0\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2) - 0.090\,8\ \text{N} = 0.154\ \text{N}$$

13.15 Una pieza de aleación "pesa" 86 g en el aire y 73 g cuando está sumergida en agua. Calcular su volumen y densidad.

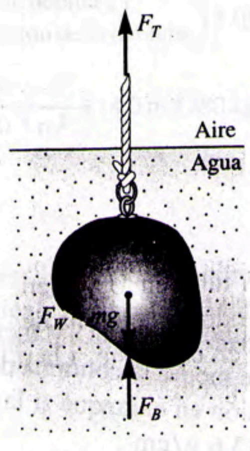


Fig. 13-6

La Fig. 13-6 explica la situación cuando el objeto se encuentra en el agua. De la figura, $F_B + F_T = mg$, así que

$$F_B = (0.086)(9.81)\ \text{N} - (0.073)(9.81)\ \text{N} = (0.013)(9.81)\ \text{N}$$

Pero F_B debe ser igual al peso del agua desalojada.

$$F_B = \text{peso del agua} = (\text{masa del agua})(g)$$

$$= (\text{volumen del agua})(\text{densidad del agua})(g)$$

o bien

$$(0.013)(9.81)\ \text{N} = V(1000\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2)$$

de donde $V = 1.3 \times 10^{-5}\ \text{m}^3$. Éste también es el volumen de la aleación. Por lo cual,

$$\rho \text{ de la aleación} = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} = \frac{0.086\ \text{kg}}{1.3 \times 10^{-5}\ \text{m}^3} = 6.6 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$$

13.16 Un cilindro sólido de aluminio con $\rho = 2700\ \text{kg/m}^3$, "pesa" 67 g en el aire y 45 g cuando se sumerge en trementina. Calcular la densidad de la trementina.

La F_B que actúa sobre el cilindro sumergido es

$$F_B = (0.067 - 0.045)\ (9.81)\ \text{N} = (0.\ 022)(9.81)\ \text{N}$$

Éste también es el peso de la trementina desplazada.

El volumen del cilindro se puede calcular con la ecuación $\rho = m/V$,

$$V \text{ del cilindro} = \frac{m}{\rho} = \frac{0.067\ \text{kg}}{2700\ \text{kg/m}^3} = 2.5 \times 10^{-5}\ \text{m}^3$$

Éste también es el volumen de la trementina desplazada. Por lo tanto, la densidad de la trementina es

$$\rho = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} = \frac{(\text{peso})/g}{\text{volumen}} = \frac{(0.022)(9.81)/(9.81)}{2.48 \times 10^{-5}}\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 8.9 \times 10^2\ \text{kg/m}^3$$

13.17 Un tapón de vidrio "pesa" 2.50 g en el aire, 1.50 g en el agua y 0.70 g en ácido sulfúrico. ¿Cuál es la densidad del ácido? ¿Cuál es su peso específico?

La F_B del tapón en el agua es $(0.002\ 50 - 0.001\ 50)(9.81)$ N. Éste es el peso del agua desplazada. Como $\rho = m/V$, o bien $\rho g = F_W/V$, tenemos

$$\text{Volumen del tapón} = \text{volumen desplazado del agua} = \frac{\text{peso}}{\rho g}$$

$$V = \frac{(0.001\,00)(9.81)\ \text{N}}{(1000\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2)} = 1.00 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$$

En el ácido la fuerza boyante es

$$[(2.50 - 0.70) \times 10^{-3}](9.81)\ \text{N} = (0.001\ 80)(9.81)\ \text{N}$$

Pero ésta es igual al peso del ácido desplazado, mg. Como $\rho = m/V$, $m = 0.001\ 80$ kg y $V = 1.00 \times 10^{-6}$ m^3, tenemos

$$\rho \text{ del ácido} = \frac{0.001\,80 \text{ kg}}{1.00 \times 10^{-6} \text{ m}^3} = 1.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

Entonces, el peso específico del ácido es

$$\text{peso específico} = \frac{\rho \text{ del ácido}}{\rho \text{ del agua}} = \frac{1800}{1000} = 1.8$$

Método alternativo

$$\text{Peso del agua desplazada} = [(2.50 - 1.50) \times 10^{-3}](9.81) \text{ N}$$

$$\text{Peso del ácido desplazado} = [(2.50 - 0.70) \times 10^{-3}](9.81) \text{ N}$$

Así

$$\text{peso específico del ácido} = \frac{\text{peso del ácido desplazado}}{\text{peso del mismo volumen desplazado de agua}} = \frac{1.80}{1.00} = 1.8$$

Entonces, como el peso específico del ácido = (ρ del ácido)/(ρ del agua), tenemos

$$\rho \text{ del ácido} = (\text{densidad relativa del ácido})(\rho \text{ del agua}) = (1.8)(1000 \text{ kg/m}^3)\ 1.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

13.18 La densidad del hielo es de 917 kg/m^3. ¿Qué fracción del volumen de un trozo de hielo estará sobre la superficie del agua cuando flota en agua dulce?

El trozo de hielo flotará en el agua, ya que su densidad es menor que 1000 kg/m^3, que es la densidad del agua. Como sí flota,

$$F_B = \text{peso del agua desplazada} = \text{peso del trozo de hielo}$$

Pero el peso del hielo es $\rho_{\text{hielo}} g V$ donde V es el volumen del trozo. Además el peso del agua desplazada es $\rho_{\text{agua}} g V'$, donde V' es el volumen del agua desplazada. Sustituyendo en la ecuación anterior

$$\rho_{\text{hielo}} g V = \rho_{\text{agua}} g V'$$

$$V' = \frac{\rho_{\text{hielo}}}{\rho_{\text{agua}}} V = \frac{917}{1000} V = 0.917V$$

Entonces, la fracción de volumen que está sobre la superficie del agua es

$$\frac{V - V'}{V} = \frac{V - 0.917V}{V} = 1 - 0.917 = 0.083$$

13.19 Una caja rectangular de 60 kg, abierta en su parte superior, tiene las siguientes dimensiones: en la base: 1.0 m por 0.80 m, y una profundidad de 0.50 m. *a*) ¿Cuánto se sumergirá en agua dulce? ¿Cuál debe ser el peso del lastre F_{Wl} para que se hunda hasta una profundidad de 30 cm?

a) Suponiendo que la caja flote, tenemos

$$F_B = \text{peso del agua desplazada} = \text{peso de la caja}$$

$$(1000\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2)(1.0\ \text{m} \times 0.8\ \text{m} \times y) = (60\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2)$$

donde y tiene la profundidad de la caja sumergida. Resolviendo da $y = 0.075$ m. Como ésta es menor que 0.50 m, hemos mostrado que nuestra suposición es correcta.

b)

$$F_B = \text{peso de la caja} + \text{peso del lastre}$$

Pero F_B es igual al peso del agua desplazada. Por esta razón, la ecuación anterior se convierte en

$$(1000\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2)(1.0\ \text{m} \times 0.80\ \text{m} \times 0.30\ \text{m}) = (60)(9.81)\ \text{N} + F_{Wl}$$

de donde $F_{Wl} = 1760\ \text{N} = 1.8$ kN. Entonces la masa del lastre debe ser de $(1760/9.81)\ \text{kg} = 180$ kg.

13.20 Una espuma de plástico ($\rho_p = 0.58\ \text{g/cm}^3$) se usa como salvavidas. ¿Qué cantidad de plástico (volumen) se usará si el 20% (por volumen) de un hombre de 80 kg debe permanecer sobre la superficie del agua en un lago? La densidad promedio del hombre es $1.04\ \text{g/cm}^3$.

En el equilibrio tenemos

$$F_B \text{ del hombre} + F_B \text{ del plástico} = \text{peso del hombre} + \text{peso del plástico}$$

$$(\rho_a)(0.80\ V_h)g + \rho_a V_p g = \rho_h V_h g + \rho_p V_p g$$

o bien

$$(\rho_a - \rho_p)V_p = (\rho_h - 0.80\rho_a)V_h$$

donde los subíndices h, a y p se refieren al hombre, al agua y al plástico, respectivamente.

Pero $\rho_h V_h = 80$ kg de donde $V_h = (80/1040)\ \text{m}^3$. Sustituyendo da

$$[(1000 - 580)\ \text{kg/m}^3]V_p = [(1040 - 800)\ \text{kg/m}^3][(80/1040)\ \text{m}^3]$$

de donde $V_p = 0.044\ \text{m}^3$.

13.21 Un vaso de precipitados parcialmente lleno con agua reposa sobre una balanza, siendo su peso de 2.30 N. Pero cuando una pieza de metal suspendida de un hilo se sumerge totalmente en el vaso (sin tocar el fondo), la lectura en la balanza es de 2.75 N. ¿Cuál es el volumen de la pieza metálica?

El agua ejerce una fuerza boyante sobre el metal. Por la ley de la acción y la reacción, el metal ejerce una fuerza igual pero hacia abajo sobre el agua. Ésta es la fuerza que incrementa la lectura en la balanza de 2.30 N a 2.75 N. Por lo tanto, la fuerza boyante será 2.75 − 2.30 = 0.45 N. Entonces

$$F_B = \text{peso del agua desplazada} = \rho_a g V = (1000\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2)(V)$$

de aquí obtenemos el volumen del agua desplazada, y, por lo mismo, el volumen de la pieza de metal, con

$$V = \frac{0.45\ \text{N}}{9810\ \text{kg/m}^2 \cdot \text{s}^2} = 46 \times 10^{-6}\ \text{m}^3 = 46\ \text{cm}^3$$

13.22 Se sospecha que una pieza de oro puro ($\rho = 19.3\ \text{g/cm}^3$) tiene una burbuja en su centro. Su "peso" en el aire es de 38.25 g y en el agua de 36.22 g. ¿Cuál es el volumen de la burbuja localizada en el centro de la pieza de oro?

De la ecuación $\rho = m/V$,

$$\text{Volumen de los 38.25 g de oro puro} = \frac{0.038\,25\ \text{kg}}{19\,300\ \text{kg/m}^3} = 1.982 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$$

$$\text{Volumen del agua desplazada} = \frac{(38.25 - 36.22) \times 10^{-3}\ \text{kg}}{1000\ \text{kg/m}^3} = 2.030 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$$

$$\text{Volumen de la burbuja} = (2.030 - 1.982)\ \text{cm}^3 = 0.048\ \text{cm}^3$$

13.23 Un cilindro de madera tiene una masa m y un área A en la base. Flota en el agua con su eje perpendicular a la superficie. Demuestre que si al cilindro se le da un pequeño desplazamiento vertical, éste entrará en un MAS. Calcúlese la frecuencia del movimiento.

Cuando el cilindro se empuja hacia abajo una distancia y, éste desaloja un volumen adicional de agua Ay. Como dicho volumen adicional desplaza una masa $Ay\rho_a$, una fuerza boyante adicional $Ay\rho_a g$ actuará sobre el cilindro, donde ρ_a es la densidad del agua. Esta fuerza no balanceada que actúa sobre el cilindro es igual a la fuerza restauradora que, además, es proporcional al desplazamiento. Por lo tanto, obedece la ley de Hooke y en consecuencia entrará en un MAS, como se describe en el capítulo 11.

Comparando $F_B = A\rho_a g y$ con la ley de Hooke en la forma $F = ky$, vemos que la constante del resorte para este movimiento es $k = A\rho_a g$. Por consiguiente, el cilindro de masa m oscilará con una frecuencia de

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{A\rho_a g}{m}}$$

13.24 Un globo de 5.0 kg se llena con helio ($\rho_{\text{He}} = 0.178\ \text{kg/m}^3$). ¿Cuál será su volumen si debe levantar una carga de 30 kg? Utilícese $\rho_{\text{aire}} = 1.29\ \text{kg/m}^3$.

La fuerza boyante, $V\rho_{\text{aire}}g$, debe levantar al globo a su carga y al helio contenido dentro del globo:

$$V\rho_{\text{aire}}g = (35\text{ kg})(g) + V\rho_{\text{He}}g$$

que da

$$V = \frac{35\text{ kg}}{\rho_{\text{aire}} - \rho_{\text{He}}} = \frac{35\text{ kg}}{1.11\text{ kg/m}^3} = 32\text{ m}^3$$

13.25 Calcular la densidad ρ de un fluido a una profundidad h en términos de la densidad ρ_0 en la superficie.

Si una masa m de fluido tiene un volumen V_0 en la superficie, entonces a una profundidad h tendrá un volumen $V_0 - \Delta V$. Por consiguiente, la densidad a la profundidad h está dada por

$$\rho = \frac{m}{V_0 - \Delta V} \quad \text{mientras} \quad \rho_0 = \frac{m}{V_0}$$

de donde

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{V_0}{V_0 - \Delta V} = \frac{1}{1 - (\Delta V/V_0)}$$

Del capítulo 12, el módulo volumétrico es $B = P/(\Delta V/V_0)$ y por tanto $\Delta V/V_0 = P/B$. Sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{1 - P/B}$$

Si suponemos que ρ es aproximadamente igual a ρ_0, entonces la presión a una profundidad h es más o menos $\rho_0 gh$, y se llega al siguiente resultado

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{1 - (\rho_0 gh/B)}$$

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

13.26 Un acróbata de 60 kg realiza un acto de equilibrio sobre un bastón. El extremo del bastón, en contacto con el piso, tiene un área de 0.92 cm². Calcule la presión que el bastón ejerce sobre el piso. (Despreciar el peso del bastón.) *Resp.* 6.4 MPa

13.27 Una población recibe el suministro de agua directamente de un tanque de almacenamiento. Si la superficie del agua contenida en el tanque se localiza a una altura de 26.0 m sobre la llave de una casa, ¿cuál será la presión del agua en la llave? (Despreciar los efectos de otros usuarios.) *Resp.* 255 kPa

13.28 A una altura de 10 km (33 000 pies) sobre el nivel del mar, la presión atmosférica es de aproximadamente 210 mm de mercurio. ¿Cuál es la fuerza normal resultante sobre una ventana de 600 cm^2 de un avión que vuela a esa altura? Suponga que la presión dentro de la nave es de 760 mm de mercurio. La densidad del mercurio es 13 600 kg/m^3. *Resp.* 4.4 kN

13.29 Un tubo angosto está soldado a un tanque como se muestra en la Fig. 13-7. La base del tanque tiene un área de 80 cm^2. *a*) Calcular la fuerza que el aceite ejerce sobre el fondo del tanque cuando éste y el capilar están llenos con aceite ($\rho = 0.72$ g/cm^3) a una altura h_1. *b*) Repítase para h_2. *Resp.* *a*) 11 N hacia abajo; *b*) 20 N hacia abajo

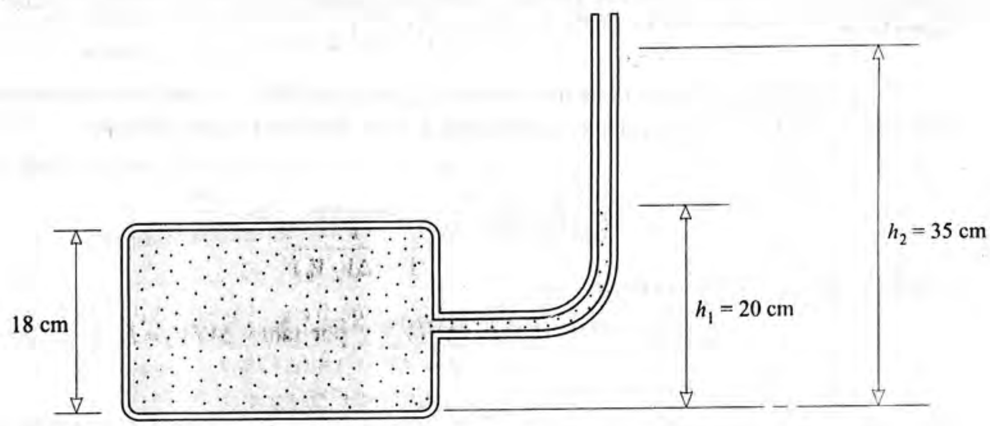


Fig. 13-7

13.30 Repítase el problema 13.29, pero ahora calcule la fuerza en el techo del tanque debida al aceite. *Resp.* *a*)1.1 N hacia arriba; *b*) 9.6 N hacia arriba

13.31 Calcúlese la presión que requiere un sistema de suministro de agua para que el líquido suba a una altura de 50.0 m. *Resp.* 490 kPa

13.32 El área del pistón de una bomba impelente es de 8.0 cm^2. ¿Qué fuerza se debe aplicar al pistón para que suba aceite ($\rho = 0.78$ g/cm^2) a una altura de 6.0 m? Suponga que el aceite está expuesto a la atmósfera. *Resp.* 37 N

13.33 El diámetro del pistón grande de una prensa hidráulica es de 20 cm y el área del pistón pequeño es de 0.50 cm^2. Si una fuerza de 400 N es aplicada al pistón pequeño, *a*) ¿cuál es la fuerza resultante que se ejerce en el pistón grande? *b*) ¿Cuál es el incremento de presión debajo del pistón pequeño? *c*) ¿Cuál es el incremento de presión debajo del pistón grande? *Resp.* *a*) 2.5×10^5 N; *b*) 8.0 MPa; *c*) 8.0 MPa

13.34 Un cubo de metal de 2.00 cm de longitud en cada arista tiene una densidad de 6600 kg/m^3. Calcúlese su masa aparente (o el "peso") cuando está totalmente sumergido en agua. *Resp.* 44.8 g

13.35 Un cubo sólido de madera, con 30.0 cm de longitud en cada arista, se puede sumergir completamente en agua cuando se le aplica una fuerza de 54.0 N. ¿Cuál es la densidad de la madera? *Resp.* 800 kg/m^3

13.36 Un objeto de metal "pesa" 26.0 g en el aire y 21.48 g cuando está del todo inmerso en agua. ¿Cuál es el volumen del objeto? ¿Cuál es su densidad? *Resp.* 4.55 cm^3, 5.72×10^3 kg/m^3

13.37 Una pieza sólida de aluminio ($\rho = 2.70$ g/cm^3) "pesa" 8.35 g en el aire. Si la pieza se sumerge, suspendida de un hilo, en una tina con aceite ($\rho = 0.75$ g/cm^3), ¿cuál será la tensión en el hilo? *Resp.* 0.059 N

13.38 Un vaso contiene un aceite de densidad 0.80 g/cm^3. Utilizando un hilo, un cubo de aluminio ($\rho =$ 2.70 g/cm^3) con 1.6 cm de longitud en la arista se sumerge en el aceite. Calcúlese la tensión en el hilo. *Resp.* 0.076 N

13.39 Un tanque que contiene aceite con un peso específico = 0.80 descansa en una balanza y pesa 78.6 N. Utilizando un alambre, un cubo de aluminio de 6.0 cm de longitud en la arista y peso específico = 2.70 se sumerge en el aceite. Calcule *a*) la tensión en el alambre y *b*) la lectura en la escala si no hay derrame de aceite. *Resp.* *a*) 4.0 N; *b*) 80 N

13.40 Se requiere una fuerza hacia abajo de 45.0 N y 15.0 N para sumergir una caja de plástico en agua y en aceite, respectivamente. Si el bloque tiene un volumen de 8000 cm^3, calcular la densidad del aceite. *Resp.* 620 kg/m^3

13.41 Determínese la fuerza no balanceada que actúa sobre una esfera de hierro ($r = 1.5$ cm, $\rho = 7.8$ g/cm^3) en el instante en que se suelta cuando está sumergida en *a*) agua y *b*) mercurio ($\rho = 13.6$ g/cm^3). ¿Cuál será la aceleración inicial de la esfera en cada caso? *Resp.* *a*) 0.94 N hacia abajo, 8.6 m/s^2 hacia abajo; *b*) 0.80 N hacia arriba, 7.3 m/s^2 hacia arriba

13.42 Un cubo de metal de 2.0 cm de arista está suspendido de un hilo sujeto a una balanza. El "peso" aparente del cubo es 47.3 g cuando está sumergido en agua. ¿Cuál será su "peso" aparente cuando se sumerge en glicerina, peso específico = 1.26? (*Sugerencia:* Calcule también ρ.) *Resp.* 45 g

13.43 La masa total de un globo y su góndola (vacía) es de 2.0×10^2 kg. Cuando el globo está lleno, contiene 900 m^3 de helio con una densidad de 0.183 kg/m^3. Calcule la carga extra, además de su propio peso, que puede alzar. La densidad del aire es 1.29 kg/m^3. *Resp.* 7.8 kN

13.44 Cierta pieza de metal "pesa" 5.00 g en el aire, 3.00 g en el agua y 3.24 g en benceno. Determínese la densidad del metal y del benceno. *Resp.* 2.50×10^3 kg/m^3, 880 kg/m^3

13.45 Un resorte que puede ser de bronce (peso específico = 8.8) o latón (peso específico = 8.4), "pesa" en el aire 1.26 g y 1.11 g en agua ¿De qué material es el resorte? *Resp.* latón

13.46 ¿Qué fracción de volumen de una pieza de cuarzo ($\rho = 2.65\ g/cm^3$) se sumergirá cuando flote en mercurio ($\rho = 13.6\ g/cm^3$)? *Resp.* 0.195

13.47 Un cubo de madera que flota en el agua sostiene una masa de 200 g colocada en el centro de su cara superior. Cuando se remueve la masa, el cubo sube 2.00 cm. Determínese el volumen del cubo. *Resp.* $1.00 \times 10^3\ cm^3$

13.48 Un corcho "pesa" en el aire 5.0 g. Un lastre "pesa" 86 g en agua. Cuando el corcho y el lastre se unen, el "peso" de ambos bajo el agua es de 71 g. ¿Cuál será la densidad del corcho? *Resp.* $2.5 \times 10^2\ kg/m^3$

13.49 En un vaso con agua flota un cubo de hielo de 10 cm^3. El vaso se llena hasta el borde con agua fría. Cuando el cubo se ha derretido totalmente, ¿qué cantidad de agua se habrá derramado del vaso? El peso específico del hielo es 0.92. *Resp.* ninguna

13.50 Un tubo de vidrio se dobla en forma de U. Se ha encontrado que una columna de 50.0 cm de altura de aceite de olivo en un brazo se balancea con una columna de agua de 46.0 cm de altura en el otro. ¿Cuál es la densidad del aceite de olivo? *Resp.* 920 kg/m^3

13.51 En un día, cuando la presión atmosférica es 1.000×10^5 Pa, un químico destila un líquido bajo una presión ligeramente reducida. La presión dentro de la cámara de destilación se lee con un manómetro de aceite (densidad del aceite = 0.78 g/cm^3). La diferencia de altura en los brazos del manómetro es de 27 cm. ¿Cuál es la presión dentro de la cámara de destilación? *Resp.* 98 kPa

capítulo 14

Fluidos en movimiento

FLUJO O DESCARGA DE UN FLUIDO (Q): Cuando un fluido que llena un tubo corre a lo largo de este tubo con velocidad promedio v, el *flujo* o *descarga*, Q es

$$Q = Av$$

donde A es el área de la sección transversal del tubo. Las unidades de Q en el SI son m^3/s y en el sistema inglés son $pies^3/s$.

Algunas veces Q es llamado *rapidez (velocidad) de flujo* o *gasto.*

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD: Supóngase un fluido *incompresible* (densidad constante) que llena un tubo y fluye a través de él. Supóngase además que el área de la sección transversal del tubo es A_1, en un punto y A_2 en otro. Ya que el flujo a través de A_1 debe ser igual al flujo a través de A_2 se tiene

$$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{constante}$$

donde v_1 y v_2 son las velocidades promedio del fluido en A_1 y A_2, respectivamente.

LA RAZÓN DE CORTE de un fluido es la razón con la cual la deformación de corte está cambiando dentro del mismo. Puesto que la deformación no tiene unidades, en el SI la unidad para la razón de corte es s^{-1}.

LA VISCOSIDAD (η) de un fluido es la medida del esfuerzo cortante requerido para producir una unidad de razón de corte. Sus unidades están definidas como las del esfuerzo por unidad de razón de corte, es decir, $Pa \cdot s$ en el SI. Otra unidad en SI es el $N \cdot s/m^2$ (o bien $kg/m \cdot s$), llamado *poiseuille* (Pl): 1 Pl = 1 $kg/m \cdot s$ = 1 $Pa \cdot s$. Otras unidades utilizadas son: el *poise* (P), donde 1 P = 0.1 Pl, y el *centipoise* (cP), donde 1 cP = 10^{-3} Pl. Un fluido viscoso, como el alquitrán, tiene una η muy grande.

LEY DE POISEUILLE: El flujo de un fluido que corre a través de un tubo cilíndrico de longitud L y sección transversal de radio r está dado por

$$Q = \frac{\pi R^4 (P_1 - P_2)}{8\eta L}$$

donde $P_1 - P_2$ es la diferencia de presiones entre los extremos del tubo.

EL TRABAJO EFECTUADO POR UN PISTÓN en forzar un volumen V de fluido dentro de un cilindro contra una presión opuesta P está dado por PV.

EL TRABAJO EFECTUADO POR UNA PRESIÓN P que actúa sobre una superficie de área A de tal forma que la superficie se mueve una distancia Δx normal a ésta (con lo cual desplaza un volumen $A\ \Delta x = \Delta V$) se define por

$$\text{Trabajo} = PA\ \Delta x = P\ \Delta V$$

ECUACIÓN DE BERNOULLI para un flujo estacionario de una corriente continua de fluido: Considérense dos puntos diferentes a lo largo de la trayectoria de la corriente. Sea el punto 1 a una altura h_1 y sean v_1, ρ_1 y P_1 la velocidad, la densidad y la presión del fluido en ese punto. De igual manera se denotan estas cantidades como h_2, v_2, ρ_2 y P_2 para el punto 2. Entonces, si se supone que el fluido es incompresible y que su viscosidad es despreciable,

$$P_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + h_1\rho g = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + h_2\rho g$$

donde $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ y g es la aceleración debida a la gravedad.

TEOREMA DE TORRICELLI: Supóngase que un tanque contiene líquido y está abierto a la atmósfera en su parte superior. Si en el tanque existe un orificio (abertura) a una distancia h debajo de la capa más alta del líquido, entonces la *velocidad de salida* de éste por la perforación es $\sqrt{2gh}$, considerando que el líquido satisface la ecuación de Bernoulli y que su capa superior está en reposo.

EL NÚMERO DE REYNOLDS (N_R) es un número adimensional que se aplica a un fluido de viscosidad η y de densidad ρ y que corre con una velocidad v a través de un tubo (o pasando un obstáculo) con diámetro D:

$$N_\mathrm{R} = \frac{\rho v D}{\eta}$$

Para sistemas con la misma simetría y flujos que pueden ser considerados similares, los números de Reynolds son muy cercanos. Los *flujos turbulentos* se presentan cuando el N_R del fluido es mayor que 2000 para un tubo y mayor que 10 para un obstáculo.

PROBLEMAS RESUELTOS

14.1 A través de un tubo de 8.0 cm de diámetro fluye aceite a una velocidad promedio de 4.0 m/s. ¿Cuál es el flujo Q en $\mathrm{m^3/s}$ y $\mathrm{m^3/h}$?

$$Q = Av = \pi(0.040\ \mathrm{m})^2(4.0\mathrm{m/s}) = 0.020\ \mathrm{m^3/s}$$
$$= (0.020\ \mathrm{m^3/s})(3600\ \mathrm{s/h}) = 72\ \mathrm{m^3/h}$$

14.2 Experimentalmente se encuentra que por un tubo cuyo diámetro interno es de 7.0 mm salen 250 mL en un tiempo de 41 s. ¿Cuál es la velocidad promedio del fluido en el tubo?

Ya que $\boxed{1 \text{ mL} = 10^{-6} \text{ m}^3}$ y que $Q = A\upsilon$

m³ . t

$$\upsilon = \frac{Q}{A} = \frac{(250 \times 10^{-6} \text{ m}^3)/(41\,\text{s})}{\pi(0.003\,5 \text{ m})^2} = 0.16 \text{ m/s}$$

π · r²

14.3 Un acueducto de 14 cm de diámetro interno (d.i.) surte agua (a través de una cañería) al tubo de la llave de 1.00 cm de d.i. Si su velocidad promedio en el tubo de la llave es de 3.0 cm/s ¿cuál será la velocidad promedio en el acueducto?

Los dos flujos son iguales. De la ecuación de continuidad, se sabe que

$$Q = A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2$$

Sea 1 la llave y 2 el acueducto,

r ≠ d

$$\upsilon_2 = \upsilon_1 \frac{A_1}{A_2} = \upsilon_1 \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} = (3.0\,\text{cm/s})\left(\frac{1}{14}\right)^2 = 0.015\,\text{cm/s}$$

14.4 ¿Cuánta agua fluirá en 30.0 s por un tubo capilar de 200 mm de longitud y 1.50 mm de d.i., si la diferencia de presiones a lo largo del tubo es 5.00 cm de mercurio? La viscosidad del agua es de 0.801 cP y la densidad del mercurio es de 13 600 kg/m³.

$Q = \frac{\pi r^4 (P_1 - P_2)}{8\eta L}$

Se aplicará la ley de Poiseuille con

$$P_1 - P_2 = \rho g h = (13\,600 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(0.050\,0 \text{ m}) = 6660 \text{ N/m}^2$$

y

$$\eta = (0.801\,\text{cP})\left(10^{-3}\,\frac{\text{kg/m}\cdot\text{s}}{\text{cP}}\right) = 8.01 \times 10^{-4} \text{ kg/m}\cdot\text{s}$$

Entonces, se tiene:

$$Q = \frac{\pi r^4 (P_1 - P_2)}{8\eta L} = \frac{\pi(7.5 \times 10^{-4}\,\text{m})^4(6660\,\text{N/m}^2)}{8(8.01 \times 10^{-4} \text{ kg/m}\cdot\text{s})(0.200\,\text{m})} = 5.2 \times 10^{-6} \text{ m}^3\text{/s} = 5.2\,\text{mL/s}$$

En 30.0 s, la cantidad que fluirá fuera del tubo es (5.2 mL/s)(30 s) = 1.6×10^2 mL.

14.5 La arteria de una persona se reduce a la mitad de su diámetro inicial por depósitos en la pared interior. ¿Cuál será el factor que disminuirá el flujo de sangre a través de la arteria si la diferencia de presión a lo largo de ella permanece constante?

De la ley de Poiseuille, $Q \propto r^4$. Por lo tanto,

$$\frac{Q_{\text{final}}}{Q_{\text{original}}} = \left(\frac{r_{\text{final}}}{r_{\text{original}}}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0.062\,5$$

14.6 Bajo la misma diferencia de presión, compárese el flujo de agua a través de un tubo con el de aceite SAE No. 10. Se sabe que η para el agua es 0.801 cP; y η para el aceite es 200 cP.

De la ley de Poiseuille, $Q \propto 1/\eta$. Por lo tanto

$$\frac{Q_{\text{agua}}}{Q_{\text{aceite}}} = \frac{200\,\text{cP}}{0.801\,\text{cP}} = 250$$

así que el flujo del agua es 250 veces mayor que el que corresponde al aceite bajo la misma diferencia de presión.

$1 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$

14.7 Calcúlese la potencia de salida del corazón si por cada latido bombea 75 mL de sangre con una presión promedio de 100 mmHg. Considérese que se tienen 65 latidos por minuto.

El trabajo realizado por el corazón es $P\,\Delta V$. El volumen en un minuto equivale a $\Delta V = (65)(75 \times 10^{-6}\ \text{m}^3)$. Por otro lado

$1{,}01 \times 10^5\ \text{Pa} \rightarrow 760\ \text{mmHg}$

$$P = (100\,\text{mmHg})\frac{1.01 \times 10^5\ \text{Pa}}{760\,\text{mmHg}} = 1.33 \times 10^4\ \text{Pa}$$

por lo tanto,

$$\text{Potencia} = \frac{\text{trabajo}}{\text{tiempo}} = \frac{(1.33 \times 10^4\ \text{Pa})\left[(65)(75 \times 10^{-6}\ \text{m}^3)\right]}{60\,\text{s}} = 1.1\,\text{W}$$

14.8 Un tanque abierto en su parte superior tiene una abertura de 3.0 cm de diámetro el cual se encuentra a 5.0 m por debajo del nivel de agua contenida en el recipiente. ¿Qué volumen de líquido saldrá por minuto a través de dicha abertura? (Véase la Fig. 14.1.)

En este caso puede aplicarse la ecuación de Bernoulli: 1 es la parte superior del nivel y 2 el orificio. Entonces $P_1 = P_2$ y $h_1 = 5.0$ m, $h_2 = 0$.

$$P_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + h_1\rho g = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + h_2\rho g$$
$$\tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + h_1\rho g = \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + h_2\rho g$$

Si el tanque es lo suficientemente grande, v_1 puede considerarse cero. Por lo tanto, al resolver para v_2 se obtiene la ecuación de Torricelli:

$$v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = \sqrt{2(9.81\,\text{m/s}^2)(5.0\,\text{m})} = 9.9\,\text{m/s}$$

y el flujo está dado por

$$Q = v_2 A_2 = (9.9\,\text{m/s})\pi(1.5 \times 10^{-2}\ \text{m})^2 = 7.0 \times 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s} = 0.42\ \text{m}^3/\text{min}$$

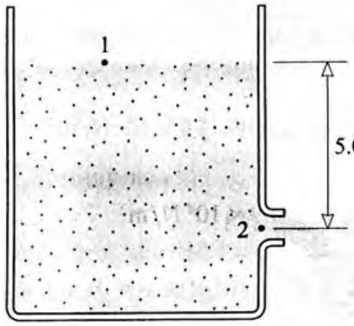


Fig. 14-1

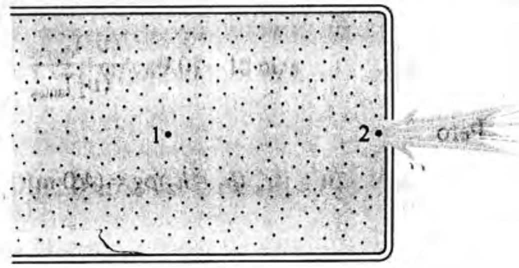


Fig. 14-2

14.9 Un tanque de agua tiene una fuga en la posición 2 que se muestra en la Fig. 14-2, donde la presión del agua es de 500 kPa. ¿Cuál es la velocidad de escape del fluido por el orificio?

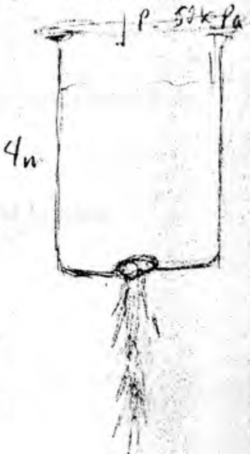
Utilizaremos la ley de Bernoulli con $P_1 - P_2 = 5.00 \times 10^5$ N/m^2, $h_1 = h_2$ y la aproximación de $v_1 = 0$. Entonces

$$(P_1 - P_2) + (h_1 - h_2)\rho g = \tfrac{1}{2}\rho v_2^2$$

de donde

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2(5.00 \times 10^5\ \mathrm{N/m^2})}{1000\ \mathrm{kg/m^3}}} = 31.6\ \mathrm{m/s}$$

14.10 El agua fluye con una rapidez de 30 mL/s a través de una abertura que se encuentra en el fondo de un tanque en el cual el líquido tiene una profundidad de 4.0 m. Calcúlese la rapidez con que escapa el agua si se le adiciona en la superficie una presión de 50 kPa.



La ecuación de Bernoulli para el caso en que esencialmente v_1 es cero, es

$$(P_1 - P_2) + (h_1 - h_2)\rho g = \tfrac{1}{2}\rho v_2^2$$

Esta ecuación puede escribirse dos veces, antes de que se le agregue la presión y después.

$$(P_1 - P_2)_{\text{antes}} + (h_1 - h_2)\rho g = \tfrac{1}{2}\rho (v_2^2)_{\text{antes}}$$
$$(P_1 - P_2)_{\text{antes}} + 5 \times 10^4\ \mathrm{N/m^2} + (h_1 - h_2)\rho g = \tfrac{1}{2}\rho (v_2^2)_{\text{después}}$$

Si la abertura y la parte superior del tanque estaban inicialmente a la presión atmosférica,

$$(P_1 - P_2)_{\text{antes}} = 0$$

50000
5 KPa
1000 N/m²

Entonces, al dividir la segunda ecuación entre la primera, se consigue

$$\frac{(v_2^2)_{\text{después}}}{(v_2^2)_{\text{antes}}} = \frac{5\times 10^4\ \text{N/m}^2 + (h_1 - h_2)\rho g}{(h_1 - h_2)\rho g}$$

Pero

$$(h_1 - h_2)\rho g = (4.0\ \text{m})(1000\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2) = 3.9\times 10^4\ \text{N/m}^2$$

de donde

$$\frac{(v_2)_{\text{después}}}{(v_2)_{\text{antes}}} = \sqrt{\frac{8.9\times 10^4\ \text{N/m}^2}{3.9\times 10^4\ \text{N/m}^2}} = 1.51$$

Puesto que $Q = Av$, ésta puede escribirse como

$$\frac{Q_{\text{después}}}{Q_{\text{antes}}} = 1.51 \quad \text{o} \quad Q_{\text{después}} = (30\ \text{mL/s})(1.51) = 45\ \text{mL/s}$$

14.11 ¿Cuánto trabajo realiza una bomba para elevar 5.00 m³ de agua hasta una altura de 20.0 m e impulsarla dentro de un acueducto a una presión de 150 kPa?

$$W = (\text{trabajo para elevarla}) + (\text{trabajo para impulsarla}) = mgh + P\,\Delta V$$

$$W = (5.00\ \text{m}^3)(1000\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2)(20.0\ \text{m}) + (1.50\times 10^5\ \text{N/m}^2)(5.00\ \text{m}^3) = 1.73\times 10^6\ \text{J}$$

14.12 Un tubo horizontal tiene la forma que se presenta en la Fig. 14-3. En el punto 1 el diámetro es de 6.0 cm, mientras que en el punto 2, es sólo de 2.0 cm. En el punto 1, $v_1 = 2.0$ m/s y $P_1 = 180$ kPa. Calcúlese v_2 y P_2.

Luego de aplicar la ecuación de Bernoulli con $h_1 = h_2$, se obtiene

$$P_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 \quad \text{o} \quad P_1\,\tfrac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) = P_2$$

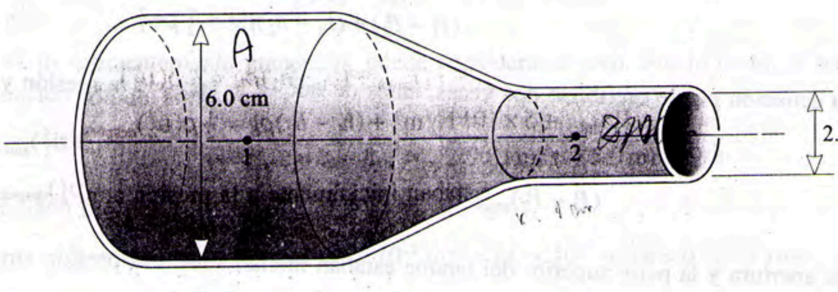


Fig. 14-3

$v_1 = \frac{v_2}{?_2}$

Sin embargo, $v_1 = 2.0$ m/s y la ecuación de continuidad establece que

$$v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2} = (2.0\,\text{m/s})\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = (2.0\,\text{m/s})(9.0) = 18\,\text{m/s}$$

Sustituyendo

$$1.80 \times 10^5\,\text{N/m}^2 + \tfrac{1}{2}(1000\,\text{kg/m}^3)[(2.0\,\text{m/s})^2 - (18\,\text{m/s})^2] = P_2$$

de donde $P_2 = 0.20 \times 10^5\,\text{N/m}^2 = 20$ kPa.

0,2 x 100 porque 10^3 N/m²

14.13 ¿Cuál debe ser la presión manométrica en una manguera larga de bombero si se quiere que el agua lanzada por la boquilla alcance una altura de 30.0 m?

Para que un proyectil alcance una altura h, debe ser lanzado con una velocidad inicial $\sqrt{2gh}$. (Esto se obtiene por la conversión de $\frac{1}{2}mv_0^2$ a mgh.) Podemos calcular la rapidez en términos de la diferencia de presiones entre la presión interna y la externa de la manguera (presión manométrica) escribiendo la ecuación de Bernoulli para los puntos inmediatamente interno y externo de la manguera:

$$P_{\text{entrada}} + \tfrac{1}{2}\rho v^2_{\text{entrada}} + h_{\text{entrada}}\rho g = P_{\text{salida}} + \tfrac{1}{2}\rho v^2_{\text{salida}} + h_{\text{salida}}\rho g$$

Ya que $h_{\text{salida}} \approx h_{\text{entrada}}$ y $v_{\text{entrada}} \approx 0$, tenemos

$$P_{\text{entrada}} - P_{\text{salida}} = \tfrac{1}{2}\rho v^2_{\text{salida}}$$

Sustituyendo v_{salida} por $\sqrt{2gh}$, obtenemos

$$P_{\text{entrada}} - P_{\text{salida}} = \rho g h = (1000\,\text{kg/m}^3)(9.81\,\text{m/s}^2)(30.0\,\text{m}) = 294\,\text{kPa}$$

¿Podría obtenerse esta última ecuación directamente del teorema de Torricelli?

14.14 ¿Con qué rapidez fluye el agua desde una llave de 0.80 cm de d.i. si la presión del agua es de 200 kPa?

Utilizando la ecuación de Bernoulli para los puntos inmediatamente dentro y fuera de la llave:

$$P_{\text{entrada}} + \tfrac{1}{2}\rho v^2_{\text{entrada}} + h_{\text{entrada}}\rho g = P_{\text{salida}} + \tfrac{1}{2}\rho v^2_{\text{salida}} + h_{\text{salida}}\rho g$$

Tomando en cuenta: $h_{\text{salida}} = h_{\text{entrada}}$ y $P_{\text{entrada}} - P_{\text{salida}} = 200$ kPa, tenemos

$$v^2_{\text{salida}} - v^2_{\text{entrada}} = (200 \times 10^3\,\text{Pa})\frac{2}{\rho}$$

Considerando $v^2_{\text{entrada}} \ll v^2_{\text{salida}}$, resolvemos para obtener $v_{\text{salida}} = 20$ m/s. Así pues la rapidez del flujo es:

$$Q = vA = (20\,\text{m/s})(\pi r^2) = (20\,\text{m/s})(\pi)(0.16 \times 10^{-4}\,\text{m}^2) = 1.0 \times 10^{-3}\,\text{m}^3/\text{s}$$

14.15 El tubo que se muestra en la Fig. 14-4 tiene un diámetro de 16 cm en la sección 1 y 10 cm en la sección 2. En la sección 1 la presión es de 200 kPa. El punto 2 está 6.0 m más alto que el punto 1. Si un aceite de densidad 800 kg/m³ fluye con una rapidez de 0.030 m³/s, encuéntrese la presión en el punto 2 si los efectos de la viscosidad son despreciables.

De $Q = v_1 A_1 = v_2 A_2$ tenemos

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.030\ \text{m}^3/\text{s}}{\pi(8.0\times10^{-2}\ \text{m})^2} = 1.49\ \text{m/s}$$

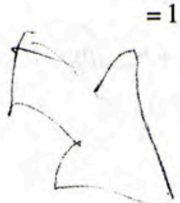
$$v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.030\ \text{m}^3/\text{s}}{\pi(5.0\times10^{-2}\ \text{m})^2} = 3.82\ \text{m/s}$$

Ahora puede utilizarse la ecuación de Bernoulli:

$$P_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g(h_1 - h_2) = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2$$

Dadas $P_1 = 2.00\times10^5\ \text{N/m}^2$, $h_2 - h_1 = 6$ m, y $\rho = 800\ \text{kg/m}^3$ se obtiene

$$P_2 = 2.00\times10^5\ \text{N/m}^3 + \tfrac{1}{2}(800\ \text{kg/m}^3)[(1.49\ \text{m/s})^2 - (3.82\ \text{m/s})^2] - (800\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2)(6.0\ \text{m})$$
$$= 1.48\times10^5\ \text{N/m}^2 = 1.5\times10^5\ \text{kPa}$$



$1{,}5\times10^2$ m

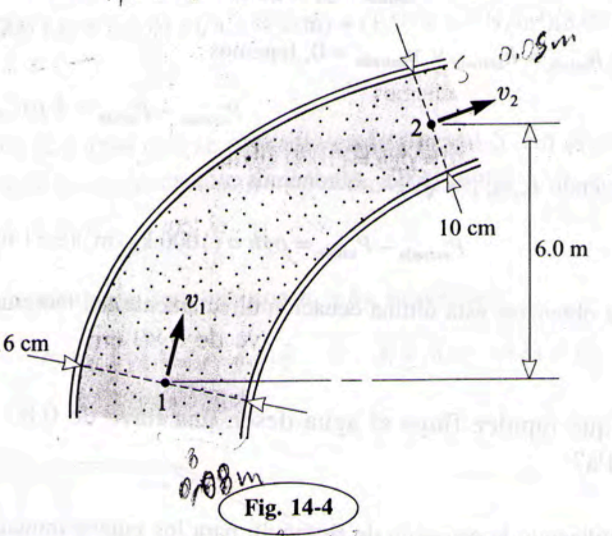


Fig. 14-4

14.16 Se muestra en la Fig.14-5 un medidor Venturi equipado con un manómetro diferencial de mercurio. En la toma, punto 1, el diámetro es de 12 cm, mientras que en la garganta, punto 2, el diámetro es 6 cm. ¿Cuál es el flujo Q del agua a través del medidor, si la lectura en el manómetro es de 22 cm? La densidad del mercurio es de 13.6 g/cm³.

De la lectura del manómetro se obtiene

$$P_1 - P_2 = \rho g h = (13\ 600\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2)(0.22\ \text{m}) = 2.93 \times 10^4\ \text{N/m}^2$$

Ya que $Q = v_1 A_1 = v_2 A_2$, *se* tiene $v_1 = Q/A_1$ y $v_2 = Q/A_2$. Al utilizar la ecuación de Bernoulli, con $h_1 - h_2 = 0$, se consigue

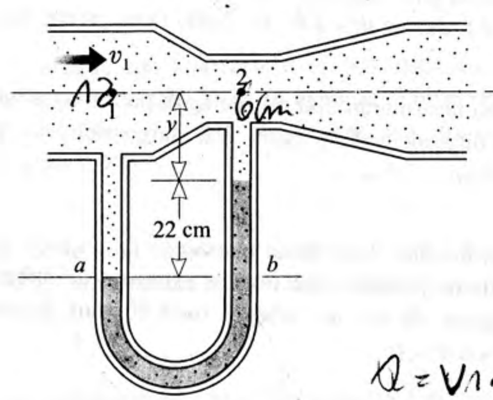
$$(P_1 - P_2) + \tfrac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) = 0$$

$$2.93 \times 10^4\ \text{N/m}^2 + \tfrac{1}{2}(1000\ \text{kg/m}^3)\left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2}\right)Q^2 = 0$$

donde

$$A_1 = \pi r_1^2 = \pi(0.060)^2\ \text{m}^2 = 0.01131\ \text{m}^2 \quad \text{y} \quad A_2 = \pi r_2^2 = \pi(0.030)^2\ \text{m}^2 = 0.0028\ \text{m}^2$$

sustituyendo se encuentra que $Q = 0.022\ \text{m}^3/\text{s}$.



Q = V1 · A1

Fig. 14-5

14.17 Se utiliza un túnel de viento con un modelo de automóvil de 20 cm de altura para reproducir aproximadamente las situaciones que tiene un automóvil de 550 cm de altura moviéndose a 15 m/s. ¿Cuál debe ser la rapidez del viento en el túnel? ¿Es el flujo turbulento?

Se desea que N_R sea el mismo para ambos casos, así que las situaciones tienen que ser similares. Esto es, se quiere que:

$$N_R = \left(\frac{\rho v D}{\eta}\right)_{\text{túnel}} = \left(\frac{\rho v D}{\eta}\right)_{\text{viento}}$$

En virtud de que ρ y η son iguales para los dos casos, tenemos

de donde

$$v_t D_t = v_v D_v \quad \text{de donde} \quad v_t = v_v \frac{D_v}{D_t} = (15\,\text{m/s})(550/20) = 0.41\,\text{km/s}$$

Para investigar la turbulencia, evaluemos N_R utilizando los valores para el aire: $\rho = 1.29$ kg/m³ y $\eta = 1.8 \times 10^{-5}$ Pa · s. Sustituyendo obtenemos $N_R = 5.9 \times 10^6$, un valor mucho mayor que el requerido para flujo turbulento. Obviamente el flujo es turbulento.

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

14.18 A través de un tubo de 4.0 cm de d.i. fluye aceite a una velocidad promedio de 2.5 m/s. Encuéntrese el flujo en m³/s y cm³/s. *Resp.* 3.1×10^{-3} m³/s = 3.1×10^3 cm³/s

14.19 Calcúlese la velocidad promedio del agua que circula por un tubo cuyo d.i. es de 5.0 cm y su gasto es de 2.5 m³ de agua por hora. *Resp.* 0.35 m/s

14.20 La velocidad de la glicerina en un tubo de 5.0 cm de d.i. es de 0.54 m/s. Encuéntrese la velocidad en un tubo de 3.0 cm de d.i. que se une a él. El fluido llena ambos tubos. *Resp.* 1.5 m/s

14.21 ¿Cuánto tiempo necesitarán 500 mL de agua para fluir a través de una tubería de 15 cm de largo y 3.0 mm de d.i., si la diferencia de presión a lo largo del tubo es de 4.0 kPa? La viscosidad del agua es de 0.80 cP. *Resp.* 7.5 s

14.22 Cierto plástico fundido fluye hacia el exterior de un tubo de 8.0 cm de largo a razón de 13 cm³/min, cuando la diferencia de presión entre los dos extremos del tubo es de 18 cm de mercurio. Encuéntrese la viscosidad del plástico. El d.i. del tubo es de 1.30 mm. La densidad del mercurio es 13.6 g/cm³. *Resp.* 0.097 kg/m · s = 97 cP

14.23 En un sistema horizontal de tubos, uno de ellos (d.i. = 4.0 mm) de 20 cm de largo se conecta en línea con otro (d.i. = 5.0 mm) de 30 cm de largo. Cuando a un fluido viscoso se le aplica una presión a régimen estable o estacionario, ¿cuál es la relación de la caída de presión a través del tubo de 20 cm en relación con la del tubo de 30 cm? *Resp.* 1.6

14.24 Una aguja hipodérmica de 3.0 cm de longitud y d.i. de 0.45 mm se utiliza para extraer sangre ($\eta = 4.0$ mPl). Supongamos que la diferencia de presión en la aguja es de 80 cmHg, ¿cuánto tiempo tomará sacar 15 mL? *Resp.* 17 s

14.25 En una transfusión de sangre, ésta fluye desde una botella a presión atmosférica hasta el interior de la vena de un paciente donde la presión es 20 mmHg superior a la atmosférica. La botella está 95 cm más arriba que la vena, en la cual se encuentra la aguja que tiene una longitud de 3.0 cm y un d.i. de 0.45 mm. ¿Qué cantidad de sangre fluye al interior de la vena por minuto? Para la sangre, $\eta = 0.004\,0$ Pa · s y $\rho = 1005$ kg/m³. *Resp.* 3.4 cm³

14.26 ¿Cuánto trabajo realiza el pistón de un sistema hidráulico durante una carrera de 2.0 cm, si el área del extremo del pistón es de 0.75 cm^2 y la presión en el fluido del sistema es 50 kPa? *Resp.* 75 mJ

14.27 A un tanque grande que contiene un líquido no viscoso se le hace una perforación 4.5 m abajo en relación del nivel del líquido. Si el área de la abertura es de 0.25 cm^2, ¿cuál es la velocidad teórica de salida a través del orificio? ¿Cuánto líquido saldrá en un minuto? *Resp.* 9.4 m/s, 0.014 1 m^3

14.28 Determínese el flujo en litros/s de un líquido no viscoso a través de un orificio de 0.50 cm^2 de área y que se encuentra 2.5 m por debajo del nivel del líquido de un tanque abierto. *Resp.* 0.35 litros/s

14.29 Calcúlese la velocidad teórica del derrame de agua desde una abertura que está a 8.0 m por debajo de la superficie del agua en un gran tanque, si se adiciona una presión de 140 kPa, aplicada sobre la superficie del agua. *Resp.* 21 m/s

14.30 ¿Cuántos caballos de fuerza (hp) se requieren para impulsar 8.0 m^3 de agua por minuto dentro de un acueducto con una presión de 220 kPa? *Resp.* 39 hp

14.31 Desde un lago una bomba eleva agua con una rapidez de 9.0 litros/s a través de un tubo de 5.0 cm de d.i. y la descarga en el aire en un punto localizado a 16 m sobre el nivel del agua en el lago. ¿Cuáles son en teoría *a*) la velocidad del agua en el punto de descarga y *b*) la potencia desarrollada por la bomba? *Resp.* *a*) 4.6 m/s; *b*) 2.0 hp

14.32 A través de un tubo horizontal de sección transversal variable se establece un flujo de agua estacionario. En un lugar la presión es de 130 kPa y la velocidad es 0.60 m/s. Determínese la presión en otro punto del mismo tubo donde la velocidad es 9.0 m/s. *Resp.* 90 kPa

14.33 Un tubo de diámetro interno variable transporta agua. En el punto 1 el diámetro es de 20 cm y la presión de 130 kPa. En el punto 2, el cual está 4.0 m más arriba que el primer punto 1, el diámetro es de 30 cm. Si el flujo es de 0.080 m^3/s, ¿Cuál es la presión en el segundo punto? *Resp.* 93 kPa

14.34 Un combustóleo de densidad 820 kg/m^3 fluye a través de un medidor Venturi que tiene un diámetro de garganta de 4.0 cm y un diámetro de entrada de 8.0 cm. La caída de presión entre la entrada y la garganta es de 16 cm de mercurio. Encuéntrese el flujo. La densidad del mercurio es 13 600 kg/m^3. *Resp.* 9.3×10^{-3} m^3/s

14.35 Determínese la máxima cantidad de agua que puede pasar por minuto a través de un tubo de 3.0 cm de d.i. sin que sea un flujo turbulento. Considérese que el máximo número de Reynolds para un flujo no turbulento debe ser 2000. Para el agua, a 20° C, $\eta = 1.0 \times 10^{-3}$ Pa · s. *Resp.* 0.002 8 m^3

14.36 ¿Qué tan rápido puede caer una gota de lluvia ($r = 1.5$ mm) a través del aire, si su flujo está cercano a ser considerado turbulento, es decir, para N_R cercano a 10? Para el aire, $\eta = 1.8 \times 10^{-5}$ Pa · s y $\rho =$ 1.29 kg/m^3. *Resp.* 4.6 cm/s

capítulo 15

Dilatación térmica

LA TEMPERATURA se puede medir con una escala *Celsius,* en la cual el punto de congelación del agua es a 0 °C y el de ebullición (bajo condiciones normales) es a 100 °C. La escala *Kelvin* (o *absoluta*) está desplazada 273.15 grados respecto de la escala Celsius, así que el punto de congelación del agua es a 273.15 K y el punto de ebullición a 373.15 K. El cero absoluto, temperatura que se discutirá en el capítulo 16, está a 0 K (–273.15 °C). La aún usada escala *Fahrenheit* está relacionada con la escala Celsius con la ecuación

$$\text{Temperatura Fahrenheit} = \tfrac{9}{5}(\text{temperatura Celsius}) + 32$$

DILATACIÓN LINEAL DE UN SÓLIDO: Cuando un sólido sufre un cambio de temperatura ΔT, su incremento en longitud ΔL es casi proporcional al producto de la longitud inicial L_0 por el cambio de temperatura ΔT. Esto es

$$\Delta L = \alpha L_0 \, \Delta T$$

donde la constante de proporcionalidad α se llama *coeficiente de dilatación lineal.* El valor de α depende de la naturaleza de la sustancia. Para nuestros fines, se puede tomar α como constante independiente de T, aun cuando eso rara vez es exactamente cierto.

De la ecuación anterior, α es el cambio en la longitud por unidad de longitud y por unidad de temperatura. Por ejemplo, si una barra de latón cambia su longitud de 1.000 000 cm a 1.000 019 cm cuando la temperatura se eleva 1.0 °C, el coeficiente de dilatación lineal es

$$\alpha = \frac{\Delta L}{L_0 \Delta T} = \frac{0.000\,019}{(1.0\,\text{cm})(1.0\,°\text{C})} = 1.9 \times 10^{-5}\,°\text{C}^{-1}$$

DILATACIÓN SUPERFICIAL: Si un área A_0 se dilata a $A_0 + \Delta A$ cuando se incrementa su temperatura en ΔT, entonces

$$\Delta A = \gamma A_0 \, \Delta T$$

donde γ es el *coeficiente de dilatación superficial.* Para un sólido *isotrópico* (aquello que se expande de la misma manera en todas direcciones), $\gamma = 2\alpha$ aproximadamente.

DILATACIÓN VOLUMÉTRICA: Si un volumen V_0 se dilata a $V_0 + \Delta V$ cuando se incrementa su temperatura en ΔT, entonces

$$\Delta V = \beta V_0 \, \Delta T$$

donde β es el *coeficiente de dilatación volumétrica.* Para un sólido isotrópico, $\beta = 3\alpha$ aproximadamente.

PROBLEMAS RESUELTOS

15.1 Una barra de cobre tiene una longitud de 80 cm a 15 °C. ¿Cuál es el incremento de la longitud cuando su temperatura se incrementa a 35 °C? El coeficiente de dilatación lineal del cobre es 1.7×10^{-5} °C^{-1}.

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T = (1.7 \times 10^{-5}\ °\text{C}^{-1})(0.80\ \text{m})[(35 - 15)\ °\text{C}] = 2.7 \times 10^{-4}\ \text{m}$$

15.2 Un cilindro de diámetro 1.000 00 cm a 30 °C se tiene que deslizar dentro de un agujero que tiene una placa de acero. El agujero tiene un diámetro de 0.999 70 cm a 30 °C. ¿A qué temperatura se debe calentar la placa? Para el acero, $\alpha = 1.1 \times 10^{-5}$ °C^{-1}.

La placa se expande de la misma manera si existiera o no el agujero en ella. Por consiguiente, el agujero se expandirá de idéntica forma como lo haría un círculo colocado dentro del agujero. Queremos que el diámetro del agujero cambie en una cantidad

$$\Delta L = (1.000\,00 - 0.999\,70)\ \text{cm} = 0.000\,30\ \text{cm}$$

Utilizando $\Delta L = \alpha L_0 \, \Delta T$, encontraremos

$$\Delta T = \frac{\Delta L}{\alpha L_0} = \frac{0.000\,30\ \text{cm}}{(1.1 \times 10^{-5}\ °\text{C}^{-1})(0.999\,70\ \text{cm})} = 27\ °\text{C}$$

La temperatura en la placa debe ser 30 + 27 = 57 °C.

15.3 Una cinta métrica de acero se calibra a 20 °C. En un día frío cuando la temperatura es –15 °C, ¿cuál será el error porcentual en la cinta? $\alpha_{\text{acero}} = 1.1 \times 10^{-5}$ °C^{-1}.

Para un cambio de temperatura de 20 °C a –15 °C, tenemos $\Delta T = -35$ °C. Entonces

$$\frac{\Delta L}{L_0} = \alpha \, \Delta T = (1.1 \times 10^{-5}\ °\text{C}^{-1})(-35\ °\text{C}) = -3.9 \times 10^{-4} = -0.039\%$$

15.4 Una barra de cobre ($\alpha = 1.70 \times 10^{-5}$ °C^{-1}) es 20 cm más larga que una barra de aluminio ($\alpha = 2.20 \times 10^{-5}$ °C^{-1}). ¿Cuál debe ser la longitud de la barra de cobre si la diferencia en longitudes es independiente de la temperatura?

Para que la diferencia de longitudes no cambie con la temperatura, ΔL tiene que ser la misma para ambas barras con el mismo cambio de temperatura. Esto es,

$$(\alpha L_0\,\Delta T)_{\text{cobre}} = (\alpha L_0\,\Delta T)_{\text{aluminio}}$$

o

$$(1.70 \times 10^{-5}\ °\text{C}^{-1})L_0\,\Delta T = (2.20 \times 10^{-5}\ °\text{C}^{-1})(L_0 - 0.20\text{ m})\,\Delta T$$

donde L_0 es la longitud de la barra de cobre, y ΔT es la misma para las dos barras. Al resolver encontramos que $L_0 = 0.88$ m.

15.5 Una esfera de acero ($\alpha = 1.10 \times 10^{-5}$ °C^{-1}) a 20.0 °C tiene un diámetro de 0.900 0 cm, mientras que el de un agujero en una placa de aluminio ($\alpha = 2.20 \times 10^{-5}$ °C^{-1}) es de 0.899 0 cm. ¿A qué temperatura (la misma para ambos) apenas pasará la esfera por el orificio?

Se desea que para una temperatura ΔT mayor que los 20.0 °C los diámetros de la esfera y del agujero sean los mismos:

$$0.900\,0\text{ cm} + (0.900\,0\text{ cm})(1.10 \times 10^{-5}\ °\text{C}^{-1})\,\Delta T = 0.899\,0\text{ cm} + (0.899\,0\text{ cm})(2.20 \times 10^{-5}\ °\text{C}^{-1})\,\Delta T$$

Resolviendo para ΔT, encontramos $\Delta T = 101$ °C. Como la temperatura inicial era de 20.0 °C, la temperatura final debe ser de 121 °C.

15.6 Una cinta métrica de acero se utiliza para medir la longitud de una barra de cobre de 90.00 cm cuando ambas se encuentran a 10 °C, que es la temperatura de calibración de la cinta. ¿Cuál será la lectura en la cinta de la longitud de la barra cuando las dos estén a una temperatura de 30 °C? $\alpha_{\text{acero}} = 1.1 \times 10^{-5}$ °C^{-1}; $\alpha_{\text{cobre}} = 1.7 \times 10^{-5}$ °C^{-1}.

A 30 °C, la barra de cobre tiene una longitud

$$L_0(1 + \alpha_{\text{cobre}}\,\Delta T)$$

mientras que las marcas de "centímetros" en la cinta de acero estarán separadas por una distancia de

$$(1.000\text{ cm})(1 + \alpha_{\text{acero}}\,\Delta T)$$

Por consiguiente, el número de "centímetros" leídos en la cinta será

$$\frac{L_0(1 + \alpha_{\text{cobre}}\,\Delta T)}{(1\text{ cm})(1 + \alpha_{\text{acero}}\,\Delta T)} = \frac{(90.00\text{ cm})\left[1 + (1.7 \times 10^{-5}\ °\text{C}^{-1})(20\ °\text{C})\right]}{(1.000\text{ cm})\left[1 + (1.1 \times 10^{-5}\ °\text{C}^{-1})(20\ °\text{C})\right]} = 90.00\,\frac{1 + 3.4 \times 10^{-4}}{1 + 2.2 \times 10^{-4}}$$

Usando la aproximación

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$$

para x muy pequeña comparada con 1, tenemos

$$90.00\frac{1+3.4\times10^{-4}}{1+2.2\times10^{-4}} \approx 90.00(1+3.4\times10^{-4})(1-2.2\times10^{-4}) \approx 90.00(1+3.4\times10^{-4}-2.2\times10^{-4})$$

$$= 90.00 + 0.0108$$

la lectura en la cinta será de 90.01 cm.

15.7 Un vaso de precipitados se llena “hasta la marca” con 50.00 cm³ de mercurio a 18 °C. Si el vaso y su contenido se calientan a 38 °C, ¿cuánto mercurio habrá sobrepasado la marca? $\alpha_{\text{vidrio}} = 9.0 \times 10^{-6}$ °C⁻¹ y $\beta_{\text{mercurio}} = 182 \times 10^{-6}$ °C⁻¹.

Tomaremos $\beta_{\text{vidrio}} = 3\alpha_{\text{vidrio}}$ como una buena aproximación. El interior del vaso se dilatará como si fuera una pieza sólida de vidrio. Entonces,

$$\text{Volumen de mercurio sobre la marca} = (\Delta V \text{ del mercurio}) - (\Delta V \text{ del vidrio})$$

$$= \beta_m V_0\,\Delta T - \beta_v V_0\,\Delta T = (\beta_m - \beta_v)V_0\,\Delta T$$

$$= [(182 - 27)\times10^{-6}\ ^\circ\text{C}^{-1}](50.00\ \text{cm}^3)[(38-18)\ ^\circ\text{C}]$$

$$= 0.15\ \text{cm}^3$$

15.8 La densidad del mercurio a 0 °C es de 13 600 kg/m³, y su coeficiente de dilatación volumétrica es 1.82×10^{-4} °C⁻¹. Calcular la densidad del mercurio a 50.0 °C.

ρ_0 = densidad del mercurio a 0 °C

ρ_1 = densidad del mercurio a 50 °C

V_0 = volumen de m kg de mercurio a 0 °C

V_1 = volumen de m kg de mercurio a 50 °C

Por conservación de la masa, $m = \rho_0 V_0 = \rho_1 V_1$ por lo tanto

$$\rho_1 = \rho_0 \frac{V_0}{V_1} = \rho_0 \frac{V_0}{V_0 + \Delta V} = \rho_0 \frac{1}{1 + (\Delta V/V_0)}$$

Pero

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \beta\,\Delta T = (1.82\times10^{-4}\ ^\circ\text{C}^{-1})(50.0\ ^\circ\text{C}) = 0.00910$$

Sustituyendo en la primera ecuación obtenemos

$$\rho_1 = (13\,600\ \text{kg/m}^3)\frac{1}{1+0.009\,10} = 13.5\times10^3\ \text{kg/m}^3$$

15.9 Demuéstrese que la densidad de un líquido o un sólido varía con la temperatura de la siguiente forma: $\Delta\rho = -\rho\beta\,\Delta T$.

Considere una masa m de líquido en un volumen V_0 para el cual $\rho_0 = m/V_0$. Después de un cambio de temperatura ΔT el nuevo volumen es

$$V = V_0 + V_0\beta\,\Delta T$$

y la densidad

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_0(1+\beta\,\Delta T)}$$

Pero $m/V_0 = \rho_0$, y podemos escribir

$$\rho(1+\beta\,\Delta T) = \rho_0$$

Entonces encontramos

$$\Delta\rho = \rho - \rho_0 = -\rho\beta\,\Delta T$$

En la práctica, ρ tiene un valor muy próximo al de ρ_0, de tal forma que es posible concluir $\Delta\rho \approx -\rho_0\beta\,\Delta T$.

15.10 Resolver el problema 15.8 utilizando el resultado del problema 15.9.

Tenemos

$$\Delta\rho = -(13\,600\ \text{kg/m}^3)(182\times10^{-6}\ {}^\circ\text{C}^{-1})(50.0\ {}^\circ\text{C}) = -124\ \text{kg/m}^3$$

de donde

$$\rho_{50\,^\circ\text{C}} = \rho_{0\,^\circ\text{C}} - 124\ \text{kg/m}^3 = 13.5\times10^3\ \text{kg/m}^3$$

15.11 Un alambre de acero de 2.0 mm² de sección transversal se mantiene recto (sin tensión alguna) sujetándolo firmemente a dos puntos separados una distancia de 1.50 m a 30 °C. Si la temperatura decrece a −10 °C, y si los dos puntos permanecen fijos, ¿cuál será la tensión en el alambre? Para el acero $\alpha = 1.1\times10^{-5}\ {}^\circ\text{C}^{-1}$ y $Y = 2.0\times10^{11}\ \text{N/m}^2$.

En caso de que el alambre no estuviera fijo en sus extremos, se contraería una distancia ΔL al enfriarse, donde

$$\Delta L = \alpha L_0\,\Delta T = (1.1\times10^{-5}\ {}^\circ\text{C}^{-1})(1.5\ \text{m})(40\ {}^\circ\text{C}) = 6.6\times10^{-4}\ \text{m}$$

Pero los puntos están fijos. Como resultado, las fuerzas en los extremos, de hecho, estiran al alambre la misma longitud ΔL. Por consiguiente, de la ecuación $Y = (F/A)/(\Delta L/L_0)$, tendremos

$$\text{Tensión} = F = \frac{YA\,\Delta L}{L_0} = \frac{(2.0\times10^{11}\ \text{N/m}^2)(2.0\times10^{-6}\ \text{m}^2)(6.6\times10^{-4}\ \text{m})}{1.50\ \text{m}} = 176\ \text{N} = 0.18\ \text{kN}$$

Estrictamente, se deberá sustituir $(1.5 - 6.6\times10^{-4})$ m por L en la expresión de la tensión. No obstante, el error es despreciable a pesar de no tomar en cuenta dicho valor.

15.12 Cuando un edificio se construye a -10 °C, las vigas de acero (con un área de 45 cm² en la sección transversal) se colocan en su lugar cementando los extremos a las columnas. Si los extremos no se pueden mover, ¿cuál será la fuerza de compresión en la viga cuando la temperatura suba a 25 °C? Para el acero, $\alpha = 1.1\times10^{-5}$ °C^{-1} y $Y = 2.0\times10^{11}$ N/m².

Procedemos de la misma forma que en el problema 15.11:

$$\frac{\Delta L}{L_0} = \alpha\,\Delta T = (1.1\times10^{-5}\ ^\circ\text{C}^{-1})(35\ ^\circ\text{C}) = 3.85\times10^{-4}$$

de donde

$$F = YA\frac{\Delta L}{L_0} = (2.0\times10^{11}\ \text{N/m}^2)(45\times10^{-4}\ \text{m}^2)(3.85\times10^{-4}) = 3.5\times10^{5}\ \text{N}$$

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

15.13 Calcular el incremento de longitud de un alambre de cobre que mide 50 m cuando la temperatura cambia de 12 °C a 32 °C. Para el cobre, $\alpha = 1.7\times10^{-5}$ °C^{-1}. *Resp.* 1.7 cm

15.14 Una barra de 3.0 m de longitud se expande 0.091 cm a una temperatura de 60 °C. ¿Cuál es el valor de α para el material de que está hecha la barra? *Resp.* 5.1×10^{-6} °C^{-1}

15.15 Una rueda lisa en su periferia tiene un diámetro de 30.000 cm a una temperatura de 15.0 °C. El diámetro interior de un aro de acero mide 29.930 cm. ¿A qué temperatura se debe calentar el aro para que pueda resbalar sobre la rueda? Para el acero $\alpha = 1.10\times10^{-5}$ °C^{-1}. *Resp.* 227 °C

15.16 Una esfera de hierro tiene un diámetro de 6 cm y es 0.010 mm más grande que el diámetro de un agujero que se encuentra en una placa de bronce; tanto la placa como la esfera están a una temperatura de 30 °C. ¿A qué temperatura (la misma para la esfera y la placa) apenas pasará la esfera por el agujero? $\alpha = 1.2\times10^{-5}$ °C^{-1} y $\alpha = 1.9\times10^{-5}$ °C^{-1} para el hierro y el bronce respectivamente. *Resp.* 54 °C

15.17 *a*) Una regla de aluminio que está calibrada a 5.0 °C se utiliza para medir una distancia de 88.42 cm a 35.0 °C. Calcular el error en la medición debido a la dilatación de la regla. *b*) Se encuentra que la longitud de una barra de acero medida con la regla es de 88.42 cm a 35.0 °C, ¿cuál es la longitud correcta de la barra de acero a 35 °C? El coeficiente de dilatación lineal del aluminio es $\alpha = 22\times10^{-6}$ °C^{-1}. *Resp.* *a*) 0.058 cm; *b*) 88 cm

15.18 Una esfera sólida de masa m y radio b gira libremente sobre su eje a una velocidad angular ω_0. Cuando su temperatura se incrementa ΔT, su velocidad angular cambia a ω. Calcular ω_0/ω si el coeficiente de dilatación lineal del material de la esfera es α. *Resp.* $1 + 2\alpha\,\Delta T + (\alpha\,\Delta T)^2$

15.19 Encuéntrese el incremento en volumen de 100 cm^3 de mercurio cuando su temperatura cambia de 10 °C a 35 °C. El coeficiente de dilatación volumétrica del mercurio es 0.000 18 °C^{-1}. *Resp.* 0.45 cm^3

15.20 El coeficiente de expansión lineal del vidrio es de 9.0×10^{-6} °C^{-1}. Un picnómetro (frasco que sirve para determinar la densidad relativa de líquidos) tiene una capacidad de 50.000 mL a 15 °C. Calcular su capacidad a 25 °C. *Resp.* 50.014 mL

15.21 Determínese el cambio en el volumen de un bloque de hierro fundido de 5.0 cm × 10 cm × 6.0 cm, cuando la temperatura cambia de 15 °C a 47 °C. El coeficiente de dilatación lineal del hierro fundido es 0.000 010 °C^{-1}. *Resp.* 0.29 cm^3

15.22 Un recipiente de vidrio se llena exactamente con 1 litro de trementina a 20 °C. ¿Qué volumen de líquido se derramará cuando su temperatura suba a 86 °C? El coeficiente de dilatación lineal del vidrio es 9.0×10^{-6} °C^{-1}; el coeficiente de dilatación volumétrica de la trementina es 97×10^{-5} °C^{-1}. *Resp.* 62 mL

15.23 La densidad del oro a 20.0 °C es de 19.30 g/cm^3, el coeficiente de dilatación lineal es 14.3×10^{-6} °C^{-1}. Calcúlese la densidad del oro a 90.0 °C. *Resp.* 19.2 g/cm^3

capítulo 16

Gases ideales

UN GAS IDEAL (O PERFECTO) es aquel que obedece la ley de los gases ideales, la cual será establecida posteriormente. A presiones bajas o moderadas y a temperaturas no muy bajas, los siguientes gases pueden ser considerados como ideales: aire, oxígeno, helio, hidrógeno y neón. Casi cualquier gas químicamente estable se comporta como gas ideal, si se encuentra alejado de las condiciones de licuación o solidificación. En otras palabras, un gas real se comporta como uno ideal cuando sus átomos o moléculas están tan separadas que no interactúan de manera apreciable entre sí.

UNA MOL DE UNA SUSTANCIA es la cantidad de sustancia que contiene tantas partículas como átomos hay en exactamente 12 gramos (0.012 kg) del isótopo carbono-12. Así pues, *un kilomol* (kmol) de una sustancia es la masa (en kg) que numéricamente es igual a la masa molecular (o atómica) de la sustancia. Por ejemplo, la masa molecular del gas hidrógeno, H_2, es de 2 kg/kmol; es decir, hay 2 kg en un 1 kmol de H_2. Similarmente, hay 32 kg en 1 kmol de O_2, y 28 kg en 1 kmol de N_2. Aquí se utilizarán *kilo*gramos y *kilo*moles en los cálculos. En algunas ocasiones el término *peso* molecular (o atómico) se empleará en lugar de *masa* molecular, pero este último es el correcto.

LEY DEL GAS IDEAL: La presión absoluta P de n kilomoles de un gas contenido en un volumen V está relacionada con la temperatura absoluta T por:

$$PV = nRT$$

donde $R = 8314\ \text{J/kmol} \cdot \text{K}$ es conocida como *constante universal de los gases*. Si en el volumen hay m kilogramos de gas con una masa molecular (o atómica) M, entonces $n = m/M$.

LOS CASOS ESPECIALES de la ley del gas ideal se obtienen al dejar constantes dos de sus variables, es decir

Ley de Boyle (n, T constantes): $\quad PV = \text{constante}$

Ley de Charles (n, P constantes): $\quad \dfrac{V}{T} = \text{constante}$

Ley de Gay-Lussac (n, V constantes): $\quad \dfrac{P}{T} = \text{constante}$

EL CERO ABSOLUTO: Con n y P constantes (ley de Charles), el volumen decrece con la temperatura y (si el gas permanece como ideal) éste podría llegar a ser cero cuando $T = 0$ K. De la misma manera, con n y V constantes (ley de Gay-Lussac), la presión podría decrecer hasta cero con la temperatura. Esta temperatura única, para la cual P y V podrían llegar a ser cero, se llama *cero absoluto*.

LAS CONDICIONES ESTÁNDAR O TEMPERATURA Y PRESIÓN ESTÁNDAR (TPE) se definen como

$$T = 273.15 \text{ K} = 0 \text{ °C} \qquad P = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ atm}$$

Bajo condiciones estándar, 1 kmol de *gas ideal* ocupa un volumen de 22.4 m³. Por consiguiente, en TPE, 2 kg de H_2 ocupan el mismo volumen que 32 kg de O_2 o 28 kg de N_2, que es de 22.4 m³.

LEY DE DALTON DE LAS PRESIONES PARCIALES: La *presión parcial* de un componente de una mezcla de gases se define como la presión que ejercería el gas componente, si ocupara sólo el volumen completo. Entonces, la presión total de la mezcla de gases ideales, no reactivos, es la suma de las presiones parciales de los gases que la componen.

LOS PROBLEMAS SOBRE LA LEY DE LOS GASES que incluyen cambios en las condiciones, desde (P_1, V_1, T_1) hasta (P_2, V_2, T_2), generalmente son de fácil resolución, si la ley de los gases se escribe como

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \qquad \text{(cuando } n \text{ es constante)}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

16.1 Una masa de oxígeno a 5.0 °C ocupa 0.020 0 m³ a la presión atmosférica y tiene 101 kPa. Determínese su volumen si su presión se incrementa hasta 108 kPa mientras su temperatura cambia a 30 °C.

Dado que

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \qquad \text{tenemos} \qquad V_2 = V_1\left(\frac{P_1}{P_2}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

Pero $T_1 = 5 + 273 = 278$ K y $T_2 = 30 + 273 = 303$ K, por lo que

$$V_2 = (0.020\,0 \text{ m}^3)\left(\frac{101}{108}\right)\left(\frac{303}{278}\right) = 0.020\,4 \text{ m}^3$$

16.2 Un día en que la presión atmosférica es de 76 cmHg, el manómetro de un tanque marca la lectura de la presión interna del mismo en 400 cmHg. El gas en el tanque tiene una temperatura de 9 °C. Si en el depósito la temperatura aumenta a 31 °C debido a la energía solar y además no existen escapes para gas en el tanque, ¿cuál será la lectura de la presión en el manómetro?

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \quad \text{así que} \quad P_2 = P_1\left(\frac{T_2}{T_1}\right)\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$$

Pero los manómetros de los tanques generalmente leen la diferencia de presiones entre el interior y el exterior, la cual se conoce como *presión manométrica.* Por lo tanto

$$P_1 = 76\text{ cmHg} + 400\text{ cmHg} = 476\text{ cmHg}$$

También $V_1 = V_2$. Entonces se tiene a

$$P_2 = (476\,\text{cmHg})\left(\frac{273+31}{273+9}\right)(1.00) = 513\,\text{cmHg}$$

La lectura en el manómetro será de 513 cmHg − 76 cmHg = 437 cmHg.

16.3 La presión manométrica en la llanta de un automóvil es de 305 kPa cuando su temperatura es de 15 °C. Después de correr a alta velocidad, el neumático se calentó y su presión subió a 360 kPa. ¿Cuál es entonces la temperatura del gas de la llanta? Considérese la presión atmosférica como 101 kPa.

Así

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \quad \text{o} \quad T_2 = T_1\left(\frac{P_2}{P_1}\right)\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

con

$$P_1 = 305\text{ kPa} + 101\text{ kPa} = 406\text{ kPa} \qquad \text{y} \qquad P_2 = 360\text{ kPa} + 101\text{ kPa} = 461\text{ kPa}$$

entonces

$$T_2 = (273+15)\left(\frac{461}{406}\right)(1.00) = 327\,\text{K}$$

Así la temperatura final de la llanta es de 327 − 273 = 54 °C.

16.4 Un gas a temperatura y presión ambiente está contenido en un cilindro por medio de un pistón. Éste es empujado de modo que el volumen se reduce a una octava parte de su valor inicial. Después de que la temperatura del gas ha vuelto a ser igual a la del ambiente, ¿cuál será la presión manométrica del gas? La presión atmosférica local es 740 mm de mercurio.

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \quad \text{o} \quad P_2 = P_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

Pero $T_1 = T_2$, $P_1 = 740$ mmHg, $V_2 - V_1/8$. Sustituyendo nos da

$$P_2 = (740 \text{ mmHg})(8)(1) = 5920 \text{ mmHg}$$

La presión manométrica es la diferencia entre la presión efectiva y la atmosférica. Por lo tanto

$$\text{Presión manométrica} = 5920 \text{ mmHg} - 740 \text{ mmHg} = 5180 \text{ mmHg}$$

Ya que 760 mmHg = 101 kPa, la presión manométrica en kPa es

$$(5180 \text{ mmHg})\left(\frac{101 \text{ kPa}}{760 \text{ mmHg}}\right) = 690 \text{ kPa}$$

16.5 Un gas ideal tiene un volumen de 1 litro a 1.00 atm y a –20 °C. ¿A cuántas atmósferas de presión se debe someter para comprimirlo hasta 0.500 litros cuando su temperatura es de 40 °C?

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \quad \text{o} \quad P_2 = P_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

de donde

$$P_2 = (1.00 \text{ atm})\left(\frac{1.00 \text{ L}}{0.500 \text{ L}}\right)\left(\frac{273 \text{ K} + 40 \text{ K}}{273 \text{ K} - 20 \text{ K}}\right) = 2.47 \text{ atm}$$

16.6 Cierta masa de gas de hidrógeno ocupa 370 mL a 16 °C y 150 kPa. Encuéntrese su volumen a –21 °C y 420 kPa.

Tenemos

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \quad \text{da} \quad V_2 = V_1\left(\frac{P_1}{P_2}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$V_2 = (370 \text{ mL})\left(\frac{150 \text{ kPa}}{420 \text{ kPa}}\right)\left(\frac{273 \text{ K} - 21 \text{ K}}{273 \text{ K} + 16 \text{ K}}\right) = 115 \text{ mL}$$

16.7 La densidad del nitrógeno en condiciones TPE es de 1.25 kg/m³. Determínese su densidad a 42 °C y 730 mm de mercurio.

Ya que $\rho = m/V$, entonces $V_1 = m/\rho_1$ y $V_2 = m/\rho_2$ para una masa de gas dada bajo dos conjuntos de condiciones. Entonces

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \quad \text{da} \quad \frac{P_1}{\rho_1 T_1} = \frac{P_2}{\rho_2 T_2}$$

Ya que las TPE son 760 mmHg y 273 K,

$$\rho_2 = \rho_1\left(\frac{P_2}{P_1}\right)\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = (1.25\,\text{kg/m}^3)\left(\frac{730\,\text{mmHg}}{760\,\text{mmHg}}\right)\left(\frac{273\,\text{K}}{273\,\text{K}+42\,\text{K}}\right) = 1.04\,\text{kg/m}^3$$

Nótese que aquí la presión puede expresarse en mmHg puesto que las unidades se cancelan en la relación P_2/P_1.

16.8 Un tanque de 3.0 litros contiene oxígeno a 20 °C y a una presión manométrica de 25×10^5 Pa. ¿Cuál es la masa del gas almacenado en el tanque? La masa molecular del oxígeno es de 32 kg/kmol. Considérese que la presión atmosférica es de 1×10^5 Pa.

La presión absoluta del gas es

$$P = (\text{presión manométrica}) + (\text{presión atmosférica}) = (25+1)\times 10^5\ \text{N/m}^2 = 26\times 10^5\ \text{N/m}^2$$

De la ley de los gases, con $M = 32$ kg/kmol,

$$PV = \left(\frac{m}{M}\right)RT$$

$$(26\times 10^5\ \text{N/m}^2)(3.0\times 10^{-3}\ \text{m}^3) = \left(\frac{m}{32\ \text{kg/kmol}}\right)\left(8314\,\frac{\text{J}}{\text{kmol}\cdot\text{K}}\right)(293\,\text{K})$$

Resolviendo para m, es decir la masa del gas en el tanque, obtenemos 0.10 kg.

16.9 Determínese el volumen ocupado por 4.0 g de oxígeno ($M = 32$ kg/kmol) a TPE.

Método 1

Utilícese directamente la ley de los gases:

$$PV = \left(\frac{m}{M}\right)RT$$

$$V = \left(\frac{1}{P}\right)\left(\frac{m}{M}\right)RT = \frac{(4.0\times 10^{-3}\ \text{kg})(8314\ \text{J/kmol}\cdot\text{K})(273\,\text{K})}{(1.01\times 10^5\,\text{N/m}^2)(32\ \text{kg/kmol})} = 2.8\times 10^{-3}\ \text{m}^3$$

Método 2

Bajo condiciones normales TPE, 1 kmol ocupa 22.4 m³. Por lo tanto, los 32 kg ocuparán 22.4 m³ y los 4.0 g ocuparán

$$\left(\frac{4.0\,\text{g}}{32\,000\,\text{g}}\right)(22.4\ \text{m}^3) = 2.8\times 10^{-3}\ \text{m}^3$$

16.10 Una gotita de nitrógeno líquido de 2.0 mg está presente en un tubo de 30 mL al sellarse a muy baja temperatura. ¿Cuál será la presión del nitrógeno en el tubo cuando éste se encuentre a 20 °C? Exprese la respuesta en atmósferas. (M para el nitrógeno es 28 kg/kmol.)

Use $PV = (m/M)RT$ para encontrar

$$P = \frac{mRT}{MV} = \frac{(2.0 \times 10^{-6}\ \text{kg})(8314\ \text{J/kmol} \cdot \text{K})(293\ \text{K})}{(28\ \text{kg/kmol})(30 \times 10^{-6}\ \text{m}^3)} = 5800\ \text{N/m}^2$$

$$= (5800\ \text{N/m}^2)\left(\frac{1.0\ \text{atm}}{1.01 \times 10^5\ \text{N/m}^2}\right) = 0.057\ \text{atm}$$

16.11 Un tanque de 590 litros de volumen contiene oxígeno a 20 °C y 5.0 atm de presión. Calcúlese la masa del gas almacenado en el depósito. $M = 32$ kg/kmol para el oxígeno.

Use $PV = (m/M)RT$ para determinar

$$m = \frac{PVM}{RT} = \frac{(5 \times 1.01 \times 10^5\ \text{N/m}^2)(0.59\ \text{m}^3)(32\ \text{kg/kmol})}{(8314\ \text{J/kmol} \cdot \text{K})(293\ \text{K})} = 3.9\ \text{kg}$$

16.12 A 18 °C y 765 mmHg, 1.29 litros de un gas ideal "pesan" 2.71 g. Encuéntrese la masa molecular del gas.

Use $PV = (m/M)RT$ y el hecho de que 760 mmHg = 1.00 atm para obtener

$$M = \frac{mRT}{PV} = \frac{(0.002\,71\ \text{kg})(8314\ \text{J/kmol} \cdot \text{K})(291\ \text{K})}{[(765/760)(1.01 \times 10^5\ \text{N/m}^2)](0.001\,29\ \text{m}^3)} = 50.0\ \text{kg/kmol}$$

16.13 Determínese el volumen de 8.0 g de helio ($M = 4.0$ kg/kmol) a 15 °C y 480 mmHg.

Use $PV = (m/M)RT$ para obtener

$$V = \frac{mRT}{PV} = \frac{(0.008\,0\ \text{kg})(8314\ \text{J/kmol} \cdot \text{K})(288\ \text{K})}{(4.0\ \text{kg/kmol})[(480/760)(1.01 \times 10^5\ \text{N/m}^2)]} = 0.075\ \text{m}^3 = 75\ \text{litros}$$

16.14 Encuéntrese la densidad del metano ($M = 16$ kg/kmol) a 20 °C y 5.0 atm.

Use $PV = (m/M)RT$ y $\rho = m/V$ para obtener

$$\rho = \frac{PM}{RT} = \frac{(5.0 \times 1.01 \times 10^5\ \text{N/m}^2)(16\ \text{kg/kmol})}{(8314\ \text{J/kmol} \cdot \text{K})(293\ \text{k})} = 3.3\ \text{kg/m}^3$$

Al dividir una ecuación entre la otra eliminamos V, R y T:

$$\frac{n_H}{n_N} = \frac{P_H}{P_N} = \frac{3.50\text{ atm}}{4.50\text{ atm}} = 0.778$$

Pero

$$n_N = \frac{m}{M} = \frac{18\text{ kg}}{28\text{ kg/kmol}} = 0.643\text{ kmol}$$

así que

$$n_H = (n_N)(0.778) = (0.643\text{ kmol})(0.778) = 0.500\text{ kmol}$$

Entonces, de $n = m/M$, obtenemos

$$m_H = (0.500\text{ kmol})(2.0\text{ kg/kmol}) = 1.0\text{ kg}$$

16.18 En una mezcla gaseosa a 20 °C las presiones parciales son las siguientes: hidrógeno, 200 mmHg; dióxido de carbono, 150 mmHg; metano, 320 mmHg; etileno, 105 mmHg. ¿Cuál es *a*) la presión total de la mezcla y *b*) la fracción de masa del hidrógeno? ($M_H = 2.0$ kg/kmol, $M_{CO_2} =$ 44 kg/kmol, $M_{metano} = 16$ kg/kmol, $M_{metano} = 30$ kg/kmol.)

a) De acuerdo con la ley de Dalton,

Presión total = suma de las presiones parciales = 200 mmHg + 150 mmHg + 320 mmHg + 105 mmHg = 775 mmHg

b) De la ley de los gases, $m = M(PV/RT)$. La masa del hidrógeno presente es

$$m_H = M_H P_H \left(\frac{V}{RT}\right)$$

la masa total de la mezcla, m_t, es la suma de términos semejantes:

$$m_t = (M_H P_H + M_{CO_2} P_{CO_2} + M_{metano} P_{metano} + M_{etileno} P_{etileno})\left(\frac{V}{RT}\right)$$

La fracción requerida es

$$\frac{m_H}{m_t} = \frac{M_H P_H}{M_H P_H + M_{CO_2} P_{CO_2} + M_{metano} P_{metano} + M_{etileno} P_{etileno}}$$

$$\frac{m_H}{m_t} = \frac{(2.0\text{ kg/kmol})(200\text{ mmHg})}{(2.0\text{ kg/kmol})(200\text{ mmHg}) + (44\text{ kg/kmol})(150\text{ mmHg}) + (16\text{ kg/kmol})(320\text{ mmHg}) + (30\text{ kg/kmol})(105\text{ mmHg})} = 0.026$$

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

16.19 La masa de un gas ocupa un volumen de 4.00 m^3 a 758 mmHg. Calcúlese su volumen a 635 mmHg, si la temperatura permanece constante. *Resp.* 4.77 m^3

16.20 Una masa de gas dada ocupa 38 mL a 20 °C. Si su presión se mantiene constante, ¿cuál es el volumen que ocupa a una temperatura de 45 °C? *Resp.* 41 mL

16.21 En un día en que la presión atmosférica es de 75.83 cmHg, un manómetro de un tanque para gas marca la lectura de la presión de 258.5 cmHg. ¿Cuál es la presión absoluta (en atmósferas y en kPa) del gas dentro del tanque? *Resp.* 334.3 cmHg = 4.398 atm = 445.6 kPa

16.22 Un tanque que contiene un gas ideal se sella a 20 °C y a una presión de 1.00 atm. ¿Cuál será la presión (en kPa y mmHg) en el tanque, si la temperatura disminuye a −35 °C? *Resp.* 82 kPa = 6.2×10^2 mmHg

16.23 Dados 1000 mL de helio a 15 °C y 763 mmHg, determínese su volumen a − 6 °C y 420 mmHg. *Resp.* 1.68×10^3 mL

16.24 Un kilomol de gas ideal ocupa 22.4 m^3 a 0 °C y 1 atm. *a*) ¿Cuál es la presión que se requiere para comprimir 1.00 kmol de gas en un contenedor de 5.00 m^3 a 100 °C? *b*) Si se va a encerrar en un tanque de 5.00 m^3, el cual puede resistir una presión manométrica máxima de 3.00 atm, ¿cuál sería la máxima temperatura del gas si se desea que el tanque no estalle? *Resp.* *a*) 6.12 atm; *b*) −30 °C

16.25 Se encierra aire en un tubo capilar sellado en su extremo inferior por medio de una columna de mercurio como se muestra en la Fig. 16-1. La parte superior del tubo está abierta. La temperatura es de 14 °C y la presión atmosférica es de 740 mmHg. ¿Cuál será la longitud de la columna de aire atrapado si la temperatura sube 30 °C y la presión atmosférica a 760 mmHg? *Resp.* 12.4 cm

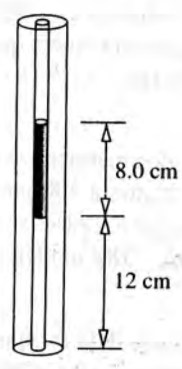


Fig. 16-1

16.26 Cierta cantidad de aire está atrapado en tubo capilar sellado en la parte baja, como se muestra en la Fig. 16-1, por una columna de mercurio de 8.0 cm de longitud. La parte superior del tubo está abierta y el sistema se encuentra en equilibrio. ¿Cuál será la longitud de la columna de aire atrapado si el tubo se inclina hasta alcanzar un ángulo de 65° con la vertical? Tómese $P_a = 76$ cmHg. *Resp.* 0.13 m.

16.27 En un día en que el barómetro marca una lectura de 75.23 cm, un reactor contiene 250 mL de cierto gas ideal a 20.0 °C. Un manómetro de aceite ($\rho = 810$ kg/m^3) lee la presión en el reactor y marca 41.0 cm de aceite bajo la presión atmosférica. ¿Qué volumen ocupará el gas en las condiciones TPS? *Resp.* 233 mL

16.28 Un tanque de 5000 cm^3 contiene un gas ideal ($M = 40$ kg/kmol) a una presión manométrica de 530 kPa y a una temperatura de 25 °C. Si se supone que la presión atmosférica es de 100 kPa, ¿qué cantidad de masa de gas se encuentra en el depósito? *Resp.* 0.051 kg

16.29 La presión del aire en un vacío razonablemente bueno podría ser de 2.0×10^{-5} mmHg. ¿Qué masa de aire existe en un volumen de 250 mL a esta presión y a 25 °C? Tómese $M = 28$ kg/kmol para el aire. *Resp.* 7.5×10^{-12} kg

16.30 ¿Qué volumen ocupará 1.216 g de SO_2 gaseoso ($M = 64.1$ kg/kmol) a 18.0 °C y 775 mmHg, si éste actúa como un gas ideal? *Resp.* 457 mL

16.31 Calcúlese la densidad del H_2S gaseoso ($M = 34.1$ kg/kmol) a 27 °C y 2.00 atm, considerándolo como gas ideal. *Resp.* 2.76 kg/m^3

16.32 Un tubo cerrado, de 30 mL, contiene 0.25 g de vapor de agua ($M = 18$ kg/kmol) a una temperatura de 340 °C. Suponiendo que es un gas ideal, ¿cuál es su presión? *Resp.* 2.4 MPa

16.33 Un método para determinar la temperatura en el centro del Sol se basa en la ley de los gases ideales. Si se supone que el centro consiste de gases cuya masa M promedio es de 0.70 kg/kmol, y si la densidad y la presión son 90×10^3 kg/m^3 y 1.4×10^{11} atm, respectivamente; calcúlese la temperatura. *Resp.* 1.3×10^7 K

16.34 Un matraz sellado de 500 mL contiene nitrógeno a una presión de 76.00 cmHg. Un capilar delgado de vidrio reposa en el fondo del matraz. Su volumen es 0.50 mL y encierra gas de hidrógeno a una presión de 4.5 atm. Supóngase que se rompe el capilar de tal manera que el hidrógeno llena el matraz. ¿Cuál será la nueva presión en el matraz? *Resp.* 76.34 cmHg

16.35 Como se muestra en la Fig. 16-2, dos matraces se encuentran conectados por una llave de paso inicialmente cerrada. Un matraz contiene gas criptón a 500 mmHg, mientras que el otro encierra helio a 950 mmHg. La llave de paso se abre de tal manera que los gases se mezclan. ¿Cuál es la presión final del sistema? Considérese la temperatura constante. *Resp.* 789 mmHg

16.36 Una burbuja de aire de volumen V_0 se deja escapar cerca del fondo de un lago a una profundidad de 11.0 m. ¿Cuál será su volumen en la superficie? Considérese que su temperatura es de 4.0 °C en el punto de partida y de 12 °C en la superficie. El agua tiene una densidad de 1000 kg/m^3 y la presión atmosférica es de 75 cmHg. *Resp.* 2.1 V_0

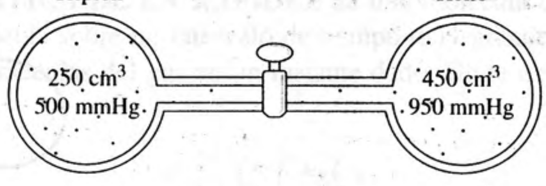


Fig. 16-2

16.37 **Una campana de buzo cilíndrica (un cilindro vertical con el extremo inferior abierto y el superior cerrado) de 12.0 m de largo se sumerge en un lago hasta que el agua que se encuentra dentro de la campana se ha elevado 8.0 m desde el fondo del cilindro. Determínese la distancia entre la parte superior del cilindro y la superficie del lago. (Presión atmosférica = 1.00 atm.)** *Resp.* 20.6 m − 4.0 m = 16.6 m

capítulo 17

Teoría cinética

LA TEORÍA CINÉTICA considera que la materia está compuesta por partículas discretas o moléculas en un movimiento continuo. En un gas, las moléculas se encuentran en movimiento azaroso (caótico) continuo con una amplia distribución de velocidades que van desde cero hasta valores muy grandes.

EL NÚMERO DE AVOGADRO (N_A) es el número de partículas (o moléculas o átomos) en 1 kmol de sustancia. Para todas las sustancias,

$$N_A = 6.022 \times 10^{26} \text{ partículas/kmol}$$

Por ejemplo, $M = 2$ kg/kmol para el H_2 y M = 32 kg/kmol para el O_2. Por consiguiente, 2 kg de H_2 y 32 kg de O_2 contienen cada uno 6.02×10^{26} moléculas.

LA MASA DE UNA MOLÉCULA (o átomo) se puede calcular a partir de la masa molecular (o atómica) M de una sustancia y con el número de Avogadro N_A. Como M kilogramos de una sustancia contiene N_A partículas, la masa m_0 de una partícula está dada por

$$m_0 = \frac{M}{N_A}$$

LA ENERGÍA CINÉTICA PROMEDIO de una molécula de gas es $3k_BT/2$, donde T es la temperatura absoluta del gas y $k_B = R/N_A = 1.381 \times 10^{-23}$ J/K es *la constante de Boltzmann.* En otras palabras, para una molécula de masa m_0,

$$(\text{promedio de } \tfrac{1}{2} m_0 \upsilon^2) = \tfrac{3}{2} k_B T$$

Nótese que, en la literatura correspondiente, la constante de Boltzmann también se da como k (sin subíndice).

LA RAÍZ MEDIA CUADRÁTICA DE LA RAPIDEZ de una molécula de gas es la raíz cuadrada del promedio de υ^2 para una molécula sobre un intervalo de tiempo muy grande. Esto es equivalente a tomar el promedio sobre todas las moléculas del gas en un instante dado. De la expresión de la energía cinética promedio, se tiene

$$\upsilon_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m_0}}$$

LA TEMPERATURA ABSOLUTA de un gas ideal tiene un significado que se obtiene al resolver la ecuación $\frac{1}{2}m_0\upsilon^2_{\text{rms}} = \frac{3}{2}k_BT$. Por lo tanto

$$T = \left(\frac{2}{3k_B}\right)\left(\frac{1}{2}m_0\upsilon^2_{\text{rms}}\right)$$

La temperatura absoluta de un gas ideal es una medida de la energía cinética promedio por molécula.

LA PRESIÓN se definió en el capítulo 16 con la ecuación $PV = (m/M)RT$. Observe que $m = Nm_0$, donde N es el número de moléculas en un volumen V, y sustituyendo el valor de T determinado arriba, tenemos

$$PV = \tfrac{1}{3}Nm_0\upsilon^2_{\text{rms}}$$

Aun más, como $Nm_0/V = \rho$, es la densidad del gas

$$P = \tfrac{1}{3}\rho\upsilon^2_{\text{rms}}$$

EL CAMINO LIBRE MEDIO de una molécula de gas es la distancia promedio en la que una mólecula se mueve entre colisiones. Para un gas de moléculas esféricas de radio b,

$$\text{Camino libre medio} = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}b^2(N/V)}$$

donde N/V es el número de moléculas por unidad de volumen.

PROBLEMAS RESUELTOS

17.1 Calcular la masa de una molécula de nitrógeno, N_2. La masa molecular es 28 kg/kmol.

$$m_0 = \frac{M}{N_A} = \frac{28\text{ kg/kmol}}{6.02\times10^{26}\text{ kmol}^{-1}} = 4.7\times10^{-26}\text{ kg}$$

17.2 El gas helio consta de átomos separados de He, en lugar de moléculas. ¿Cuántos átomos de helio, He, hay en 2.0 g de helio? $M = 4.0$ kg/kmol para el He.

Método 1

Un kilomol de He tiene 4.0 kg, y contiene N_A átomos. Pero 2.0 g equivale a

$$\frac{0.002\,0\text{ kg}}{4.0\text{ kg/kmol}} = 0.005\,0\text{ kmol}$$

de helio. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\text{Número de átomos en 2.0 g} &= (0.000\,50\text{ kmol})N_A \\ &= (0.000\,50\text{ kmol})(6.02\times 10^{26}\text{ kmol}^{-1}) = 3.0\times 10^{23}\end{aligned}$$

Método 2

La masa de un átomo de helio es

$$m_0 = \frac{M}{N_A} = \frac{4.0\text{ kg/kmol}}{6.02\times 10^{26}\text{ kmol}^{-1}} = 6.64\times 10^{-27}\text{ kg}$$

entonces

$$\text{Número de átomos en 2.0 g} = \frac{0.002\,0\text{ kg}}{6.64\times 10^{-27}\text{ kg}} = 3.0\times 10^{23}$$

17.3 Una gotita de mercurio tiene un radio de 0.50 mm. ¿Cuántos átomos de mercurio hay en la gotita? Para el Hg, $M = 202$ kg/kmol y $\rho = 13\,600$ kg/m^3.

El volumen de una gotita es

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \left(\frac{4\pi}{3}\right)(5.0\times 10^{-4}\text{ m})^3 = 5.24\times 10^{-10}\text{ m}^3$$

La masa de la gotita es

$$m = \rho V = (13\,600\text{ kg/m}^3)(5.24\times 10^{-10}\text{ m}^3) = 7.1\times 10^{-6}\text{ kg}$$

La masa de un átomo de mercurio es

$$m_0 = \frac{M}{N_A} = \frac{202\text{ kg/kmol}}{6.02\times 10^{26}\text{ kmol}^{-1}} = 3.36\times 10^{-25}\text{ kg}$$

Entonces el número de átomos en una gotita es

$$\text{Número de átomos} = \frac{m}{m_0} = \frac{7.1\times 10^{-6}\text{ kg}}{3.36\times 10^{-25}\text{ kg}} = 2.1\times 10^{19}$$

17.4 ¿Cuántas moléculas hay en 70 mL de benceno? Para el benceno, $\rho = 0.88\ \text{g/cm}^3$ y $M = 78\ \text{kg/kmol}$.

$$\text{Masa de } 70\ \text{cm}^3 = m = \rho V = (880\ \text{kg/m}^3)(70 \times 10^{-6}\ \text{m}^3) = 0.061\,6\ \text{kg}$$

$$m_0 = \frac{M}{N_A} = \frac{78\ \text{kg/kmol}}{6.02 \times 10^{26}\ \text{kmol}^{-1}} = 1.30 \times 10^{-25}\ \text{kg}$$

$$\text{Número en } 70\ \text{cm}^3 = \frac{m}{m_0} = \frac{0.0616\ \text{kg}}{1.30 \times 10^{-25}\ \text{kg}} = 4.8 \times 10^{23}$$

17.5 Calcular la rapidez rms de una molécula de nitrógeno ($M = 28$ kg/kmol) en el aire a 0 °C.

Sabemos que $\frac{1}{2} m_0 v_{\text{rms}}^2 = \frac{3}{2} k_B T$ por tanto

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m_0}}$$

Pero

$$m_0 = \frac{M}{N_A} = \frac{28\ \text{kg/kmol}}{6.02 \times 10^{26}\ \text{kmol}^{-1}} = 4.65 \times 10^{-26}\ \text{kg}$$

Así que

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(273\ \text{K})}{4.65 \times 10^{-26}\ \text{kg}}} = 0.49\ \text{km/s}$$

17.6 Una molécula de gas en la superficie de la Tierra tiene una rapidez rms igual a la que posee un gas a 0 °C. Si pudiera moverse verticalmente hacia arriba sin chocar con otras moléculas, ¿qué tan alto llegaría?

La EC inicial de la molécula es

$$\text{EC} = \tfrac{1}{2} m_0 v_{\text{rms}}^2 = \tfrac{3}{2} k_B T$$

La molécula continuará subiendo hasta que su EC se convierta en EP_G. Por consiguiente, llamando h a la altura, tenemos

$$\tfrac{3}{2} k_B T = m_0 g h$$

Resolviendo da

$$h = \left(\frac{1}{m_0}\right)\left(\frac{3k_BT}{2g}\right) = \left(\frac{1}{m_0}\right)\left[\frac{(3)(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(273\ \text{K})}{2(9.81\ \text{m/s}^2)}\right]$$

$$= \frac{5.76 \times 10^{-22}\ \text{kg} \cdot \text{m}}{m_0}$$

donde m_0 es la masa en kg. La altura varía inversamente con la masa de la molécula. Para una molécula de N_2, $m_0 = 4.65 \times 10^{-26}$ kg (problema 17.5) y en este caso h resulta ser 12.4 km.

17.7 El aire a temperatura ambiente tiene una densidad aproximada de 1.29 kg/m³. Suponiendo que está compuesto de un solo gas, calcular para sus moléculas la v_{rms}.

Como $P = \frac{1}{3}\rho v_{\text{rms}}^2$, tenemos

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3P}{\rho}} = \sqrt{\frac{3(100\times10^3\text{ Pa})}{1.29\text{ kg/m}^3}} \approx 480\text{ m/s}$$

donde se ha tomado 100 kPa como la presión atmosférica.

17.8 Encuéntrese la energía cinética de una molécula para cualquier gas ideal a 0 °C.

Para cualquier gas ideal, $\frac{3}{2}k_BT = \frac{1}{2}m_0v_{\text{rms}}^2$, que es la EC de cada molécula. Un mol contiene $N_A \times 10^{-3}$ moléculas. Entonces la EC total por mol es

$$\text{EC}_{\text{total}} = (N_A \times 10^{-3})\left(\frac{3}{2}k_BT\right) = 3\times10^{-3}\,\frac{RT}{2} = 3.4\text{ kJ}$$

donde $T = 273$ K, y se utilizó además el hecho de que $k_BN_A = R$.

17.9 Existe aproximadamente un átomo de hidrógeno por cada cm³ en el espacio exterior, donde la temperatura es, más o menos, de 3.5 K. Calcular la rapidez rms de cada átomo y la presión que ejercen.

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3k_BT}{M/N_A}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \approx 295\text{ m/s o }0.30\text{ km/s}$$

donde M para el hidrógeno es 1.0 kg/kmol y $T = 3.5$ K. Para determinar la presión podemos utilizar $P = \rho v_{\text{rms}}^2/3$. Como la masa m_0 de un átomo de hidrógeno es $(1.0\text{ kg/kmol})/N_A$, y como hay $N = 10^6$ átomos/m³, tenemos

$$\rho = \frac{Nm_0}{V} = \left(\frac{N}{V}\right)m_0 = 10^6\left(\frac{1}{N_A}\right)\text{kg/m}^3$$

y

$$P = \tfrac{1}{3}\rho v_{\text{rms}}^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{10^6}{6.02\times10^{26}}\right)(295)^2 = 5\times10^{-17}\text{ Pa}$$

17.10 Calcule las siguientes razones (cocientes) para los gases de hidrógeno ($M = 2.0$ kg/kmol) y nitrógeno ($M = 28$ kg/kmol) a la misma temperatura: *a*) $(\text{EC})_\text{H}/(\text{EC})_\text{N}$ y *b*) $(\text{rapidez rms})_\text{H}/(\text{rapidez rms})_\text{N}$.

a) La EC promedio de una molécula, $\frac{3}{2}k_BT$, depende sólo de la temperatura. Por lo mismo su cociente es la unidad.

b) $$\frac{(v_{rms})_H}{(v_{rms})_N} = \sqrt{\frac{3k_BT/m_{0H}}{3k_BT/m_{0N}}} = \sqrt{\frac{m_{0N}}{m_{0H}}}$$

Pero $m_0 = M/N_A$, entonces

$$\frac{(v_{rms})_H}{(v_{rms})_N} = \sqrt{\frac{M_N}{M_H}} = \sqrt{\frac{28}{2.0}} = 3.7$$

17.11 Las moléculas de un gas ideal se comportan como esferas de radio 3.0×10^{-10} m. Calcular el camino libre medio para estas moléculas bajo TPE.

Método 1

Sabemos que en condiciones TPE 1.00 kmol de una sustancia ocupa 22.4 m³. Por consiguiente, en 22.4 m³ hay $N_A = 6.02 \times 10^{26}$ moléculas. El camino libre está dado por

$$\text{Camino libre medio} = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}b^2(N/V)} = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}(3.0 \times 10^{-10}\ \text{m})^2}\left(\frac{22.4\ \text{m}^3}{6.02 \times 10^{26}}\right) = 2.4 \times 10^{-8}\ \text{m}$$

Método 2

Como $M = m_0N_A = m_0(R/k_B)$ y $m = Nm_0$,

$$PV = \left(\frac{m}{M}\right)RT \quad \text{se convierte en} \quad PV = Nk_BT$$

y entonces

$$\frac{N}{V} = \frac{P}{k_BT} = \frac{1.01 \times 10^5\ \text{N/m}^2}{(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(273\ \text{K})} = 2.68 \times 10^{25}\ \text{m}^{-3}$$

Ahora se sustituye este valor en la ecuación del camino medio libre y se obtiene el mismo resultado que en el método 1.

17.12 ¿A qué presión unas moléculas esféricas de radio 3.0×10^{-10} m tendrán un camino libre medio de 50 cm? Suponga un gas ideal a 20 °C.

De la expresión para el camino medio libre (c.m.l.) se obtiene

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}b^2\,(\text{c.m.l})}$$

Combinando esta ecuación con la de los gases ideales en la forma $PV = Nk_BT$ (véase el problema 17.11) obtenemos

$$P = \frac{k_BT}{4\pi\sqrt{2}b^2(\text{c.m.l})} = \frac{(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(293\ \text{K})}{4\pi\sqrt{2}(3.0 \times 10^{-10}\ \text{m})^2(0.50\ \text{m})} = 5.1\ \text{mPa}$$

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

17.13 Calcular la masa de un átomo de neón. La masa atómica del neón es 20.2 kg/kmol. *Resp.* 3.36×10^{-26} kg

17.14 En el polietileno una molécula típica de polímero puede tener una masa molecular de 15×10^3. *a*) ¿Cuál es la masa de dicha molécula? *b*) ¿Cuántas de tales moléculas harán 2 g de polímero? *Resp.* *a*) 2.5×10^{-23} kg; *b*) 8×10^{19}

17.15 Cierto virus del tabaco tiene $M = 4.0 \times 10^7$ kg/kmol. ¿Cuántas moléculas de este virus aparecen en 1.0 mL de una solución que contiene 0.10 mg de virus por mL? *Resp.* 1.5×10^{12}

17.16 Un tubo electrónico al vacío se selló durante su fabricación a una presión de 1.2×10^{-7} mmHg y a una temperatura de 27 °C. Su volumen es de 100 cm³. *a*) ¿Cuál es la presión en el tubo (en Pa)? *b*) ¿Cuántas moléculas de gas permanecen en el tubo? *Resp.* *a*) 1.6×10^{-5} Pa; *b*) 3.8×10^{11}

17.17 En un tubo que contiene gas de helio la presión es 0.200 mmHg. Si la temperatura del gas es 20 °C, ¿cuál es la densidad del gas? (Use $M_{He} = 4.0$ kg/kmol.) *Resp.* 4.4×10^{-5} kg/m³

17.18 ¿A qué temperatura las moléculas de un gas ideal tendrán dos veces la velocidad rms que poseen a 20 °C? *Resp.* 1170 K ≈ 900 °C

17.19 Un objeto debe tener una velocidad de por lo menos 11.2 km/s para escapar del campo gravitacional de la Tierra. ¿A qué temperatura será la v_{rms} de las moléculas de H_2 igual a la velocidad de escape? Repetir el problema para las moléculas de N_2. ($M_{H_2} = 2.0$ kg/kmol y $M_{N_2} = 28$ kg/kmol.) *Resp.* 1.0×10^4 K; 1.4×10^5 K

17.20 En una región del espacio exterior hay un promedio de sólo cinco moléculas por cm³. La temperatura en ese lugar es de aproximadamente 3 K. ¿Cuál es la presión promedio de este gas que está muy diluido? *Resp.* 2×10^{-16} Pa

17.21 Un cubo de aluminio tiene un volumen de 1.0 cm³ y una masa de 2.7 g. *a*) ¿Cuántos átomos de aluminio hay en el cubo? *b*) ¿Qué volumen se le puede asociar a cada átomo? *c*) Si cada átomo fuera un cubo, ¿cuál sería la longitud de una arista? $M = 108$ kg/kmol para el aluminio. *Resp.* *a*) 1.5×10^{22}; *b*) 6.6×10^{-29} m³; *c*) 4.0×10^{-10} m

17.22 La velocidad rms de las moléculas de nitrógeno en el aire a TPE es de aproximadamente 490 m/s. Calcular el camino medio libre y el tiempo promedio entre colisiones. El radio de una molécula de hidrógeno se puede tomar como 2.0×10^{-10} m. *Resp.* 5.2×10^{-8} m, 1.1×10^{-10} s

17.23 ¿Cuál es el camino medio libre de una molécula de gas (radio 2.5×10^{-10} m) en un gas ideal a 500 °C cuando la presión es de 7.0×10^{-6} mmHg? *Resp.* 10 m

capítulo 18

Calorimetría

ENERGÍA TÉRMICA es la energía cinética aleatoria de las partículas (por lo común electrones, iones, átomos y moléculas) que componen un sistema.

CALOR es la energía térmica en tránsito de un sistema (o agregado de electrones, iones y átomos) a una temperatura hacia un sistema que se encuentra en contacto con él, pero que está a una temperatura más baja. Su unidad en el SI es el joule. Otras unidades utilizadas para el calor son: la caloría (1 cal = 4.184 J) y la unidad térmica inglesa (1 Btu = 1054 J). La "Caloría" utilizada por los nutriólogos se llama "gran caloría" y es en realidad una kilocaloría (1 Cal = 1 kcal = 10^3 cal).

EL CALOR ESPECÍFICO (o *capacidad calorífica específica, c*) de una sustancia es la cantidad de calor requerida para elevar la temperatura de una unidad de masa de la sustancia en un grado.

Si ΔQ es la cantidad de calor requerido para producir un cambio en la temperatura ΔT en una masa m de sustancia, entonces:

$$c = \frac{\Delta Q}{m\,\Delta T} \quad \text{o} \quad \Delta Q = cm\,\Delta T$$

En el SI, c tiene unidades de J/kg · K, lo cual es equivalente a J/kg · °C. También se utiliza a menudo la unidad cal/g · °C, donde 1 cal/g · °C = 4184 J/kg · °C.

El calor específico es una propiedad característica de una sustancia y varía ligeramente con la temperatura. Para el agua, c = 4180 J/kg · °C = 1.00 cal/g · °C.

EL CALOR GANADO (O PERDIDO) por un cuerpo de masa m y calor específico c, cuya fase no está cambiando, se debe a un cambio de temperatura ΔT,

$$\Delta Q = mc\,\Delta T$$

EL CALOR DE FUSIÓN (H_f) de un sólido cristalino es la cantidad de calor requerido para fundir una unidad de masa de éste a temperatura constante. Esto también equivale a la cantidad de calor emitido por la unidad de masa del sólido fundido cuando se cristaliza a la misma temperatura. El calor de fusión del agua a 0 °C es aproximadamente 335 kJ/kg u 80 cal/g.

EL CALOR DE VAPORIZACIÓN (H_v) de un líquido es la cantidad de calor requerido para vaporizar una unidad de masa de éste a una temperatura constante. Para el agua a 100 °C, H_v corresponde aproximadamente a 2.26 MJ/kg o 540 cal/g.

EL CALOR DE SUBLIMACIÓN de una sustancia sólida es la cantidad de calor requerida para convertir una unidad de masa de la sustancia de sólida a gaseosa a temperatura constante.

LOS PROBLEMAS DE CALORIMETRÍA incluyen el intercambio de energía térmica entre objetos inicialmente calientes y objetos fríos. En virtud de que la energía se debe conservar, se puede escribir, como siempre, la siguiente ecuación

La suma de los cambios de calor para todos los cuerpos = 0

En este caso, el calor que fluye hacia fuera del sistema a alta temperatura ($\Delta Q_{\text{sale}} < 0$) es numéricamente igual al calor que fluye hacia adentro del sistema a baja temperatura ($\Delta Q_{\text{entra}} > 0$) y, por consiguiente, la suma es cero. Esto supone que no se pierde energía calorífica del sistema.

LA HUMEDAD ABSOLUTA es la masa de vapor de agua presente por unidad de volumen de gas (generalmente la atmósfera). Las unidades típicas son kg/m³ y g/cm³.

LA HUMEDAD RELATIVA (HR) es la relación que se obtiene al dividir la masa de vapor de agua por unidad de volumen *presente en el aire* entre la masa de vapor de agua por unidad de volumen *presente en el aire saturado, a la misma temperatura.* Cuando ésta se expresa en porcentaje, la relación anterior se multiplica por 100.

PUNTO DE ROCÍO: El aire frío saturado contiene menos agua que el aire saturado tibio. Cuando el aire se enfría, eventualmente alcanza una temperatura a la cual se satura. Esta temperatura se llama *punto de rocío.* A una temperatura más baja que ésta el agua contenida en el aire se condensa y se elimina del aire.

PROBLEMAS RESUELTOS

18.1 *a)* ¿Cuánto calor se requiere para calentar 250 mL de agua de 20.0 °C a 35.0 °C? *b)* ¿Cuánto calor pierde el agua cuando se enfría y regresa a 20.0 °C?

Ya que 250 mL de agua tienen una masa de 250 g y que $c = 1.00$ cal/g · °C para el agua, tenemos

a) $\Delta Q = mc\,\Delta T = (250\text{ g})(1.00\text{ cal/g}\cdot°\text{C})(15.0\text{ °C}) = 3.75 \times 10^3\text{ cal} = 15.7\text{ kJ}$

b) $\Delta Q = mc\,\Delta T = (250\text{ g})(1.00\text{ cal/g}\cdot°\text{C})(-15.0\text{ °C}) = -3.75 \times 10^3\text{ cal} = -15.7\text{ kJ}$

18.2 ¿Cuánto calor sale de 25 g de aluminio cuando se enfría de 100 °C a 20 °C? Para el aluminio $c = 880\ \mathrm{J/kg \cdot °C}$.

$$\Delta Q = mc\,\Delta T = (0.025\ \mathrm{kg})(880\ \mathrm{J/kg \cdot °C})(-80\ \mathrm{°C}) = -1.8\ \mathrm{kJ} = -0.42\ \mathrm{kcal}$$

18.3 Se adiciona cierta cantidad de calor a una masa de aluminio ($c = 0.21\ \mathrm{cal/g \cdot °C}$), y por consiguiente su temperatura se eleva 57 °C. Supóngase que la misma cantidad de calor se adiciona a la misma masa de cobre ($c = 0.093\ \mathrm{cal/g \cdot °C}$). ¿Cuánto se elevará la temperatura del cobre?

Dado que ΔQ es la misma para ambos, tenemos

$$mc_{\mathrm{Al}}\Delta T_{\mathrm{Al}} = mc_{\mathrm{Cu}}\,\Delta T_{\mathrm{Cu}}$$

o bien

$$\Delta T_{\mathrm{Cu}} = \left(\frac{c_{\mathrm{Al}}}{c_{\mathrm{Cu}}}\right)(\Delta T_{\mathrm{Al}}) = \left(\frac{0.21}{0.093}\right)(57\ \mathrm{°C}) = 1.3 \times 10^2\ \mathrm{°C}$$

18.4 Dos placas metálicas idénticas (masa = m, calor específico = c) tienen diferentes temperaturas; una es de 20 °C y la otra de 90 °C. Si son colocadas y hacen un buen contacto térmico, ¿cuál será su temperatura final?

En virtud de que las placas son idénticas, podríamos sugerir que la temperatura final está a la mitad del camino entre 20 °C y 90 °C; o sea, sería a 55 °C. Esto es correcto, pero debemos demostrarlo matemáticamente. De la ley de conservación de la energía, deducimos que el calor perdido por una placa debe ser igual al calor ganado por la otra. Así, *el cambio total de calor del sistema es cero.* En forma de ecuación,

$$\text{(cambio de calor de la placa caliente)} + \text{(cambio de calor de la placa fría)} = 0$$
$$mc(\Delta T)_{\text{caliente}} + mc(\Delta T)_{\text{fría}} = 0$$

Debemos tener cuidado con ΔT: esto es la temperatura final (la cual se denotará por T_f en este caso) menos la temperatura inicial. Al sustituir en la ecuación nos da

$$mc(T_f - 90\ \mathrm{°C}) + mc(T_f - 20\ \mathrm{°C}) = 0$$

Después de cancelar mc en cada término, se resuelve y se encuentra $T_f - 55$ °C, que es la respuesta esperada.

18.5 Un termo contiene 250 g de café a 90 °C. A éste se le añade 20 g de leche a 5 °C. Después de que se establece el equilibrio, ¿cuál es la temperatura del líquido? Considérese que no hay pérdidas de calor en el termo.

Tanto el agua como el café y la leche tienen el mismo valor de c, $1.00\ \mathrm{cal/g \cdot °C}$. La ley de conservación de la energía permite escribir

$$\text{(cambio de calor del café)} + \text{(cambio de calor de la leche)} = 0$$
$$(cm\,\Delta T)_{\text{café}} + (cm\,\Delta T)_{\text{leche}} = 0$$

Si la temperatura final del líquido es T_f, entonces

$$\Delta T_{\text{café}} = T_f - 90\ °\text{C} \qquad \Delta T_{\text{leche}} = T_f - 5\ °\text{C}$$

Sustituyendo y cancelando c tenemos

$$(250\ \text{g})(T_f - 90\ °\text{C}) + (20\ \text{g})(T_f - 5\ °\text{C}) = 0$$

Resolviendo nos da $T_f = 84$ °C.

18.6 Un termo contiene 150 g de agua a 4 °C. Dentro de él se colocan 90 g de metal a 100 °C. Después de que se establece el equilibrio, la temperatura del agua y el metal es de 21 °C. ¿Cuál es el calor específico del metal? Considérese que no hay pérdidas de calor en el termo.

$$(\text{cambio de calor del metal}) + (\text{cambio de calor del agua}) = 0$$

$$(cm\,\Delta T)_{\text{metal}} + (cm\,\Delta T)_{\text{agua}} = 0$$

$$c_{\text{metal}}(90\ \text{g})(-79\ °\text{C}) + (1.00\ \text{cal/g}\cdot°\text{C})(150\ \text{g})(17\ °\text{C}) = 0$$

Resolviendo nos da $c_{\text{metal}} = 0.36$ cal/g · °C. Nótese que $\Delta T_{\text{metal}} = 21 - \cancel{90} = -79$ °C.
100

18.7 Un calorímetro de 200 g de cobre contiene 150 g de aceite a 20 °C. Al aceite se le agregan 80 g de aluminio a 300 °C. ¿Cuál será la temperatura del sistema después de que se establezca el equilibrio? $c_{\text{Cu}} = 0.093$ cal/g · °C, $c_{\text{Al}} = 0.21$ cal/g · °C, $c_{\text{aceite}} = 0.37$ cal/g · °C.

$$(\text{cambio de calor del aluminio}) + (\text{cambio de calor del calorímetro y el aceite}) = 0$$

$$(cm\,\Delta T)_{\text{aluminio}} + (cm\,\Delta T)_{\text{cobre}} + (cm\,\Delta T)_{\text{aceite}} = 0$$

Sustituyendo los datos se obtiene

$$\left(0.21\,\frac{\text{cal}}{\text{g}\cdot°\text{C}}\right)(80\ \text{g})(T_f - 300\ °\text{C}) + \left(0.093\,\frac{\text{cal}}{\text{g}\cdot°\text{C}}\right)(200\text{g})(T_f - 20\ °\text{C})$$

$$+\left(0.37\,\frac{\text{cal}}{\text{g}\cdot°\text{C}}\right)(150\ \text{g})(T_f - 20\ °\text{C}) = 0$$

Resolviendo obtenemos $T_f = 72$ °C.

18.8 Dentro de un calorímetro de cobre, se quemaron exactamente 3.0 g de carbón y se convirtieron en CO_2. La masa del calorímetro es de 1500 g y contiene 2000 g de agua. Si la temperatura inicial fue de 20 °C y la temperatura final es de 31 °C, calcúlese el calor que proporciona cada gramo de carbón. $c_{\text{Cu}} = 0.093$ cal/g · °C. Despréciese la pequeña capacidad calorífica del carbón y del dióxido de carbón.

La ley de conservación de la energía nos dice que

(cambio de calor del carbón) + (cambio de calor del calorímetro) + (cambio de calor del agua) = 0

(cambio de calor del carbón) + (0.093 cal/g · °C)(1500 g)(11 °C) + (1 cal/g · °C)(2000 g)(11 °C) = 0

(cambio de calor del carbón) = – 23 500 cal

Por lo tanto, el calor generado por cada gramo de carbón quemado es

$$\frac{23\,500\ \text{cal}}{3.0\ \text{g}} = 7.8\ \text{kcal/g}$$

18.9 Determínese la temperatura resultante T_f cuando se mezclan 150 g de hielo a 0 °C con 300 g de agua a 50 °C.

De la conservación de la energía, se tiene

(cambio de calor del hielo) + (cambio de calor del agua) = 0

(calor de fusión del hielo) + (cambio de calor de hielo fundido) + (cambio de calor del agua) = 0

$$(mH_f)_{\text{hielo}} + (cm\,\Delta T)_{\text{hielo fundido}} + (cm\,\Delta T)_{\text{agua}} = 0$$

$$(150\ \text{g})(80\ \text{cal/g}) + (1.00\ \text{cal/g}\cdot{}^\circ\text{C})(150\ \text{g})(T_f - 0\ {}^\circ\text{C}) + (1.00\ \text{cal/g}\cdot{}^\circ\text{C})(300\ \text{g})(T_f - 50\ {}^\circ\text{C}) = 0$$

de donde $T_f = 6.7$ °C.

18.10 ¿Cuánto calor se entrega cuando 20 g de vapor a 100 °C se condensan y se enfrían a 20 °C?

Cambio de calor = (cambio de calor por condensación) + (cambio de calor del agua durante el enfriamiento)

$$= mH_v + cm\,\Delta T$$

$$= (20\ \text{g})(-540\ \text{cal/g}) + (1.00\ \text{cal/g}\cdot{}^\circ\text{C})(20\ \text{g})(20\ {}^\circ\text{C} - 100\ {}^\circ\text{C})$$

$$= -12\,400\ \text{cal} = -12\ \text{kcal}$$

18.11 Una pieza de aluminio de 20 g ($c = 0.21$ cal/g · °C) a 90 °C se deja caer dentro de una cavidad, en un gran bloque de hielo a 0 °C. ¿Cuánto hielo fundirá el aluminio?

(Cambio de calor del aluminio cuando se enfría a 0 °C) + (cambio de calor de la masa de hielo fundido) = 0

$$(mc\,\Delta T)_{\text{aluminio}} + (H_f m)_{\text{hielo}} = 0$$

$$(20\ \text{g})(0.21\ \text{cal/g}\cdot{}^\circ\text{C})(0\ {}^\circ\text{C} - 90\ {}^\circ\text{C}) + (80\ \text{cal/g})m = 0$$

Por lo cual, la cantidad de hielo fundido es $m = 4.7$ g.

18.12 En un calorímetro (equivalente de agua = 40 g) hay 200 g de agua y 50 g de hielo, todo a 0 °C. Dentro de él se vacían 30 g de agua a 90 °C. ¿Cuáles serán las condiciones finales del sistema?

Para resolver el problema se supondrá (tal vez incorrectamente) que la temperatura final es $T_f > 0$ °C. Entonces

$$\begin{pmatrix}\text{Cambio de calor}\\ \text{de agua caliente}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Calor al hielo}\\ \text{fundido}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Calor para calentar}\\ \text{250 g de agua}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Calor para calentar}\\ \text{el calorímetro}\end{pmatrix} = 0$$

$c m \Delta T$ $H_f m$ $c m \Delta T$ $c m \Delta T$

$$(30\text{ g})(1.00\text{ cal/g}\cdot{}^\circ\text{C})(T_f - 90\text{ °C}) + (50\text{ g})(80\text{ cal/g}) + (250\text{ g})(1.00\text{ cal/g}\cdot{}^\circ\text{C})(T_f - 0\text{ °C})$$

$$+ (40\text{ g})(1.00\text{ cal/g}\cdot{}^\circ\text{C})(T_f - 0\text{ °C}) = 0$$

Al resolver encontramos que $T_f = -4.1$ °C, contrariamente a nuestra suposición inicial de que la temperatura final era mayor que 0 °C. Al parecer no todo el hielo se funde. Por consiguiente $T_f = 0$ °C.

Para encontrar cuánto hielo se funde, se tiene que

$$\text{Calor perdido por el agua caliente} = \text{calor ganado por el hielo fundente}$$

$$(30\text{ g})(1.00\text{ cal/g}\cdot{}^\circ\text{C})(90\text{ °C}) = (80\text{ cal/g})m$$

donde m es la masa del hielo que se funde. Al despejar, se encuentra que $m = 34$ g. El sistema final tiene 50 g − 34 g = 16 g de hielo que no se fundió.

18.13 Un calentador eléctrico que produce 900 W de potencia es utilizado para vaporizar agua. ¿Cuánto líquido a 100 °C puede ser trasformado a vapor en 3.00 min por el calentador? (Para el agua a 100 °C, $H_v = 2.26 \times 10^6$ J/kg.)

El calentador produce 900 J de energía calorífica por segundo. El calor producido en 3.00 min es

$$\Delta Q = (900\text{ J/s})(180\text{ s}) = 162\text{ kJ}$$

El calor requerido para vaporizar una masa m de agua es

$$\Delta Q = mH_v = m(2.26 \times 10^6\text{ J/kg})$$

Igualando estas dos expresiones para ΔQ y resolviendo para m obtenemos $m = 0.0717$ kg = 71.7 g como la masa de agua vaporizada.

18.14 Una bala de 3.00 g ($c = 0.0305$ cal/g · °C = 128 J/kg · °C) que se mueve a 180 m/s penetra en una bolsa de arena y se detiene. ¿Cuál es el incremento en la temperatura de la bala si toda su energía cinética se trasforma en calor, el cual es absorbido por la bala?

La energía cinética perdida por la bala es

$$\text{EC} = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(3.00 \times 10^{-3}\text{ kg})(180\text{ m/s})^2 = 48.6\text{ J}$$

El calor absorbido por la bala será, entonces, $\Delta Q = 48.6$ J. Ya que $\Delta Q = mc\,\Delta T$ podemos determinar ΔT para la bala como:

$$\Delta T = \frac{\Delta Q}{mc} = \frac{48.6\,\text{J}}{(3.00 \times 10^{-3}\,\text{kg})(128\,\text{J/kg}\cdot{}^\circ\text{C})} = 127\,^\circ\text{C}$$

Nótese que se utilizó c en J/kg · °C y no en cal/g · °C.

18.15 Supóngase que una persona de 60 kg consume 2500 Cal en comida durante un día. Si el equivalente total de calor de este alimento fuese retenido por el cuerpo de la persona, ¿cuál sería el cambio en temperatura que le ocasionaría? (Para el cuerpo, $c = 0.83$ cal/g · °C.) Recuerde que 1 Cal = 1 kcal = 1000 cal.

El calor absorbido por el cuerpo en un día es

$$\Delta Q = (2500\,\text{Cal})(1000\,\text{cal/Cal}) = 2.5 \times 10^6\,\text{cal}$$

Entonces, utilizando $\Delta Q = mc\,\Delta T$,

$$\Delta T = \frac{\Delta Q}{mc} = \frac{2.5 \times 10^6\,\text{cal}}{(60 \times 10^3\,\text{g})(0.83\,\text{cal/g}\cdot{}^\circ\text{C})} = 50\,^\circ\text{C}$$

18.16 Un termómetro que se encuentra en un cuarto de 10 m × 8.0 m × 4.0 m registra una lectura de 22 °C y un higrómetro señala una H.R. de 35%. ¿Qué masa de vapor de agua hay en el cuarto? El aire saturado a 22 °C contiene 19.33 g H_2O/m^3.

$$\%\text{H.R.} = \frac{\text{masa de agua/m}^3}{\text{masa de agua/m}^3\text{ de aire saturado}} \times 100$$

$$35 = \frac{\text{masa/m}^3}{0.019\,33\,\text{kg/m}^3} \times 100$$

de donde la masa/m³ = 6.77×10^{-3} kg/m³. Pero el cuarto en cuestión tiene un volumen de 10 m × 8.0 m × 4.0 m = 320 m³. Por lo tanto, la masa total de agua en el cuarto es

$$(320\,\text{m}^3)(6.77 \times 10^{-3}\,\text{kg/m}^3) = 2.2\,\text{kg}$$

18.17 En cierto día, cuando la temperatura es de 28 °C, se forma humedad en la parte exterior de un vaso que contiene una bebida fría. Si la temperatura de la bebida es de 16 °C o menos, ¿cuál es la humedad relativa ese día? El aire saturado a 28 °C contiene 26.93 g/m³ de agua, mientras que a 16 °C contiene 13.50 g/m³.

El rocío se forma a una temperatura de 16 °C o menos, por lo que el punto de rocío es 16 °C. El aire está saturado a esa temperatura y por lo tanto contiene 13.50 g/m³. Entonces,

$$\text{H.R.} = \frac{\text{masa presente/m}^3}{\text{masa/m}^3\text{ en aire saturado}} = \frac{13.50}{26.93} = 0.50 = 50\%$$

18.18 El aire del ambiente a 5 °C y 20% de humedad relativa se introduce en un calentador y acondicionador de aire donde se calienta a 20 °C y la humedad relativa se incrementa a un confortable 50%. ¿Cuántos gramos de agua deben evaporarse dentro de un metro cúbico de aire ambiental para acondicionarlo? El aire saturado a 5 °C contiene 6.8 g/m³ de agua, y a 20 °C contiene 17.3 g/m³.

$$\text{Masa/m}^3 \text{ de vapor de agua en el aire a 5 °C} = 0.20 \times 6.8 \text{ g/m}^3 = 1.36 \text{ g/m}^3$$

$$\text{Masa confortable/m}^3 \text{ a 20 °C} = 0.50 \times 17.3 \text{ g/m}^3 = 8.65 \text{ g/m}^3$$

$$1 \text{ m}^3 \text{ de aire a 5 °C se expande a } (293/278) \text{ m}^3 = 1.054 \text{ m}^3 \text{ a 20 °C}$$

$$\text{La masa de vapor de agua en } 1.054 \text{ m}^3 \text{ a 20 °C} = 1.054 \text{ m}^3 \times 8.65 \text{ g/m}^3 = 9.12 \text{ g}$$

$$\text{La masa de vapor de agua que se agregó a cada m}^3 \text{ de aire a 5 °C} = (9.12 - 1.36) \text{ g} = 7.8 \text{ g}$$

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

18.19 ¿Cuántas calorías son necesarias para calentar de 15 °C a 65 °C cada una de las siguientes sustancias? *a*) 3.0 g de aluminio, *b*) 5.0 g de vidrio pyrex, *c*) 20 g de platino. El calor específico, en cal/g · °C, para el aluminio, el vidrio pyrex y el platino son 0.21, 0.20, 0.032 respectivamente. *Resp.* *a*) 32 cal; *b*) 50 cal; *c*) 32 cal

18.20 Cuando 5.0 g de cierto tipo de carbón son quemados, la temperatura de 1000 mL de agua se incrementa de 10 °C a 47 °C. Determínese el calor producido por cada gramo de carbón. Despréciese la pequeña capacidad calorífica del carbón. *Resp.* 7.4 kcal/g

18.21 El aceite de una caldera tiene un calor de combustión de 44 MJ/kg. Suponiendo que el 70% del calor producido es aprovechado, ¿cuántos kilogramos de aceite son requeridos para calentar 2000 kg de agua desde 20 °C hasta 99 °C? *Resp.* 22 kg

18.22 ¿Cuál es la temperatura final si a 50 g de agua a 0 °C se le agregan 250 g de agua a 90 °C? *Resp.* 75 °C

18.23 Una pieza de metal de 50 g, a 95 °C, se deja caer dentro de 250 g de agua a 17.0 °C y su temperatura se incrementa hasta 19.4 °C. ¿Cuál es el calor específico del metal? *Resp.* 0.16 cal/g · °C

18.24 ¿Cuánto tiempo le tomará a un calentador de 2.50 W evaporar completamente 400 g de helio líquido, el cual se encuentra en su punto de evaporación (4.2 K)? Para el helio, $H_v = 5.0$ cal/g. *Resp.* 56 min

18.25 Un calorímetro de cobre de 55 g ($c = 0.093$ cal/g · °C) contiene 250 g de agua a 18.0 °C. Cuando se dejan caer dentro del calorímetro 75 g de una aleación a 100 °C, la temperatura final es de 20.4 °C ¿Cuál es el calor específico de la aleación? *Resp.* 0.10 cal/g · °C

18.26 Determínese la temperatura final cuando se mezcla 1.0 kg de hielo a exactamente 0 °C con 9.0 kg de agua a 50 °C. *Resp.* 37 °C

18.27 ¿Cuánto calor es necesario para cambiar 10 g de hielo a 0 °C a vapor a una temperatura de 100 °C? *Resp.* 7.2 kcal

18.28 Diez kilogramos de vapor a 100 °C son condensados en 500 kg de agua a 40.0 °C. ¿Cuál es la temperatura resultante? *Resp.* 51.8 °C

18.29 El calor de combustión del gas etano es de 373 kcal/mol. Suponiendo que el 60.0% del calor es utilizable, ¿cuántos litros de etano, en condiciones de presión y temperatura estándar, deben quemarse para convertir 50.0 kg de agua a 10.0 °C, en vapor a 100.0 °C? Una mol de gas ocupa 22.4 litros a 0 °C y 1 atm. *Resp.* 3.15×10^3 litros

18.30 Calcúlese el calor de fusión del hielo a partir de los siguientes datos para el hielo a 0 °C que se agrega al agua:

Masa del calorímetro	60 g
Masa del calorímetro más agua	460 g
Masa del calorímetro más agua más hielo	618 g
Temperatura inicial del agua	38.0 °C
Temperatura final de la mezcla	5.0 °C
Calor específico del calorímetro	0.10 cal/g · °C

Resp. 80 cal/g

18.31 Determínese el resultado final cuando en un calorímetro, cuyo equivalente de agua es de 30 g, se tienen 200 g de agua y 20 g de hielo a 0 °C y se hacen pasar 100 g de vapor a 100 °C dentro de él. *Resp.* 49 g de vapor condensado; temperatura final de 100 °C

18.32 Determínese el resultado final cuando se pasan 10 g de vapor a 100 °C a través de 400 g de agua y 100 g de hielo contenidos en un calorímetro cuyo equivalente de agua es de 50 g. *Resp.* 80 g de hielo fundido, temperatura final 0 °C

18.33 Supóngase que una persona que ingiere comida equivalente a 2500 Cal por día pierde esta cantidad en calor a través de la evaporación del agua de su cuerpo. ¿Cuánta agua se vaporiza al día? A la temperatura del cuerpo, para el agua $H_v = 600$ cal/g. *Resp.* 4.17 kg

18.34 ¿Cuánto tiempo le tomará a un calentador de 500 W elevar la temperatura de 15 °C hasta 98 °C a 400 g de agua? *Resp.* 278 s

18.35 Un taladro cuya potencia es de 0.250 hp ocasiona que una broca de acero de 50.0 g se caliente al realizar un agujero en un bloque de madera dura. Suponiendo que el 75.0% de la energía perdida por fricción provoca el calentamiento de la broca, ¿cuál sería el incremento de su temperatura al cabo de 20.0 s? Para el acero, $c = 450$ J/kg · °C. *Resp.* 124 °C

18.36 En un cierto día, la temperatura es de 20 °C y el punto de rocío es de 5.0 °C. ¿Cuál es la humedad relativa? El aire saturado a 20 °C y a 5.0 °C contiene 17.12 y 6.80 g/m^3 de agua, respectivamente. *Resp.* 40%

18.37 ¿Qué cantidad de vapor de agua existe en un cuarto de 105 m^3 en un día en que la humedad relativa en el cuarto es de 32% y su temperatura es de 20 °C? El aire saturado a 20 °C contiene 17.12 g/m^3 de agua. *Resp.* 58 g

18.38 El aire a 30 °C y 90% de humedad relativa se hace circular en una unidad de aire acondicionado y se enfría a 20 °C. La humedad relativa se reduce simultáneamente a 50%. ¿Cuántos gramos de agua se eliminan de un metro cúbico de aire a 30 °C por el acondicionador? El aire saturado contiene 30.4 g/m^3 y 17.1 g/m^3 de agua a 30 °C y 20 °C respectivamente. *Resp.* 19 g

capítulo 19

Transferencia de energía calorífica

LA ENERGÍA CALORÍFICA SE TRANSMITE por *conducción, convección y radiación.* Recuérdese que el calor es la energía transferida de un sistema a una temperatura más elevada hacia un sistema a una temperatura más baja (con el cual está en contacto), a través de las colisiones de sus partículas constituyentes.

LA CONDUCCIÓN ocurre cuando la energía calorífica pasa a través de un material como resultado de las colisiones entre las moléculas del mismo. Cuanto más caliente esté un material, mayor será la EC promedio de sus moléculas. Cuando existe una diferencia de temperatura entre materiales que están en contacto, las moléculas con mayor energía en la sustancia que se encuentra más caliente transferirán energía a las moléculas con menor energía en la sustancia más fría debido a las colisiones moleculares que ocurren entre las dos sustancias. Entonces la energía calorífica fluye de lo caliente a lo frío.

Considere una losa (plancha) de material como se muestra en la Fig. 19-1. De espesor L, y área A en la sección transversal. Las temperaturas en las dos caras son T_1 y T_2, de tal forma que la diferencia de temperatura a través de la losa es $\Delta T = T_1 - T_2$. A la cantidad $\Delta T/L$ se le llama *gradiente de temperatura.* Ésta es la razón de cambio de la temperatura con la distancia.

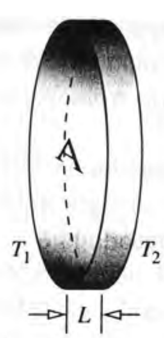


Fig. 19-1

La cantidad de calor ΔQ transmitida de la cara 1 a la cara 2 en un tiempo Δt está dada por

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = k_T A \frac{\Delta T}{L}$$

donde k_T depende de las propiedades del material de la losa y se le llama *conductividad térmica* del material. En el SI, k_T tiene unidades de $W/m \cdot K$, y $\Delta Q/\Delta t$ está en J/s (es decir, W). Otras unidades que con frecuencia se utilizan para expresar a k_T están relacionadas con $W/m \cdot K$ de la siguiente manera

$$1 \text{ cal/s} \cdot \text{cm} \cdot {}^\circ\text{C} = 418.4 \text{ W/m} \cdot \text{K} \quad \text{y} \quad 1 \text{ Btu} \cdot \text{pulg/h} \cdot \text{pie}^2 \cdot {}^\circ\text{F} = 0.144 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

LA RESISTENCIA TÉRMICA (o *valor R*) de una losa se define por la ecuación de flujo de calor de la siguiente forma

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{A\,\Delta T}{R} \quad \text{donde} \quad R = \frac{L}{k_T}$$

Sus unidades en el SI son $m^2 \cdot K/W$. Las unidades más comunes son $\text{pie}^2 \cdot h \cdot {}^\circ F/\text{Btu}$, donde $1 \text{ pie}^2 \cdot h \cdot {}^\circ F/\text{Btu} = 0.176 \text{ m}^2 \cdot K/W$. (Es posible que tenga la ocasión de confundir el símbolo R con el símbolo de la constante universal de los gases.)

Si tenemos varias losas que están en contacto entre sí (combinación en serie) con la misma área en sus caras laterales, el valor R de la combinación estará dado por

$$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_N$$

donde $R_1,\ldots,$ son los valores de R de cada una de las losas.

LA CONVECCIÓN de la energía calorífica ocurre cuando un material caliente se transporta de tal forma que desplaza a un material frío. Ejemplos típicos son el flujo de aire caliente desde una plancha en un sistema de calentamiento y el flujo de agua templada de la Corriente del Golfo.

LA RADIACIÓN es la forma en que se traslada la energía calorífica a través del vacío y el espacio libre entre moléculas. La energía radiante es distinta del calor, aun cuando ambos corresponden a energía en tránsito. El calor es calor; la radiación electromagnética es radiación electromagnética; no deben confundirse.

Un *cuerpo negro* es un cuerpo que absorbe toda la energía radiante que incide sobre él. En equilibrio térmico un cuerpo emite una cantidad de energía igual a la que absorbe. Por tanto, un buen captador de radiación es también un buen emisor de radiación.

Suponga que una superficie de área A tiene una temperatura absoluta T y radia sólo una fracción ϵ de la energía que emitiría una superficie negra. La cantidad ϵ se llama *emisividad* de la superficie, y la energía emitida por ésta en un segundo está dada por la ley de *Stefan-Boltzmann*

$$P = \epsilon A \sigma T^4$$

donde $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ W/m$^2 \cdot$ K^4 es la *constante de Stefan-Boltzmann*, y T la temperatura absoluta. La emisividad de un cuerpo negro es igual a la unidad.

Todos los cuerpos cuya temperatura está arriba del cero absoluto radian energía. Cuando un objeto con una temperatura absoluta T está en una región donde la temperatura es T_0, la energía neta radiada en un segundo por el cuerpo es

$$P = \epsilon A\sigma(T^4 - T_0^4)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

19.1 Una placa de hierro de 2 cm de espesor tiene un área de 5000 cm^2 en su sección transversal. Una de las caras está a 150 °C y la otra está a 140 °C. ¿Cuánto calor fluye a través de la placa en cada segundo? Para el hierro, $k_T = 80$ W/m · K.

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = k_T A\frac{\Delta T}{L} = (80\ \mathrm{W/m \cdot K})(0.50\ \mathrm{m^2})\left(\frac{10\ ^\circ\mathrm{C}}{0.02\ \mathrm{m}}\right) = 20\ \mathrm{kJ/s}$$

19.2 Una placa de metal de 4.00 mm de espesor tiene una diferencia de temperatura entre sus dos caras de 32.0 °C. Transmite una energía calorífica de 200 kcal/h a través de un área de 5.00 cm^2. Calcular la conductividad térmica del metal en W/m · K.

$$k_T = \frac{\Delta Q}{\Delta t}\frac{L}{A(T_1 - T_2)} = \frac{(2.00 \times 10^5\ \mathrm{cal})(4.184\ \mathrm{J/cal})}{(1.00\ \mathrm{h})(3600\ \mathrm{s/h})}\frac{4.00 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}}{(5.00 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^2})(32.0\ \mathrm{K})}$$
$$= 58.5\ \mathrm{W/m \cdot K}$$

19.3 Dos placas de metal están soldadas una a la otra como se muestra en la Fig. 19-2. Se sabe que $A = 80$ cm^2, $L_1 = L_2 = 3.0$ mm, $T_1 = 100$ °C, $T_2 = 0$ °C. Para la placa de la izquierda, $k_{T1} =$ 48.1 W/m · K; y para la placa de la derecha, $k_{T2} = 68.2$ W/m · K. Calcular la razón de flujo de calor a través de las placas y la temperatura T del empalme soldado.

Suponemos condiciones de equilibrio de tal forma que el flujo de calor a través de la placa 1 es igual al flujo de calor a través de la placa 2. Entonces

$$k_{T1}A\frac{T_1 - T}{L_1} = k_{T2}A\frac{T - T_2}{L_2}$$

Pero $L_1 = L_2$, así que se convierte en

$$k_{T1}(100\ ^\circ\mathrm{C} - T) = k_{T2}(T - 0\ ^\circ\mathrm{C})$$

de donde

$$T = (100\ ^\circ\mathrm{C})\left(\frac{k_{T1}}{k_{T1} + k_{T2}}\right) = (100\ ^\circ\mathrm{C})\left(\frac{48.1}{48.1 + 68.2}\right) = 41.4\ ^\circ\mathrm{C}$$

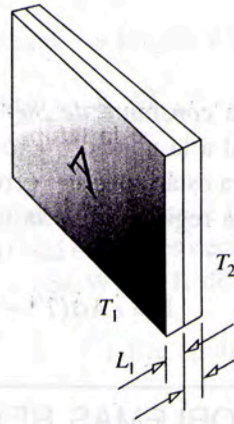


Fig. 19-2

Entonces, la razón de flujo de calor es

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = k_{T1}A\,\frac{T_1 - T}{L_1} = \left(48.1\,\frac{W}{m\cdot K}\right)(0.008\,0\;m^2)\,\frac{(100-41.4)K}{0.003\,0\;m} = 7.5\;kJ/s$$

19.4 Un refrigerador para refrescos tiene la forma de un cubo de 42 cm de longitud en cada arista. Sus paredes son de un espesor de 3.0 cm y están hechas de plástico ($k_T = 0.050$ W/m · K). Cuando la temperatura exterior es de 20 °C, ¿cuánto hielo se derrite dentro del refrigerador cada hora?

La caja cúbica tiene seis caras, cada una con un área de aproximadamente $(0.42\;m)^2$. Entonces, de la ecuación $\Delta Q/\Delta t = k_T A\,\Delta T/L$ se tiene, cuando el hielo en el interior está a 0 °C

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = (0.050\;W/m\cdot k)(0.42\;m)^2(6)\left(\frac{20\;°C}{0.030\;m}\right) = 35.3\;J/s = 8.43\;cal/s$$

En una hora, $\Delta Q = (60)^2(8.43) = 30\,350$ cal. Para derretir 1.0 g de hielo se requieren 80 cal, así que la masa de hielo disuelta en una hora es

$$m = \frac{30\,350\;cal}{80\;cal/g} = 0.38\;kg$$

19.5 Un tubo de cobre (longitud, 3.0 m; diámetro interior, 1.500 cm; diámetro exterior, 1.700 cm) se encuentra en un estanque por el cual circula agua rápidamente y que se mantiene a una temperatura de 20 °C. Por el interior del tubo circula vapor de agua a 100 °C. *a*) ¿Cuál es la razón de flujo de calor desde el vapor hasta el tanque? *b*) ¿Cuánto vapor se condensa por minuto? Para el cobre, $k_T = 1.0$ cal/s · cm · °C.

Como el espesor del tubo es mucho más pequeño que su radio, el área de la superficie interior del tubo,

$$2\pi r_i L = 2\pi(0.750 \text{ cm})(300 \text{ cm}) = 1410 \text{ cm}^2$$

aproximadamente igual al área de la superficie exterior,

$$2\pi r_o L = 2\pi(0.850 \text{ cm})(300 \text{ cm}) = 1600 \text{ cm}^2$$

Como una aproximación, podemos considerar al tubo como una placa de espesor 0.100 cm y un área dada por

$$A = \tfrac{1}{2}(1410 \text{ cm}^2 + 1600 \text{ cm}^2) = 1500 \text{ cm}^2$$

a) $$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = k_T A \frac{\Delta T}{L} = \left(0.1 \frac{\text{cal}}{\text{s} \cdot \text{cm} \cdot {}^\circ\text{C}}\right) \frac{(1500 \text{ cm}^2)(80\,{}^\circ\text{C})}{(0.100 \text{ cm})} = 1.2 \times 10^6 \text{ cal/s}$$

b) En un minuto, el calor conducido a través del tubo es

$$\Delta Q = (1.2 \times 10^6 \text{ cal/s})(60 \text{ s}) = 72 \times 10^6 \text{ cal}$$

Para condensar 1.0 g de vapor a 100 °C se requieren 540 cal. Por tanto

$$\text{Vapor condensado por minuto} = \frac{72 \times 10^6 \text{ cal}}{540 \text{ cal/g}} = 13.3 \times 10^4 \text{ g} = 1.3 \times 10^2 \text{ kg}$$

En la práctica, varios factores reducirán en mucho este valor teórico.

19.6 *a)* Calcular el valor R para una pared constituida por las siguientes capas: bloque de concreto ($R = 1.93$), una tabla de aislante de 1.0 pulgada ($R = 4.3$), una pared de tipo seco de 0.50 pulgadas ($R = 0.45$). Considérese todo como una sola unidad. *b)* Si la pared tiene un área de 15 m², calcular el flujo de calor por hora a través de la pared cuando la temperatura en el exterior es exactamente 20 °C menor que la del interior.

a) $$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_N = 1.93 + 4.3 + 0.45 = 6.7$$

para expresarlo en sus unidades, utilizamos el hecho de que 1 unidad de resistencia térmica = 0.176 $\text{m}^2 \cdot \text{K/W}$, de donde obtenemos que $R = 1.18 \text{ m}^2 \cdot \text{K/W}$.

b) $$\Delta Q = \frac{A \Delta T}{R}(\Delta t) = \frac{(15 \text{ m}^2)(20\,{}^\circ\text{C})}{1.18 \text{ m}^2 \cdot \text{K/W}}(3600 \text{ s}) = 0.915 \text{ MJ} = 2.2 \times 10^2 \text{ kcal}$$

19.7 Un cuerpo esférico de 2.0 cm de diámetro se mantiene a 600 °C. Suponiendo que emite radiación como si fuera un cuerpo negro, ¿con qué rapidez es radiada la energía desde la esfera?

$$A = \text{área de la superficie} = 4\pi r^2 = 4\pi(0.01 \text{ m})^2 = 1.26 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$\text{P} = A\sigma T^4 = (1.26 \times 10^{-3} \text{ m}^2)(5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4)(873 \text{ K})^4 = 41 \text{ W}$$

19.8 Una persona desnuda cuyo cuerpo tiene un área superficial de 1.40 m^2 con una emisividad de 0.85 tiene una temperatura en la piel de 37 °C y está parada en un cuarto donde hay una temperatura de 20 °C. ¿Cuánto calor pierde la persona por minuto?

De la ecuación, $P = \epsilon A\sigma(T^4 - T_0^4)$ tenemos

$$\epsilon A\sigma(T^4 - T_0^4)\,\Delta t = (0.85)(1.40\ \text{m}^2)(\sigma)(T^4 - T_0^4)(60\ \text{s})$$

Utilizando $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ W/m$^2 \cdot$ K^4, $T = 273 + 37 = 310$ K, y $T_0 = 273 + 20 = 293$ K se obtiene

$$7.6\ \text{kJ} = 1.8\ \text{kcal}$$

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

19.9 ¿Qué gradiente de temperatura debe existir en una barra de aluminio para que transmita 8.0 cal por segundo por cm^2 de sección tranversal a lo largo de la barra? k_T para el aluminio es 210 W/K · m. *Resp.* 16 °C/cm

19.10 En una casa, el vidrio de una ventana tiene en realidad capas de aire estancado en sus dos superficies. Pero si no existieran, ¿cuánto calor fluiría hacia afuera por la ventana de 80 cm × 40 cm × 3.0 mm cada hora, en un día en el cual la temperatura exterior fuera de 0 °C y la del interior de 18 °C? Para el vidrio, k_T es 0.84 W/K · m. *Resp.* 1.4×10^3 kcal/h

19.11 ¿Cuántos gramos de agua a 100 °C se pueden evaporar por hora por cm^2 debido al calor transmitido a través de una placa de acero de 0.20 cm de espesor, si la diferencia de temperatura entre las caras de la placa es de 100 °C? Para el acero, k_T es 42 W/K · m. *Resp.* 0.33 kg/h · cm^2

19.12 Una ventana de doble bastidor consiste de dos hojas de vidrio, cada una de 80 cm × 80 cm × 0.30 cm, separadas por 0.30 cm de aire estancado. La temperatura de la superficie interior es de 20 °C, mientras que la temperatura de la superficie exterior es de 0 °C. ¿Cuánto calor fluye a través la ventana por segundo? $k_T = 0.84$ W/K · m para el vidrio y aproximadamente 0.080 W/K · m para el aire. *Resp.* 69 cal/s

19.13 Un agujero pequeño en un horno actúa como un cuerpo negro. (¿Por qué?) Su área es de 1.00 cm^2 y su temperatura es la misma que la del interior del horno, 1727 °C. ¿Cuántas calorías se radian hacia fuera del agujero en cada segundo? *Resp.* 21.7 cal/s

19.14 El filamento de una lámpara incandescente tiene un área de 50 mm^2 y opera a una temperatura de 2127 °C. Suponga que toda la energía suministrada al tubo es radiada por él. Si la emisividad del filamento es 0.83, ¿qué potencia se debe suministrar al tubo cuando está operando? *Resp.* 78 W

19.15 Una esfera de 3.0 cm de radio actúa como un cuerpo negro. Está en equilibrio con sus alrededores y absorbe 30 kW de la potencia radiada por los alrededores. ¿Cuál es la temperatura de la esfera? *Resp.* 2.6×10^3 K

19.16 Una placa de bronce de 2.0 cm de espesor ($k_T = 105$ W/K · m) está sellada a una hoja de vidrio ($k_T = 0.80$ W/K · m). Ambas tienen la misma área. La cara expuesta de la placa de bronce está a 80 °C, mientras que la cara expuesta del vidrio está a 20 °C. ¿Cuál es el espesor del vidrio si la interfase vidrio-bronce está a 65 °C? *Resp.* 0.46 mm

capítulo 20

Primera ley de la termodinámica

ENERGÍA TÉRMICA (ΔQ) es la energía que fluye de un cuerpo a otro cuerpo debido a la diferencia de sus temperaturas. El calor siempre fluye del cuerpo más caliente al más frío. Dos objetos que están en equilibrio térmico (es decir, cuando no hay transferencia neta de calor de uno a otro) tienen la misma temperatura. Si cada uno de estos dos cuerpos está en equilibrio térmico con un tercero, entonces se encuentran en equilibrio térmico entre sí. (Este hecho con frecuencia se expresa como *ley cero* de la termodinámica.)

LA ENERGÍA INTERNA (U) de un sistema es la energía total contenida en el sistema. Es la suma de las energías cinética, potencial, química, eléctrica, nuclear y todas las otras formas de energía que poseen los átomos y moléculas del sistema.

EL TRABAJO EFECTUADO POR UN SISTEMA (ΔW) es positivo si el sistema pierde energía al realizarlo y por ello la cede a sus alrededores. Cuando los alrededores efectúan trabajo sobre el sistema, de modo que le proporcionan energía, entonces ΔW es una cantidad negativa. En una pequeña expansión ΔV, un fluido a presión P constante efectúa un trabajo dado por

$$\Delta W = P\Delta V$$

LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA es un enunciado de la ley de la conservación de la energía. Establece que si una cantidad de energía térmica ΔQ fluye dentro de un sistema, entonces ésta debe aparecer como un incremento de la energía interna ΔU del sistema y/o como un trabajo ΔW efectuado *por* el sistema sobre sus alrededores. Representada en una ecuación, la primera ley es

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W$$

UN PROCESO ISOBÁRICO es un proceso que se realiza a presión constante.

UN PROCESO ISOVOLUMÉTRICO (ISOCÓRICO) es un proceso que se realiza a volumen constante. Cuando un gas experimenta dicho proceso,

$$\Delta W = P\,\Delta V = 0$$

y así la primera ley de la termodinámica se vuelve

$$\Delta Q = \Delta U$$

Cualquier cantidad de calor que fluya dentro del sistema aparece como un incremento en la energía interna del sistema.

UN PROCESO ISOTÉRMICO es un proceso a temperatura constante. En el caso de un gas ideal, en donde los átomos o moléculas que lo constituyen no interactúan por estar muy separados, $\Delta U = 0$ en un proceso isotérmico. Sin embargo, para muchos otros sistemas esta condición no se cumple. Por ejemplo, $\Delta U \pm 0$ cuando el hielo se funde a 0 °C, aun cuando el proceso es isotérmico.

Para un gas ideal, $\Delta U = 0$ en un cambio isotérmico y por consiguiente la primera ley de termodinámica es

$$\Delta Q = \Delta W \qquad \text{(gas ideal)}$$

También es cierto que para un gas ideal que cambia de (P_1, V_1) a (P_2, V_2), donde $P_1V_1 = P_2V_2$,

$$\Delta Q = \Delta W = P_1\,V_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 2.30\,P_1\,V_1 \log\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Aquí, ln y log son logaritmos de base e y de base 10, respectivamente.

UN PROCESO ADIABÁTICO es aquél en el cual no se transfiere calor hacia o desde el sistema. Para este caso, $\Delta Q = 0$. Por consiguiente, en un proceso adiabático, la primera ley queda:

$$0 = \Delta U + \Delta W$$

Cualquier trabajo que el sistema realice se efectúa a expensas de su energía interna. Cualquier trabajo que se lleve a cabo sobre el sistema sirve para incrementar su energía interna.

Para un gas ideal que cambia sus condiciones de (P_1, V_1, T_1) a (P_2, V_2, T_2) en un proceso adiabático,

$$P_1\,V_1^{\gamma} = P_2\,V_2^{\gamma} \quad \text{y} \quad T_1\,V_1^{\gamma-1} = T_2\,V_2^{\gamma-1}$$

donde $\gamma = c_p/c_v$ se analiza más adelante.

EL CALOR ESPECÍFICO DE LOS GASES: Cuando un gas se calienta *a volumen constante*, toda la energía térmica que se suministra se traduce en un incremento de la energía interna de las moléculas del gas. Pero cuando un gas se calienta a *presión constante*, el calor suministrado no sólo incrementa la energía interna de las moléculas, sino que también efectúa trabajo mecánico en la expansión del gas contra la presión constante que se le opone. De aquí que el calor específico de un gas a presión constante, c_p, sea mayor que su calor específico a volumen constante, c_v. Puede demostrarse que, para un gas ideal de masa molecular M,

$$c_p - c_v = \frac{R}{M} \quad \text{(gas ideal)}$$

donde R es la constante universal de los gases. En el SI, $R = 8314$ J/kmol · K y M se da en kg/kmol; entonces c_p y c_v deben estar en J/kg · K = J/kg · °C. Algunas personas utilizan $R = 1.98$ cal/mol · °C y M en g/mol en tal caso, c_p y c_v estarán en cal/g · °C.

RAZÓN DE CALOR ESPECÍFICO ($\gamma = c_p/c_v$): Como se vio anteriormente, esta razón es mayor que la unidad. La teoría cinética de los gases indica que para los gases monoatómicos (por ejemplo, He, Ne, Ar), $\gamma = 1.67$. Para los gases diatómicos (como O_2, N_2), $\gamma = 1.40$ a temperaturas ordinarias.

EL TRABAJO ESTÁ RELACIONADO CON EL ÁREA en un diagrama *P-V*. El trabajo efectuado por un fluido en una expansión es igual a la magnitud del área comprendida bajo la curva de expansión en un diagrama *P-V*.

En un proceso cíclico, el trabajo generado por cada ciclo efectuado por un fluido es igual a la magnitud del área encerrada por el ciclo en un digrama *P-V*.

LA EFICIENCIA DE UNA MÁQUINA TÉRMICA está definida por

$$\text{eficiencia} = \frac{\text{trabajo realizado}}{\text{calor introducido}}$$

El *ciclo de Carnot* es el ciclo de mayor eficiencia posible para una máquina térmica. Una máquina que opera de acuerdo con este ciclo entre un recipiente caliente (T_c) y un recipiente frío (T_f) tiene una eficiencia

$$\text{eficiencia}_{\text{máx}} = 1\frac{T_f}{T_c}$$

Aquí deben darse las temperaturas en Kelvin.

PROBLEMAS RESUELTOS

20.1 En cierto proceso, 8.00 kcal de calor son suministradas a un sistema mientras que éste efectúa un trabajo de 6.00 kJ. ¿En cuánto cambió la energía interna del sistema durante el proceso?

Se tiene

$$\Delta Q = (8000 \text{ cal})(4.184 \text{ J/cal}) = 33.5 \text{ kJ} \qquad \text{y} \qquad \Delta W = 6.00 \text{ kJ}$$

Por consiguiente, de la primera ley $\Delta Q = \Delta U + \Delta W$,

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta W = 33.5 \text{ kJ} - 6.00 \text{ kJ} = 27.5 \text{ kJ}$$

20.2 El calor específico del agua es de 4184 J/kg · K. ¿En cuántos joules cambia la energía interna de 50 g de agua cuando se calienta desde 21 °C hasta 37 °C?

El calor suministrado al agua es

$$\Delta Q = cm\,\Delta T = (4184 \text{ J/kg}\cdot\text{K})(0.050 \text{ kg})(16\ ^\circ\text{C}) = 3.4 \times 10^3 \text{ J}$$

Si se desprecia la ligera dilatación del agua, ningún trabajo se realizó sobre los alrededores, por lo que $\Delta W = 0$. Entonces, la primera ley, $\Delta Q = \Delta U + \Delta W$, implica

$$\Delta U = \Delta Q = 3.4 \text{ kJ}$$

20.3 ¿En cuánto cambia la energía interna de 5.0 g de hielo a 0 °C al transformarse en agua a 0 °C? Despréciese el pequeño cambio en el volumen.

El calor necesario para fundir el hielo es

$$\Delta Q = mH_f = (5.0 \text{ g})(80 \text{ cal/g}) = 400 \text{ cal}$$

El hielo no realiza trabajo al fundirse por lo que $\Delta W = 0$. Entonces, de la primera ley, $\Delta Q = \Delta U + \Delta W$, sabemos que

$$\Delta U = \Delta Q = (400 \text{ cal})(4.184 \text{ J/cal}) = 1.7 \text{ kJ}$$

20.4 Un resorte ($k = 500$ N/m) soporta una masa de 400 g cuando se encuentra sumergido en 900 g de agua. El calor específico de la masa es de 450 J/kg · K. El resorte se estira 15 cm y después de llegar al equilibrio térmico la masa se detiene y no vibra más de arriba hacia abajo. ¿Cuál fue el cambio de temperatura del agua cuando cesaron las vibraciones?

La energía almacenada en el resorte se disipa por los efectos de fricción y calienta el agua y la masa. La energía almacenada en el resorte es

$$\mathrm{EP}_e = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}(500\ \mathrm{N/m})(0.15\ \mathrm{m})^2 = 5.625\ \mathrm{J}$$

Esta energía se transforma en calor que fluye dentro del agua y la masa. Utilizando $\Delta Q = cm\ \Delta T$, tenemos

$$5.625\ \mathrm{J} = (4184\ \mathrm{J/kg \cdot K})(0.900\ \mathrm{kg})\ \Delta T + (450\ \mathrm{J/kg \cdot K})(0.40\ \mathrm{kg})\ \Delta T$$

con lo cual

$$\Delta T = \frac{5.625\ \mathrm{J}}{3950\ \mathrm{J/K}} = 0.0014\ \mathrm{K}$$

20.5 Encuéntrese ΔW y ΔU para un cubo de hierro de 6.0 cm de lado, cuando se calienta de 20 °C hasta 300 °C. Para el hierro, $c = 0.11\ \mathrm{cal/g \cdot {}^\circ C}$ y el coeficiente de dilatación volumétrico es de $3.6 \times 10^{-5}\ {}^\circ\mathrm{C}^{-1}$. La masa del cubo es de 1700 g.

$$\Delta Q = cm\ \Delta T = (0.11\ \mathrm{cal/g \cdot {}^\circ C})(1700\ \mathrm{g})(280\ {}^\circ\mathrm{C}) = 52\ \mathrm{kcal}$$

El volumen del cubo es $V = (6.0\ \mathrm{cm})^3 = 216\ \mathrm{cm}^3$. Usando $(\Delta V)/V = \beta\ \Delta T$ obtenemos

$$\Delta V = V\beta\ \Delta T = (216 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^3)(3.6 \times 10^{-5}\ {}^\circ\mathrm{C}^{-1})(280\ {}^\circ\mathrm{C}) = 2.18 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^3$$

Entonces, suponiendo que la presión atmosférica sea de 1.0×10^5 Pa, tenemos

$$\Delta W = P\ \Delta V = (1.0 \times 10^5\ \mathrm{N/m}^2)(2.18 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^3) = 0.22\ \mathrm{J}$$

De la primera ley se establece que

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta W = (52\,000\ \mathrm{cal})(4.184\ \mathrm{J/cal}) - 0.22\ \mathrm{J}$$
$$= 218\,000\ \mathrm{J} - 0.22\ \mathrm{J} \approx 2.2 \times 10^5\ \mathrm{J}$$

Nótese cuán pequeño es el trabajo de expansión que se realiza contra la atmósfera en comparación con ΔU y ΔQ. Cuando se trata con líquidos y sólidos, con frecuencia ΔW puede despreciarse.

20.6 Un motor suministra una potencia de 0.4 hp para agitar 5 kg de agua. Si se supone que todo el trabajo calienta el agua por fricción, ¿cuánto tiempo tomará incrementar la temperatura del agua 6 °C?

El calor requerido para calentar el agua es

$$\Delta Q = mc\ \Delta T = (5000\ \mathrm{g})(1\ \mathrm{cal/g \cdot {}^\circ C})(6\ {}^\circ\mathrm{C}) = 30\ \mathrm{kcal}$$

Esto fue suministrado por el trabajo de la fricción, así que

$$\text{Trabajo efectuado por la fricción} = \Delta Q = (30 \text{ kcal})(4.184 \text{ J/cal}) = 126 \text{ kJ}$$

y es igual al trabajo hecho por el motor. Pero

$$\text{Trabajo realizado por el motor en un tiempo } t = (\text{potencia})(t) = (0.4 \text{ hp} \times 746 \text{ W/hp})(t)$$

Al igualar esta expresión con el valor de trabajo efectuado, se obtiene

$$t = \frac{1.26 \times 10^5 \text{ J}}{(0.4 \times 746) \text{ W}} = 420 \text{ s} = 7 \text{ min}$$

20.7 En cada una de las siguientes situaciones, determínese el cambio en la energía interna del sistema. *a*) Un sistema absorbe 500 cal de calor y al mismo tiempo realiza un trabajo de 400 J. *b*) Un sistema absorbe 300 cal mientras efectúa un trabajo sobre él de 420 J. *c*) Mil doscientas calorías son eliminadas de un gas manteniendo su volumen constante.

a) $$\Delta U = \Delta Q - \Delta W = (500 \text{ cal})(4.184 \text{ J/cal}) - 400 \text{ J} = 1.69 \text{ kJ}$$

b) $$\Delta U = \Delta Q - \Delta W = (300 \text{ cal})(4.184 \text{ J/cal}) - (-420 \text{ J}) = 1.68 \text{ kJ}$$

c) $$\Delta U = \Delta Q - \Delta W = (-1200 \text{ cal})(4.184 \text{ J/cal}) - 0 = -5.02 \text{ kJ}$$

Observe que ΔQ es positivo cuando se añade calor al sistema, y ΔW es positivo cuando el sistema realiza un trabajo. En los casos opuestos, ambas se deben tomar como negativas.

20.8 Para cada uno de los siguientes procesos adiabáticos, determínese el cambio en la energía interna. *a*) Un gas efectúa un trabajo de 5 J cuando se expande adiabáticamente. *b*) Durante una compresión adiabática, se realiza un trabajo de 80 J sobre un gas.

Durante un proceso adiabático no hay transferencia de calor hacia o desde el sistema.

a) $$\Delta U = \Delta Q - \Delta W = 0 - 5 \text{ J} = -5 \text{ J}$$

b) $$\Delta U = \Delta Q - \Delta W = 0 - (-80 \text{ J}) = +80 \text{ J}$$

20.9 Se eleva la temperatura desde 10.0 °C hasta 130.0 °C de 5.00 kg de gas nitrógeno. Si esto se realiza a presión constante, determínese el incremento en energía interna ΔU y el trabajo externo ΔW que realiza el gas. Para gas N_2, $c_v = 0.177$ cal/g · °C y $c_p = 0.248$ cal/g · °C.

Si el gas se hubiera calentado a volumen constante, entonces no se habría realizado trabajo durante el proceso. En ese caso $\Delta W = 0$, y la primera ley nos diría que $(\Delta Q)_v = \Delta U$. Ya que $(\Delta Q)_v = c_v m \, \Delta T$, obtenemos

$$\Delta U = (\Delta Q)_v = (0.177 \text{ cal/g} \cdot {}^\circ\text{C})(5000 \text{ g})(120 \,{}^\circ\text{C}) = 106 \text{ kcal} = 443 \text{ kJ}$$

El cambio en la temperatura es una manifestación del cambio en la energía interna.

Cuando el gas se calienta 120 °C a presión constante, ocurre el mismo cambio en la energía interna. Añadiéndole, sin embargo, el trabajo efectuado. La primera ley entonces viene a ser

$$(\Delta Q)_p = \Delta U + \Delta W = 443 \text{ kJ} + \Delta W$$

Pero

$$(\Delta Q)_p = c_p m\,\Delta T = (0.248 \text{ cal/g}\cdot{}^\circ\text{C})(5000 \text{ g})(120\ {}^\circ\text{C})$$
$$= 149 \text{ kcal} = 623 \text{ kJ}$$

así

$$\Delta W = (\Delta Q)_p - \Delta U = 623 \text{ kJ} - 443 \text{ kJ} = 180 \text{ kJ}$$

20.10 Un kilogramo de vapor a 100 °C y 101 kPa ocupa 1.68 m³. *a*) ¿Qué fracción del calor de vaporización experimental se considera para la expansión del agua en vapor? *b*) Determínese el incremento en la energía interna de 1.00 kg de agua cuando se vaporiza a 100 °C.

a) El kilogramo de agua se expande de 1000 cm³ a 1.68 m³, así que $\Delta V = 1.68 - 0.001 \approx 1.68$ m³. Así que el trabajo realizado en la expansión es de

$$\Delta W = P\,\Delta V = (101 \times 10^3 \text{ N/m}^2)(1.68 \text{ m}^3) = 169 \text{ kJ}$$

El calor de vaporización del agua es de 540 cal/g, es decir, 2.26 MJ/kg. La fracción requerida es entonces

$$\frac{\Delta W}{mL_v} = \frac{169 \text{ kJ}}{(1.00 \text{ kg})(2260 \text{ kJ/kg})} = 0.0748$$

b) De la primera ley, $\Delta U = \Delta Q - \Delta W$, por lo tanto

$$\Delta U = 2.26 \times 10^6 \text{ J} - 0.169 \times 10^6 \text{ J} = 2.07 \text{ MJ}$$

20.11 Para el gas nitrógeno, $c_v = 740$ J/kg · K. Determínese el calor específico a presión constante. (La masa molecular del gas nitrógeno es 28 kg/kmol.)

Método 1

$$c_p = c_v + \frac{R}{M} = \frac{740 \text{ J}}{\text{kg}\cdot\text{K}} + \frac{8314 \text{ J/kmol}\cdot\text{K}}{28.0 \text{ kg/kmol}} = 1.04 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$$

Método 2

Ya que N_2 es un gas diatómico, y para este tipo de gas $c_p/c_v = 1.40$,

$$c_p = 1.40 c_v = 1.40(740 \text{ J/kg}\cdot\text{K}) = 1.04 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$$

20.12 ¿Cuánto trabajo realiza un gas en una expansión isotérmica desde un volumen inicial de 3.00 litros a 20.0 atm hasta un volumen final de 24.0 litros?

Para la expansión isotérmica de un gas ideal,

$$\Delta W = P_1 V_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 2.30\, P_1 V_1 \log\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$= (2.30)(20.0 \times 1.01 \times 10^5 \text{ N/m}^2)(3.00 \times 10^{-3} \text{ m}^3)\log\left(\frac{24.0}{3.00}\right) = 12.6 \text{ kJ}$$

20.13 En el diagrama *P-V* que se muestra en la Fig. 20-1 se presenta el ciclo de un gas en un sistema de pistón-cilindro. ¿Cuál es el trabajo realizado por el gas *a*) en la porción *AB*; *b*) en la porción *BC*; *c*) en la porción *CD*; *d*) en la porción *DA* del ciclo?

En una expansión, el trabajo efectuado es igual al área bajo la curva de la porción de la misma requerida en el diagrama *P-V*. En contracciones, el trabajo efectuado es numéricamente igual al área, pero es negativo.

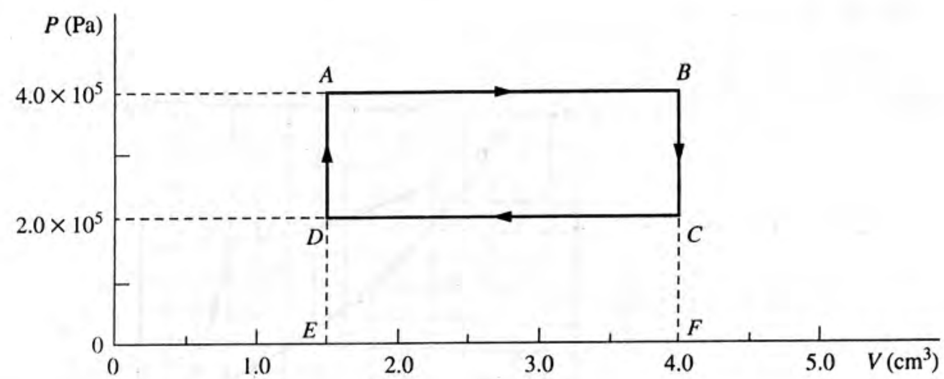


Fig. 20-1

a) $$\text{Trabajo} = \text{área } ABFEA = [(4.0 - 1.5) \times 10^{-6} \text{ m}^3](4.0 \times 10^5 \text{ N/m}^2) = 1.0 \text{ J}$$

b) $$\text{Trabajo} = \text{área bajo } BC = 0$$

En la porción *BC*, el volumen no cambia; por lo tanto $P\,\Delta V = 0$.

c) Ésta es una contracción, ΔV es negativo así que el trabajo es negativo:

$$\text{Trabajo} = -(\text{área } CDEFC) = -(2.5 \times 10^{-6} \text{ m}^3)(2.0 \times 10^5 \text{ N/m}^2) = -0.50 \text{ J}$$

d) $$\text{Trabajo} = 0$$

20.14 Para el ciclo termodinámico que se muestra en la Fig. 20-1, determínese *a*) el trabajo neto generado por el gas durante el ciclo y *b*) el flujo neto de calor hacia el interior del gas por ciclo.

Método 1

a) Del problema 20.13, el trabajo neto efectuado es 1.0 J – 0.50 J = 0.5 J.

Método 2

El trabajo neto efectuado es igual al área encerrada por el ciclo en el diagrama *P*-*V*

$$\text{Trabajo} = \text{área } ABCDA = (2.0 \times 10^5 \text{ N/m}^2)(2.5 \times 10^{-6} \text{ m}^3) = 0.50 \text{ J}$$

b) Supóngase que el ciclo se inicia en el punto *A*. El gas regresa a este punto al final del ciclo, así que no hay diferencias en el gas en su punto inicial y final. Para un ciclo completo, ΔU es por consiguiente igual a cero. Si se aplica la primera ley de la termodinámica al ciclo completo, tenemos

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W = 0 + 0.50 \text{ J} = 0.50 \text{ J} = 0.12 \text{ cal}$$

20.15 ¿Cuál es el trabajo neto generado por ciclo para el ciclo termodinámico que se muestra en la Fig. 20-2?

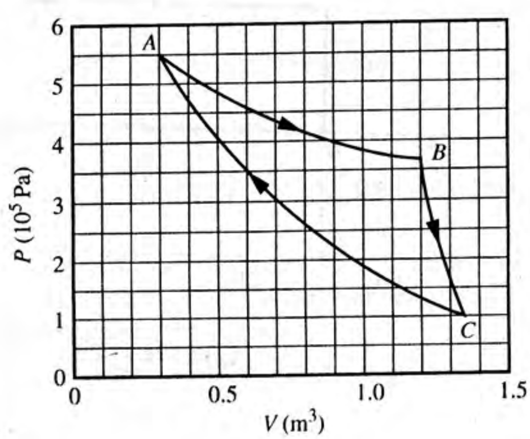


Fig. 20-2

Se sabe que el trabajo neto producido por un ciclo es igual al área encerrada por éste en el diagrama *P*-*V*. Se estima que en el área *ABCA* hay 22 cuadrados, cada uno de área

$$(0.5 \times 10^5 \text{ N/m}^2)(0.1 \text{ m}^3) = 5 \text{ kJ}$$

Por lo tanto,

$$\text{Área encerrada por un ciclo} \approx (22)(5\ \text{kJ}) = 1 \times 10^2\ \text{kJ}$$

De donde el trabajo neto generado por ciclo es igual a 1×10^2 kJ.

20.16 Veinte centímetros cúbicos de un gas monoatómico a 12 °C y 100 kPa es súbitamente (y adiabáticamente) comprimido a 0.50 cm³. ¿Cuál será su nueva presión y su nueva temperatura?

Para un cambio adiabático que afecta a un gas $P_1V_1^\gamma = P_2V_2^\gamma$ donde $\gamma = 1.67$ para un gas monoatómico. Entonces,

$$P_2 = P_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma = (1.00 \times 10^5\ \text{N/m}^2)\left(\frac{20}{0.50}\right)^{1.67} = 4.74 \times 10^7\ \text{N/m}^2 = 47\ \text{MPa}$$

NOTA: Si no se dispone de calculadora que pueda efectuar la operación x^y, es posible evaluar $(40)^{1.67}$ como sigue

$$\log\,[(40)^{1.67}] = 1.67 \log 40 = (1.67)(1.602) = 2.675$$

y

$$(40)^{1.67} = \text{antilog } 2.675 = 474$$

Para calcular la temperatura final, podría usarse $P_1V_1/T_1 = P_2V_2/T_2$; pero en su lugar se utilizará

$$T_1\,V_1^{\gamma-1} = T_2\,V_2^{\gamma-1}$$

o

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = (285\ \text{K})\left(\frac{20}{0.50}\right)^{0.67} = (285\ \text{K})(11.8) = 3.4 \times 10^3\ \text{K}$$

A modo de verificación,

$$\frac{P_1\,V_1}{T_1} = \frac{P_2\,V_2}{T_2}$$

$$\frac{(1 \times 10^5\ \text{N/m}^2)(20\ \text{cm}^3)}{285\ \text{K}} = \frac{(4.74 \times 10^7\ \text{N/m}^2)(0.50\ \text{cm}^3)}{3370\ \text{K}}$$

$$7000 = 7000\ \checkmark$$

20.17 Calcúlese la máxima eficiencia de una máquina térmica que opera entre las temperaturas límite de 100 °C y 400 °C.

La máquina más eficiente es la de Carnot, para la cual

$$\text{Eficiencia} = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 1 - \frac{373\ \text{K}}{673\ \text{K}} = 0.446 = 44.6\%$$

20.18 Una máquina de vapor opera entre una temperatura de caldera de 220 °C y una temperatura de condensador de 35.0 °C desarrollando una potencia de 8.00 hp. Si su eficiencia es del 30.0% de la de una máquina de Carnot que opera entre esos límites de temperatura, ¿cuántas calorías por segundo absorbe la caldera? ¿Cuántas calorías se eliminan del condensador cada segundo?

$$\text{Eficiencia real} = (0.30)(\text{Eficiencia de Carnot}) = (0.300)\left(1 - \frac{308\text{ K}}{493\text{ K}}\right) = 0.113$$

Pero la relación

$$\text{Eficiencia} = \frac{\text{trabajo de salida}}{\text{calor de entrada}}$$

nos da

$$\text{Calor suministrado/s} = \frac{\text{trabajo de salida/s}}{\text{eficiencia}} = \frac{(8.00\text{ hp})(746\text{ W/hp})\left(\dfrac{1.00\text{ cal/s}}{4.184\text{ W}}\right)}{0.113} = 12.7\text{ kcal/s}$$

Para calcular la energía eliminada por el condensador, se aplica la ley de conservación de la energía:

$$\text{Energía suministrada} = (\text{trabajo generado}) + (\text{energía eliminada})$$

Así es que

$$\begin{aligned}\text{Energía eliminada/s} &= (\text{energía suministrada/s}) - (\text{trabajo generado/s})\\ &= (\text{energía suministrada/s})[1 - (\text{eficiencia})]\\ &= (12.7\text{ kcal/s})(1 - 0.113) = 11.3\text{ kcal/s}\end{aligned}$$

20.19 Tres kilomoles (6.00 kg) de gas hidrógeno a TPE se expanden isobáricamente al doble de su volumen. *a*) ¿Cuál es la temperatura final del gas? *b*) ¿Cuál es el trabajo de expansión efectuado por el gas? *c*) ¿Cuánto cambió la energía interna del gas? *d*) ¿Cuánto calor entró al gas durante la expansión? Para el H_2, $c_v = 10.0$ kJ/kg · K.

a) Dado que $P_1V_1/T_1 = P_2V_2/T_2$ con $P_1 = P_2$

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = (273\text{ K})(2.00) = 546\text{ K}$$

b) Ya que 1 kmol a TPE ocupa 22.4 m³, tenemos $V_1 = 67.2\text{ m}^3$. Entonces

$$\Delta W = P \quad V = P(V_2 - V_1) = (1.01 \times 10^5\text{ N/m}^2)(67.2\text{ m}^3) = 6.8\text{ MJ}$$

c) Para elevar la temperatura de este gas a 273 K a volumen constante se requiere

$$\Delta Q = c_v m\,\Delta T = (10.0\text{ kJ/kg}\cdot\text{K})(6.00\text{ kg})(273\text{ K}) = 16.4\text{ MJ}$$

Ésta es también la energía interna que debe adicionársele a los 6.00 kg de H_2 para cambiarle su temperatura de 273 K a 546 K. Por lo tanto $\Delta U = 16.4$ MJ.

d) Puesto que durante el proceso el sistema obedece la primera ley, se tiene

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W = 16.4 \text{ MJ} + 6.8 \text{ MJ} = 23.2 \text{ MJ}$$

20.20 Un cilindro que contiene un gas ideal está cerrado por un pistón móvil de 8.00 kg (área = 60.0 cm²), como se muestra en la Fig. 20-3. La presión atmosférica es de 100 kPa. Cuando el gas es calentado desde 30.0 °C hasta 100.0 °C, el pistón se eleva 20.0 cm. Entonces, el pistón se asegura en ese lugar, y el gas se enfría nuevamente a 30.0 °C. Sea ΔQ_1 el calor cedido al gas en el proceso de calentamiento y ΔQ_2 el calor perdido durante el enfriamiento, encuéntrese la diferencia entre ΔQ_1 y ΔQ_2.

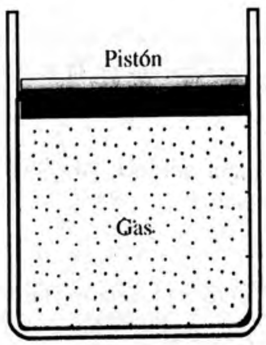


Fig. 20-3

Durante el proceso de calentamiento, la energía interna cambia por ΔU_1, y se efectúa un trabajo ΔW_1. La presión resultante del gas es de

$$P = \frac{(8.00)(9.81)\text{ N}}{60.0 \times 10^{-4}\text{ m}^2} + 1.00 \times 10^5 \text{ N/m}^2 = 1.13 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

Por lo tanto,

$$\Delta Q_1 = \Delta U_1 + \Delta W_1 = \Delta U_1 + P\Delta V$$

$$= \Delta U_1 + (1.13 \times 10^5 \text{ N/m}^2)(0.200 \times 60.0 \times 10^{-4} \text{ m}^3) = \Delta U_1 + 136 \text{ J}$$

Durante el proceso de enfriamiento, $\Delta W = 0$ así que (siendo ΔQ_2 el calor *perdido*)

$$-\Delta Q_2 = \Delta U_2$$

Pero el gas ideal regresa a su temperatura original, y por ello la energía interna es la misma que al principio. Por consiguiente, $\Delta U_2 = -\Delta U_1$, o $\Delta Q_2 = \Delta U_1$. Así pues, ΔQ_1 excede a ΔQ_2 por 136 J = 32.5 cal.

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

20.21 Un bloque metálico de 2.0 kg ($c = 0.137$ cal/g · °C) se calienta de 15 °C a 90 °C. ¿En cuánto cambió su energía interna? *Resp.* 86 kJ

20.22 ¿En cuánto cambia la energía interna de 50 g de aceite ($c = 0.32$ cal/g · °C) cuando el aceite se enfría de 100 °C a 25 °C? *Resp.* −1.2 kcal

20.23 Un bloque metálico de 70 g que se mueve a 200 cm/s resbala sobre la superficie de una mesa a lo largo de una distancia de 83 cm antes de que alcance el reposo. Si se supone que el 75% del calor producido por la fricción va hacia el interior del bloque, ¿en cuánto se incrementa la temperatura del bloque? Para el metal, $c = 0.106$ cal/g · °C. *Resp* 3.4×10^{-3} °C

20.24 Si una cierta masa de agua cae una distancia de 854 m y si se supone que toda la energía se aprovecha para calentar el agua, ¿cuál sería el incremento de la temperatura en el líquido? *Resp.* 2.00 °C

20.25 ¿Cuántos joules de calor por hora produce un motor con una eficiencia de 75.0% y que requiere de una potencia de 0.250 hp para funcionar? *Resp.* 168 kJ

20.26 Una bala de 100 g ($c = 0.030$ cal/g · °C) está inicialmente a 20 °C. Se dispara en línea recta hacia arriba con una rapidez de 420 m/s, y en su regreso choca con un bloque de hielo a 0 °C. ¿Cuánto hielo se funde? Despréciese la fricción con el aire. *Resp.* 26 g

20.27 Para determinar el calor específico de un aceite, un calentador eléctrico en forma helicoidal se coloca dentro de un calorímetro con 380 g de aceite a 10 °C. El calentador consume (y disipa calor) a razón de 84 W. Después de 3.0 min la temperatura del aceite es de 40 °C. Si el equivalente de agua del calorímetro y del calentador es de 20 g, ¿cuál es el calor específico del aceite? *Resp.* 0.26 cal/g · °C

20.28 ¿Cuánto trabajo externo realiza un gas ideal cuando se expande de un volumen de 3.0 litros a uno de 30.0 litros contra una presión constante de 2.0 atm? *Resp.* 5.5 kJ

20.29 Cuando se calientan 3.0 litros de un gas ideal a 27 °C, se expande a una presión constante de 2.0 atm. ¿Cuánto trabajo realiza el gas cuando su temperatura cambia de 27 °C a 227 °C? *Resp.* 0.40 kJ

20.30 Un gas ideal se expande adiabáticamente hasta tres veces su volumen inicial. Cuando esto se realiza, el gas efectúa un trabajo de 720 J. *a*) ¿Cuánto calor fluye desde el gas? *b*) ¿ Cuál es el cambio en la energía interna del gas? *c*) ¿Al realizar esto, sube o baja su temperatura? *Resp.* *a*) no fluye calor; *b*) −720 J; *c*) baja la temperatura

20.31 Un gas ideal se expande a presión constante de 240 cmHg desde 250 cm^3 hasta 780 cm^3. Realizado esto, se enfría a volumen constante hasta su temperatura inicial. ¿Cuál es el flujo neto de calor hacia el gas durante el proceso completo? *Resp.* 40.4 cal

20.32 Al comprimirse isotérmicamente un gas ideal, el agente compresor realiza 36 J de trabajo. ¿Cuánto calor fluye desde el gas durante el proceso de compresión? *Resp.* 8.6 cal

20.33 El calor específico del aire a volumen constante es de 0.175 cal/g · °C. *a*) ¿Cuál será el cambio de energía interna de 5.0 g de aire cuando es calentado de 20 °C a 400 °C? *b*) Supóngase que los 5.0 g de aire son comprimidos adiabáticamente, de tal forma que su temperatura aumenta de 20 °C hasta 400 °C. ¿Qué cantidad de trabajo se realizó para comprimirlo? *Resp.* *a*) 0.33 kcal; *b*) 1.4 kJ o, puesto que el trabajo realizado sobre el sistema es negativo, −1.4 kJ

20.34 El agua hierve a 100 °C y 1.0 atm. Para estas condiciones, 1.0 g de agua ocupa 1.0 cm^3, y 1.0 g de vapor ocupa 1670 cm^3, y el calor de vaporización $H_\upsilon = 540$ cal/g. Encuéntrese *a*) el trabajo externo efectuado cuando se forma 1.0 g de vapor a 100 °C *b*) y el incremento en la energía interna. *Resp.* *a*) 0.17 kJ; *b*) 0.50 kcal

20.35 La temperatura de 3.0 kg de criptón gaseoso se eleva de −20 °C a 80 °C. *a*) Si esto se hace a volumen constante, calcúlese el calor suministrado, el trabajo desarrollado y el cambio en la energía interna. *b*) Repítase el cálculo si el proceso se realiza a presión constante. Para el gas monoatómico Kr, $c_\upsilon = 0.035\,7$ cal/g · °C y $c_p = 0.059\,5$ cal/g · °C. *Resp.* *a*) 11 kcal, 0, 45 kJ; *b*) 18 kcal, 30 kJ, 45 kJ

20.36 *a*) Calcúlese c_υ para el gas monoatómico argón, dados $c_p = 0.125$ cal/g · °C y $\gamma = 1.67$. *b*) Dedúzcase c_p para el gas diatómico óxido nitroso (NO), dados $c_\upsilon = 0.166$ cal/g · °C y $\gamma = 1.40$. *Resp.* *a*) 0.074 9 cal/g · °C; *b*) 0.232 cal/g · °C

20.37 Calcúlese el trabajo desarrollado en una compresión isotérmica de 30 litros de gas ideal a 1.0 atm, a un volumen de 3.0 litros. *Resp.* 7.0 kJ

20.38 Cinco moles de gas neón a 2.00 atm y 27.0 °C se comprimen adiabáticamente a un tercio de su volumen inicial. Encuéntrese la presión y temperatura finales y el trabajo externo efectuado sobre el gas. Para el neón, $\gamma = 1.67$, $c_\upsilon = 0.148$ cal/g · °C y $M = 20.18$ kg/kmol. *Resp.* 1.27 MPa, 626 K, 20.4 kJ

20.39 Determínese el trabajo efectuado por el gas en la porción *AB* del ciclo termodinámico que se muestra en la Fig. 20-2. Repítase para la porción *CA*. Exprese sus resultados con una cifra significativa. *Resp.* 0.4 MJ, −0.3 MJ

20.40 Encuéntrese el trabajo neto desarrollado por el ciclo termodinámico mostrado en la Fig. 20-4. Exprese sus resultados con dos cifras significativas. *Resp.* 2.1 kJ

20.41 Cuatro gramos de gas, confinados en un cilindro, realizan el ciclo que se muestra en la Fig. 20-4. En A la temperatura del gas es de 400 °C. *a*) ¿Cuál es su temperatura en B? *b*) Si, en la porción del ciclo de A a B, fluyen hacia el gas 2.20 kcal, ¿cuál será c_v para el gas? Exprese sus resultados con dos cifras significativas. *Resp.* *a*) 2.0×10^3 K; *b*) 0.25 cal/g · °C

20.42 La Fig. 20-4 es el diagrama *P-V* para 25.0 g de un gas encerrado. En el punto A la temperatura del gas es de 200 °C. El valor de c_v para el gas de 0.150 cal/g · °C. *a*) ¿Cuál es la temperatura del gas en el punto B? *b*) Determínese ΔU en la porción del ciclo de A a B. *c*) Encuéntrese ΔW para esta misma porción. *d*) Determínese ΔQ para esta misma porción. *Resp.* *a*) 1.42×10^3 K; *b*) 3.55 kcal = 14.9 kJ; *c*) 3.54 kJ; *d*) 18.4 kJ

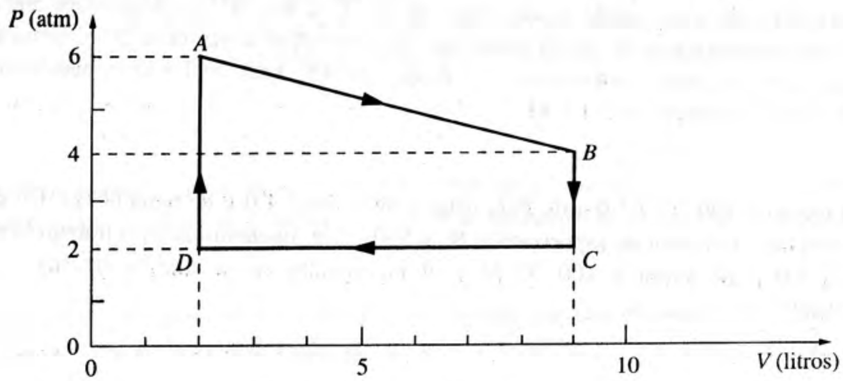


Fig. 20-4

capítulo 21

Entropía y la segunda ley

LA SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA se puede establecer de tres formas diferentes:

1) La energía calorífica fluye espontáneamente desde un objeto más caliente a uno más frío, pero no en sentido inverso.
2) Ninguna máquina de calor que trabaja en ciclos continuamente puede cambiar toda la energía consumida en trabajo útil.
3) Si un sistema experimenta cambios espontáneos, éste cambiará en tal forma que su entropía se incrementa o, en el mejor de los casos, permanecerá constante.

La segunda ley establece la manera en que ocurrirá un cambio espontáneo, mientras que la primera ley nos dice si es posible o no un cambio, de acuerdo con el principio de conservación de la energía. La primera ley se refiere a la conservación de la energía; la segunda, se refiere a la dispersión de esta última.

LA ENTROPÍA (S) es una *variable de estado* para un sistema en equilibrio. Esto significa que la entropía siempre es la misma para un sistema que se encuentra en un determinado estado de equilibrio. Así como P, V y U, la entropía también es una característica de un sistema que está en equilibrio.

Cuando entra una cantidad de calor ΔQ a un sistema a una temperatura absoluta T, el cambio de la entropía del sistema se define como

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$$

siempre y cuando el sistema cambie en forma reversible. La unidad para la entropía en el SI es J/K.

Un *cambio o proceso reversible* es aquél en el cual los valores de P, V, T y U están bien definidos durante el cambio. Si el proceso se invierte, entonces P, V, T y U regresarán a sus valores originales. Para considerarse reversible, un proceso debe, por lo general, ser lento, y el sistema debe estar muy próximo al equilibrio durante todo el cambio.

Otra definición equivalente de entropía se puede dar a partir de un cuidadoso análisis molecular del sistema. Si un sistema puede llegar a determinado estado (esto es, alcanzar valores particulares de P, V, T y U) a través de Ω (omega) formas diferentes (por ejemplo, mediante distintos arreglos de las moléculas), entonces la entropía de dicho estado es

$$S = k_B \ln \Omega$$

donde ln es el logaritmo en base e, y k_B es la constante de Boltzmann, 1.38×10^{-23} J/K.

LA ENTROPÍA ES UNA MEDIDA DEL DESORDEN: Un estado que sólo puede ocurrir de una sola forma (por ejemplo, un único arreglo de sus moléculas) es un estado altamente ordenado; pero si éste se da de muchas maneras es un estado desordenado. Una forma de asociar un número con el desorden, es tomar el desorden de un estado como proporcional a Ω, que es el número de formas en que puede ocurrir un estado. Como $S = k_B \ln \Omega$ la entropía es una medida del desorden.

En un sistema que contiene muchas moléculas, los procesos espontáneos siempre ocurren en una dirección de

$$\begin{pmatrix}\text{estado que puede existir en}\\ \text{sólo unos pocos estados}\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}\text{estado que puede existir}\\ \text{en mucho estados}\end{pmatrix}$$

Por consiguiente, cuando los sistemas se abandonan a sí mismos (es decir son sistemas aislados), retienen su estado original de orden, o de otra manera pueden incrementar su desorden.

EL ESTADO MÁS PROBABLE de un sistema es el estado con la entropía más grande. También es el estado con el mayor desorden y el estado que puede ocurrir en el mayor número de formas.

PROBLEMAS RESUELTOS

21.1 Veinte gramos de hielo a 0 °C se funden en agua a 0 °C. ¿Cuánto cambia la entropía de los 20 g en el proceso?

Agregando calor lentamente al hielo, se puede derretir de una manera reversible. El calor requerido es

$$\Delta Q = mH_f = (20\text{ g})(80\text{ cal/g}) = 1600\text{ cal}$$

de donde

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{1600\text{ cal}}{273\text{ K}} = 5.86\text{ cal/K} = 25\text{ J/K}$$

Nótese que la entropía (y el desorden) se incrementan conforme se derrite el hielo.

21.2 Como se muestra en la Fig. 21-1, un gas ideal en un cilindro está confinado por un pistón. El pistón se empuja hacia abajo lentamente, de tal forma que la temperatura permanece constante a 20.0 °C. Durante la compresión, se hace un trabajo sobre el gas de 730 J. Calcular el cambio de entropía del gas.

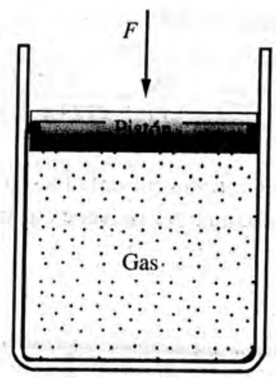


Fig. 21-1

La primera ley nos dice que

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W$$

Como el proceso es isotérmico, la energía interna del gas no cambia. Por lo mismo $\Delta U = 0$ y

$$\Delta Q = \Delta W = -730 \text{ J}$$

(Como el gas fue comprimido, éste hizo un trabajo negativo, de aquí el signo menos.) Ahora podemos escribir

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{-730 \text{ J}}{293 \text{ K}} = 2.49 \text{ J/K}$$

Nótese que el cambio de entropía es negativo. El desorden del gas decrece conforme se comprime a un volumen más pequeño.

21.3 Como se muestra en la Fig. 21-2, un recipiente está dividido en dos compartimientos de igual volumen. Los dos compartimientos contienen masas iguales del mismo gas, 0.740 g en cada uno; para este gas c_v es 745 J/kg · K. Al empezar, el gas caliente se encuentra a 67.0 °C, mientras que el gas frío está a 20.0 °C. No puede entrar o salir calor de los compartimientos excepto a través de la partición AB, y esto lentamente. Calcular el cambio de entropía de cada compartimiento conforme se enfría el gas caliente desde 67.0 °C hasta 65.0 °C.

El calor perdido por el gas caliente durante el proceso es

$$\Delta Q = mc_v\,\Delta T = (0.000\,740\text{ kg})(745\text{ J/kg}\cdot\text{K})(-2.0\text{ °C}) = -1.10\text{ J}$$

Para el gas caliente (aproximadamente a 66 °C),

$$\Delta S_c = \frac{\Delta Q}{T_c} \approx \frac{-1.10\text{ J}}{(273+66)\text{ K}} = -3.2\times10^{-3}\text{ J/K}$$

Para el gas frío, como éste ganará 1.10 J,

$$\Delta S_f = \frac{\Delta Q}{T_f} \approx \frac{1.10\text{ J}}{(273+21)\text{ K}} = 3.8\times10^{-3}\text{ J/K}$$

Como se puede observar, los cambios de entropía fueron diferentes para los dos compartimientos; se ganó más de lo que se perdió. La entropía total del universo se incrementó como resultado de este proceso.

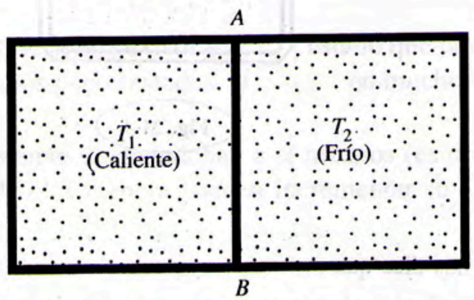


Fig. 21-2

21.4 El gas ideal en el cilindro de la Fig. 21-1 está inicialmente en el estado P_1, V_1, T_1. Éste se expande lentamente a temperatura constante al permitir que el pistón se eleve. Sus condiciones finales son P_2, V_2, T_1, donde $V_2 = 3V_1$. Calcular el cambio de entropía del gas durante la expansión. La masa del gas es 1.5 g, y $M = 28$ kg/kmol para éste.

En el capítulo 20 se definió, para una expansión isotérmica de un gas ideal (donde $\Delta U = 0$), que

$$\Delta W = \Delta Q = P_1 V_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Consecuentemente,

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{P_1 V_1}{T_1}\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \frac{m}{M}R\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

donde hemos usado la ley de los gases ideales. Sustituyendo los datos da

$$\Delta S = \left(\frac{1.5 \times 10^{-3}\,\text{kg}}{28\,\text{kg/kmol}}\right)\left(8314\frac{\text{J}}{\text{kmol}\cdot\text{K}}\right)(\ln 3) = 0.49\ \text{J/K}$$

21.5 Dos tanques de agua, uno a 87 °C y el otro a 14 °C, están separados por una placa de metal. Si el calor fluye a través de la placa a razón de 35 cal/s, ¿cuál es la razón de cambio de la entropía del sistema?

El tanque con la temperatura más alta pierde entropía, mientras que el más frío gana entropía:

$$\Delta S_c = \frac{\Delta Q}{T_c} = \frac{(-35\,\text{cal})(4.184\ \text{J/cal})}{360\,\text{K}} = -0.41\ \text{J/K}$$

$$\Delta S_f = \frac{\Delta Q}{T_f} = \frac{(35\,\text{cal})(4.184\ \text{J/cal})}{287\,\text{K}} = 0.51\ \text{J/K}$$

La razón neta de cambio de la entropía es, por lo tanto, 0.51 J/K − 0.41 J/K = 0.10 J/K.

21.6 Un sistema consiste de 3 monedas en las que puede salir águila o sol. ¿De cuántas maneras diferentes el sistema puede estar compuesto de tal forma que logren ser *a*) todas águilas; *b*) todas soles; *c*) un sol y dos águilas; *d*) dos soles y un águila?

a) Sólo hay una manera de que todas las monedas salgan águila: cada moneda debe salir águila.

b) Aquí, también, únicamente existe una forma.

c) Hay tres maneras, que corresponden a las tres selecciones de la moneda que muestra sol.

d) Por simetría con *c*), hay tres maneras.

21.7 Calcular la entropía del sistema de tres monedas descrito en el problema 21.6 si *a*) todas las monedas deben salir águila y *b*) dos monedas tienen que ser águila.

Usamos la relación de Boltzmann $S = k_B \ln \Omega$, donde Ω es el número de maneras en que un estado puede ocurrir, y $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K.

a) Como el estado sólo es posible que se dé en una forma,

$$S = k_B \ln 1 = (1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(0) = 0$$

b) Como el estado puede ocurrir de tres modos,

$$S = (1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K}) \ln 3 = 1.52 \times 10^{-23}\ \text{J/K}$$

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

21.8 Calcular el cambio de entropía de 5.00 g de agua a 100 °C conforme cambia a vapor a 100 °C bajo condiciones estándar de presión. *Resp.* 7.24 cal/K = 30.3 J/K

21.9 ¿Cuánto cambiará la entropía de 300 g de un metal (c = 0.093 cal/g · °C) conforme se enfría desde 90 °C a 70 °C? Puede hacer la siguiente aproximación: $T = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$. *Resp.* −6.6 J/K

21.10 Un gas ideal se expande lentamente desde 2.00 m^3 hasta 3.00 m^3 a una temperatura constante de 30 °C. El cambio de entropía del gas fue de + 47 J/K durante el proceso. *a*) ¿Cuánto calor se agregó al gas durante el proceso? *b*) ¿Cuánto trabajo hizo el gas durante el proceso? *Resp.* *a*) 3.4 kcal; *b*) 14 kJ

21.11 Iniciando con condiciones estándar, 3.0 kg de un gas ideal (M = 28 kg/kmol) se comprime isotérmicamente a un quinto de su volumen original. Calcular el cambio de entropía del gas. *Resp.* − 1.4 kJ/K

21.12 Cuatro fichas de póker tienen un color rojo en una cara y blanco en la otra. ¿De cuántas maneras diferentes se puede *a*) sacar tres fichas con cara roja; *b*) sacar dos fichas con cara roja? *Resp.* *a*) 4; *b*) 6

21.13 Cuando se arrojan 100 monedas, sólo hay una manera en la cual todas pueden salir águila. Existen 100 formas en las cuales sólo una es posible que sea sol. Hay aproximadamente 1×10^{29} maneras en las cuales 50 pueden salir águila. Se colocan 100 monedas en una caja con únicamente un águila hacia arriba. Se agita y entonces aparecen 50 águilas. ¿Cuál fue el cambio de entropía en las monedas debido a que fueron agitadas? *Resp.* 9×10^{-22} J/K

capítulo 22

Movimiento ondulatorio

UNA ONDA QUE SE PROPAGA es una perturbación autosostenida de un medio la cual viaja de un punto a otro, llevando energía y cantidad de movimiento. Las ondas mecánicas son fenómenos agregados que surgen del movimiento de las partículas constituyentes. La onda avanza, pero las partículas del medio sólo oscilan en su lugar. Una onda se ha generado en la cuerda de la Fig. 22-1 por una vibración de la mano que está en uno de sus extremos. La onda sobre la cuerda proporciona un registro de todas las vibraciones de la fuente. La energía es transportada por la onda desde la fuente hacia la derecha, a lo largo de la cuerda. Esta dirección, la de transporte de energía, se llama *dirección* (o *línea*) *de propagación* de la onda.

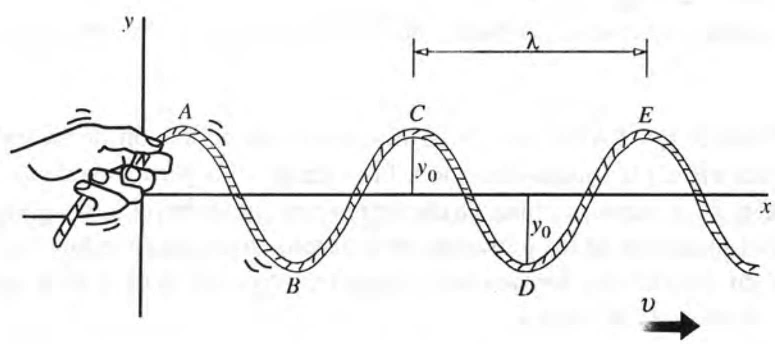


Fig. 22-1

Cada partícula de la cuerda (como la que se encuentra en el punto C) vibra de arriba hacia abajo, perpendicular a la línea de propagación. Toda onda en la cual la dirección de vibración es perpendicular a la dirección de propagación se denomina *onda transversal.* Ondas transversales típicas, además de las ondas sobre cuerdas, son, por ejemplo: las ondas electromagnéticas y las ondas de radio. En las ondas sonoras, sin embargo, la vibración es paralela a la dirección de propagación, como se puede constatar en el capítulo 23. A tal tipo de onda se le denomina *onda longitudinal* (o *de compresión*).

TERMINOLOGÍA ONDULATORIA: *El periodo de vibración* (T) es el tiempo que le toma a una partícula, como la del punto A, para moverse a través de un ciclo completo, bajar desde el punto A y regresar al mismo. El periodo es el número de segundos por ciclo. La *frecuencia de vibración* (f) es el número de vibraciones ejecutadas por una partícula en un segundo. Entonces,

$$f = \frac{1}{T}$$

Si T está dada en segundos, entonces f se encuentra en hertz (Hz), donde 1 Hz = 1 s^{-1}. El periodo y la frecuencia de una onda son iguales al periodo y frecuencia de una vibración.

Las partes superiores de la onda, donde se localizan puntos como A y C, se llaman *crestas*. Las partes inferiores, donde se encuentran los puntos B y D, se denominan *valles*. Al pasar el tiempo, las crestas y los valles se mueven a la derecha con una rapidez υ, la cual es la rapidez de la onda.

La *amplitud* de una onda es la máxima perturbación experimentada durante un ciclo de vibración, la distancia y_0 en la Fig. 22-1.

La longitud de onda (λ) es la distancia a lo largo de la dirección de propagación entre puntos correspondientes de la onda, por ejemplo la distancia AC. En un tiempo T, una cresta moviéndose con una rapidez υ recorrerá una distancia λ hacia la derecha. Por consiguiente como: $s = \upsilon t$ se encuentra que:

$$\lambda = \upsilon T = \frac{\upsilon}{f}$$

y

$$\upsilon = f\lambda$$

Esta relación es válida para todas las ondas, no sólo para las ondas en una cuerda.

LAS VIBRACIONES EN FASE existen en dos puntos de vibración de la onda, si éstos experimentan vibraciones simultáneas en la misma dirección. Por ejemplo, las partículas de la cuerda en el punto A y en el punto C en la Fig. 22-1, vibran en fase, ya que se mueven juntas hacia arriba y hacia abajo. Las vibraciones están en fase si la separación de los puntos es un múltiplo entero de longitudes de onda. Los segmentos de la cuerda en A y en B vibran en forma opuesta uno del otro, entonces se dice que las vibraciones están a 180°, o a medio ciclo *fuera de fase*.

LA RAPIDEZ DE UNA ONDA TRANSVERSAL en una cuerda o alambre tenso es

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\text{tensión en la cuerda}}{\text{masa por longitud unitaria de la cuerda}}}$$

ONDAS ESTACIONARIAS: A cierta frecuencia de vibración la cuerda puede *resonar*. Es decir, vibraría con una gran amplitud en patrones de vibración como los que se muestran en la Fig. 22-2. Estos patrones de vibración y otros similares son llamados *ondas estacionarias*, en contraste con las ondas de propagación descritas al principio de este capítulo. Es apropiado no llamarlas precisamente *ondas*, ya que no transportan energía ni cantidad de movimiento. Los puntos estacionarios (como lo son B y D) se llaman *nodos*; los de gran movimiento (como lo son A, C y E) son llamados *antinodos*. La distancia entre nodos (o antinodos) adyacentes es $\frac{1}{2}\lambda$. El término de porción de la cuerda que hay entre nodos adyacentes se llama *segmento*, y la longitud de un segmento también equivale a $\frac{1}{2}\lambda$.

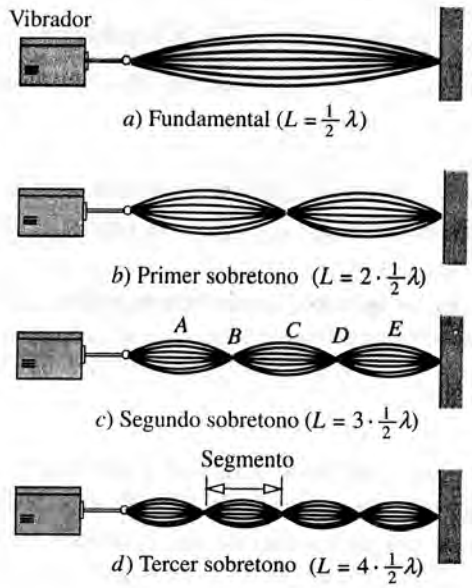


Fig. 22-2

CONDICIONES PARA LA RESONANCIA: Una cuerda estará en resonancia sólo si la longitud de onda de la vibración tiene ciertos valores especiales: la longitud de onda debe ser tal que la longitud de los segmentos (cada uno de $\frac{1}{2}\lambda$ de longitud) se ajuste apropiadamente a la cuerda. Un ajuste adecuado ocurre cuando los nodos y antinodos se encuentran en posiciones demandadas por las contracciones sobre la cuerda. En particular, los extremos fijos de la cuerda deben ser nodos. Entonces, se muestra en la Fig. 22-2, la relación entre la longitud de onda λ y la longitud L de una cuerda en resonancia es $L = n(\frac{1}{2}\lambda)$ donde n es un número entero. Ya que $\lambda = \upsilon T = \upsilon/f$, y entre más corta sea la longitud del segmento, mayor será la frecuencia de resonancia. Si llamamos frecuencia fundamental de resonancia a f_1, entonces la Fig. 22-2 muestra que las frecuencias de resonancia mayores están dadas por $f_n = nf_1$.

LAS ONDAS LONGITUDINALES (O DE COMPRESIÓN) ocurren cuando se hace vibrar a lo largo una columna de aire, una barra sólida o algo similar. En resonancia, los nodos existen en los puntos fijos, tales como el extremo cerrado de un tubo en una columna de aire o la posición de la sujeción de la barra. Diagramas como los de la Fig. 22-2 se utilizan para mostrar la resonancia de ondas longitudinales como también para ondas transversales. Sin embargo, para ondas longitudinales, los diagramas son principalmente esquemáticos y son utilizados simplemente para indicar la localización de los nodos y antinodos. Al analizar dichos diagramas, partiremos del hecho de que la distancia entre un nodo y un antinodo adyacente es $\frac{1}{4}\lambda$.

PROBLEMAS RESUELTOS

22.1 Supóngase que la Fig. 22-1 representa una onda de 50 Hz sobre una cuerda. Tómese la distancia y_0 de 3.0 mm y la distancia AE de 40 cm. Encuéntrese para la onda lo siguiente: *a*) la amplitud, *b*) la longitud de onda y *c*) la rapidez.

a) Por la definición la amplitud es la distancia y_0 que es equivalente a 3.0 mm.

b) La distancia entre dos crestas adyacentes es la longitud de onda, así que $\lambda = 20$ cm.

c)
$$\upsilon = \lambda f = (0.20\text{ m})(50\text{ s}^{-1}) = 10\text{ m/s}$$

22.2 En una onda sonora se encuentra experimentalmente que la longitud de onda es de 18.0 cm. La frecuencia de la onda es 1900 Hz. ¿Cuál es la rapidez de la onda sonora?

De $\lambda = \upsilon T = \upsilon/f$, la cual es aplicable a todo tipo de ondas,

$$\upsilon = \lambda f = (0.180\text{ m})(1900\text{ s}^{-1}) = 342\text{ m/s}$$

22.3 Una cuerda horizontal tiene 5.00 m de longitud y una masa de 1.45 g. ¿Cuál es la tensión en la cuerda si la longitud de onda, de una onda de 120 Hz sobre ella, es de 60.0 cm? ¿De qué magnitud será la masa que se debe colgar en uno de sus extremos (a través de una polea) para darle esa tensión?

Se sabe que

$$\upsilon = \lambda f = (0.600\text{ m})(120\text{ s}^{-1}) = 72.0\text{ m/s}$$

Además, ya que $\upsilon = \sqrt{(\text{tensión})/(\text{masa por unidad de longitud})}$,

$$\text{Tensión} = (\text{masa por unidad de longitud})(\upsilon^2) = \left(\frac{1.45\times 10^{-3}\text{ kg}}{5.00\text{ m}}\right)(72.0\text{ m/s})^2 = 1.50\text{ N}$$

La tensión en la cuerda se balancea con el peso de la masa que cuelga de su extremo. Es decir,

$$F_T = mg \quad \text{o} \quad m = \frac{F_T}{g} = \frac{1.50\text{ N}}{9.81\text{ m/s}^2} = 0.153\text{ kg}$$

22.4 Un cable flexible uniforme de 20 m de longitud tiene una masa de 5.0 kg. Es suspendido verticalmente con su propio peso y está vibrando en su extremo superior con una frecuencia de 7.0 Hz. *a*) Encuéntrese la rapidez de la onda transversal sobre el cable en su punto medio. *b*) ¿Cuál es la longitud de onda y la frecuencia en su punto medio?

a) Utilizaremos $\upsilon = \sqrt{(\text{tensión})/(\text{masa por unidad de longitud})}$. El punto medio del cable soporta la mitad de su peso, así que la tensión en este punto es

$$F_T = \tfrac{1}{2}(5.0\,\text{kg})(9.81\,\text{m/s}^2) = 24.5\,\text{N}$$

Por otro lado

$$\text{Masa por unidad de longitud} = \frac{5.0\,\text{kg}}{20\,\text{m}} = 0.25\,\text{kg/m}$$

así que

$$\upsilon = \sqrt{\frac{24.5\,\text{N}}{0.25\,\text{kg/m}}} = 9.9\,\text{m/s}$$

b) Ya que las crestas de una onda no se acumulan en un punto a lo largo de la cuerda o cable, el número de éstas que pase por un punto debe ser el mismo que pase por cualquier otro punto. Por lo tanto, la frecuencia, 7.0 Hz, es la misma en todos los puntos.

Para calcular la longitud de onda en el punto medio, debemos usar la rapidez que se determinó para ese punto, 9.9 m/s. Esto da

$$\lambda = \frac{\upsilon}{f} = \frac{9.9\,\text{m/s}}{7.0\,\text{Hz}} = 1.4\,\text{m}$$

22.5 Supóngase que en la Fig. 22-2 se muestra una cuerda metálica tensada con 88.2 N. Su longitud es de 50.0 cm y su masa de 0.500 g. *a*) Calcúlese υ para la onda transversal sobre la cuerda. *b*) Determínese la frecuencia fundamental y las frecuencias del primero y segundo sobretono.

a)
$$\upsilon = \sqrt{\frac{\text{tensión}}{\text{masa por unidad de longitud}}} = \sqrt{\frac{88.2\,\text{N}}{(5.00\times10^{-4}\,\text{kg})/(0.500\,\text{m})}} = 297\,\text{m/s}$$

b) Recuérdese que la longitud de un segmento es $\lambda/2$ y utilícese $\lambda = \upsilon/f$. Para la frecuencia fundamental

$$\lambda = 1.00\,\text{m} \quad \text{y} \quad f = \frac{297\,\text{m/s}}{1.00\,\text{m}} = 297\,\text{Hz}$$

Para el primer sobretono:

$$\lambda = 0.500\,\text{m} \quad \text{y} \quad f = \frac{297\,\text{m/s}}{0.500\,\text{m}} = 594\,\text{Hz}$$

Para el segundo sobretono:

$$\lambda = 0.333\,\text{m} \quad \text{y} \quad f = \frac{297\,\text{m/s}}{0.333\,\text{m}} = 891\,\text{Hz}$$

22.6 Una cuerda de 2.0 m de largo está accionada por un vibrador de 240 Hz colocado en uno de sus extremos. La cuerda resuena en cuatro segmentos. ¿Cuál es la rapidez de las ondas transversales en la cuerda?

Ya que cada segmento tiene una longitud de $\lambda/2$, se tiene

$$4\left(\frac{\lambda}{2}\right) = L \quad \text{o} \quad \lambda = \frac{L}{2} = \frac{2.0\text{ m}}{2} = 1.0\text{ m}$$

Utilizando $\lambda = \upsilon T = \upsilon/f$, obtenemos

$$\upsilon = f\lambda = (240\text{ s}^{-1})(1.0\text{ m}) = 0.24\text{ km/s}$$

22.7 La cuerda de un banjo de 30 cm de largo resuena en su frecuencia fundamental a 256 Hz. ¿Cuál es la tensión de la cuerda si 80 cm de ésta "pesan" 0.75 g?

Primero, debemos determinar υ y después hallar la tensión. Se sabe que la cuerda vibra en un segmento cuando $f = 256$ Hz. Por consiguiente, de la Fig. 22-2,

$$\frac{\lambda}{2} = L \quad \text{o} \quad \lambda = (0.30\text{ m})(2) = 0.60\text{ m}$$

y

$$\upsilon = f\lambda = (256\text{ s}^{-1})(0.60\text{ m}) = 154\text{ m/s}$$

La masa por unidad de longitud de la cuerda es

$$\frac{0.75 \times 10^{-3}\text{ kg}}{0.80\text{ m}} = 9.4 \times 10^{-4}\text{ kg/m}$$

Entonces, de $\upsilon = \sqrt{(\text{tensión})/(\text{masa por unidad de longitud})}$,

$$F_T = (154\text{ m/s})^2(9.4 \times 10^{-4}\text{ kg/m}) = 22\text{ N}$$

22.8 Una cuerda vibra en cinco segmentos a una frecuencia de 460 Hz. *a*) ¿Cuál es su frecuencia fundamental? *b*) ¿Qué frecuencia ocasionaría que vibrara en tres segmentos?

Método detallado

Si en la cuerda se presentan n segmentos, entonces de la Fig. 22-2 sabemos que $n(\frac{1}{2}\lambda) = L$. Pero $\lambda = \upsilon/f_n$, así que $L = n(\upsilon/2f_n)$. Despejando f_n se obtiene

$$f_n = n\left(\frac{\upsilon}{2L}\right)$$

Se sabe que $f_5 = 460$ Hz, por lo tanto

$$460\text{ Hz} = 5\left(\frac{\upsilon}{2L}\right) \quad \text{o} \quad \frac{\upsilon}{2L} = 92.0\text{ Hz}$$

Sustituyendo esto en la relación anterior tenemos

$$f_n = (n)(92.0\ \text{Hz})$$

a) $f_1 = 92.0$ Hz.

b) $f_3 = (3)(92\ \text{Hz}) = 276$ Hz

Método alternativo

Recordando que para una cuerda atada en ambos extremos, $f_n = nf_1$, se determina $f_5 = 460$ Hz, $f_1 =$ 92.0 Hz y $f_3 = 276$ Hz.

22.9 Una cuerda sujetada por ambos extremos resuena a 420 Hz y 490 Hz y no hay ninguna frecuencia de resonancia entre ellas. Determínese su frecuencia fundamental de resonancia.

En general, $f_n = nf_1$. Llamaremos a $f_n = 420$ Hz y $f_{n+1} = 490$ Hz. Por lo tanto,

$$420\ \text{Hz} = nf_1 \qquad \text{y} \qquad 490\ \text{Hz} = (n+1)f_1$$

Si se resta la primera ecuación de la segunda, se obtiene $f_1 = 70.0$ Hz.

22.10 La frecuencia fundamental de una cuerda de violín es de 196 Hz. ¿Dónde debe ser colocado, a lo largo de la cuerda, uno de los dedos para que la frecuencia fundamental sea de 440 Hz?

En la frecuencia fundamental, $L = \frac{1}{2}\lambda$. Ya que $\lambda = \upsilon/f$, se tiene que $f_1 = \upsilon/2L$. Originalmente, la cuerda de longitud L_1 resonaba a la frecuencia de 196 Hz, así que

$$196\ \text{Hz} = \frac{\upsilon}{2L_1}$$

Se quiere que resuene a 440 Hz, por consiguiente

$$440\ \text{Hz} = \frac{\upsilon}{2L_2}$$

Al eliminar υ de las ecuaciones simultáneas, obtenemos

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{196\ \text{Hz}}{440\ \text{Hz}} = 0.445$$

Para obtener la resonancia deseada, el dedo debe acortar la longitud de la cuerda hasta 0.445 de su longitud inicial.

22.11 Una barra de 60 cm de longitud, sujetada por su parte media, está vibrando longitudinalmente por una fuerza alternativa en uno de sus extremos. (Véase la Fig. 22-3.) Su frecuencia fundamental de resonancia es de 3.0 kHz. ¿Cuál es la rapidez de las ondas longitudinales en la barra?

Ya que sus extremos están libres, la barra debe tener antinodos ahí. El punto de sujeción en el centro de la barra tiene que ser un nodo. Por lo tanto, la resonancia fundamental es la mostrada en la Fig. 22-3. Porque la distancia entre el nodo y el antinodo siempre equivale $\frac{1}{4}\lambda$, se ve que $L = 2(\frac{1}{4}\lambda)$. Siendo $L = 0.60$ m, encontramos que $\lambda = 1.20$ m.

Entonces, de la relación básica $\lambda = v/f$, se obtiene

$$v = \lambda f = (1.20\text{ m})(3.0\text{ kHz}) = 3.6\text{ km/s}$$

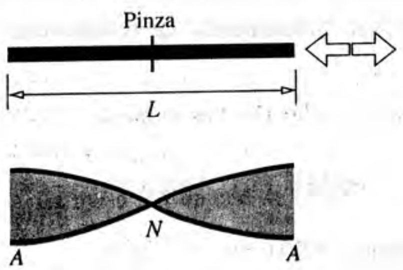


Fig. 22-3

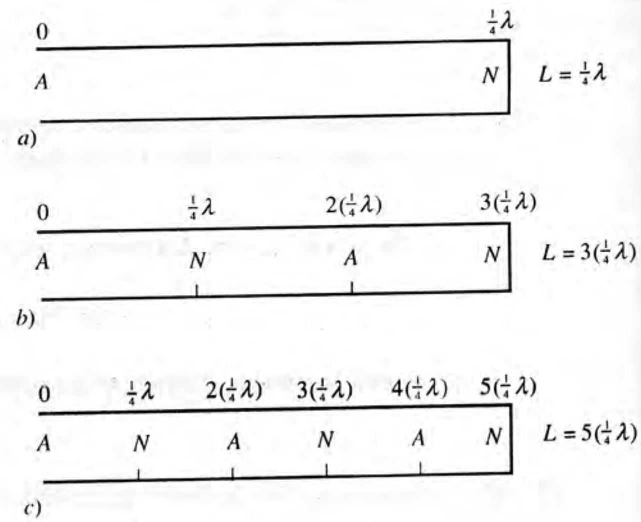


Fig. 22-4

22.12 Unas ondas de compresión (ondas sonoras) son transmitidas hacia el fondo de un tubo lleno de aire de 90 cm, cerrado en uno de sus extremos. El tubo resuena a varias frecuencias, la más baja de ellas es de 95 Hz. Determínese la rapidez del sonido en el aire.

El tubo y algunas de sus formas de resonancia se muestran en la Fig. 22-4. Recuérdese que la distancia entre nodo y antinodo adyacente es $\lambda/4$. En este caso, el modo de resonancia superior es el que se aplica, ya que para ella los segmentos son los más largos y su frecuencia es, por consiguiente, la más baja. Para ello, de la forma $L = \lambda/4$, se tiene

$$\lambda = 4L = 4(0.90\text{ m}) = 3.6\text{ m}$$

Utilizando $\lambda = vT = v/f$ se obtiene a

$$v = \lambda f = (3.6\text{ m})(95\text{ s}^{-1}) = 0.34\text{ km/s}$$

22.13 ¿A qué otras frecuencias resonará el tubo descrito en el problema 22.12?

Algunas de las primeras frecuencias de resonancia se muestran en la Fig. 22-4. Se observa que en la resonancia

$$L = n(\tfrac{1}{4}\lambda_n)$$

donde $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$, un número impar, son las longitudes de las ondas de la resonancia, pero $\lambda_n = v/f_n$, así que

$$L = n\frac{v}{4f_n} \quad \text{o} \quad f_n = n\frac{v}{4L} = nf_1$$

de donde, del problema 22.12, $f_1 = 95$ Hz. Algunas de las primeras frecuencias de resonancia son entonces: 95 Hz, 0.29 kHz, 0.48 kHz,...

22.14 Una varilla de metal de 40 cm de largo se deja caer verticalmente sobre un piso de madera y rebota en el aire. Por este motivo se establecen en la barra ondas de compresión de muchas frecuencias. Si la rapidez de las ondas de compresión en la barra es de 5500 m/s, ¿cuál será la frecuencia más baja de las ondas de compresión con la que resonará la barra cuando rebote?

Ambos extremos de la barra están libres, por lo que en ellos habrá antinodos. En el modo de resonancia más bajo (por ejemplo, el de segmentos más largos), sólo existirá un nodo en la barra, en su centro, como se muestra en la Fig. 22-5. Entonces se tiene

$$L = 2\left(\frac{\lambda}{4}\right) \quad \text{o} \quad \lambda = 2L = 2(0.40\text{ m}) = 0.80\text{ m}$$

Por consiguiente, de $\lambda = vT = v/f$,

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{5500\text{ m/s}}{0.80\text{ m}} = 6875\text{ Hz} = 6.9\text{ kHz}$$

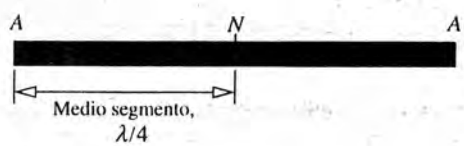


Fig. 22-5

22.15 Una varilla de 200 cm de largo está sujetada a 50 cm de uno de sus extremos, como se muestra en la Fig. 22-6. Por medio de un mecanismo eléctrico motriz colocado en uno de sus extremos, se transmite a la varilla una vibración longitudinal. El mecanismo aumenta la frecuencia de vibración desde un valor muy bajo y se determina que la varilla resuena por primera vez a 3 kHz. ¿Cuál es la rapidez del sonido (onda de compresión) en la varilla?

El punto de sujeción o amarre permanece estacionario y, por consiguiente, existe ahí un nodo; y puesto que los extremos están libres, ahí existen antinodos. La frecuencia más baja de resonancia ocurre cuando la varilla está vibrando en sus segmentos más largos posibles. En la Fig. 22-6 se muestra la forma de vibración que corresponde a esta condición. Si se recuerda que un segmento es la longitud de uno de los nodos al siguiente, entonces la longitud de A hasta N es la mitad de un segmento. Por lo tanto, la varilla tiene una longitud de dos segmentos. Esta forma de resonancia satisface las restricciones acerca de las posiciones de los nodos y los antinodos, como la condición de que la barra vibre en los segmentos más largos posibles. Ya que el segmento es de $\lambda/2$ de longitud,

$$L = 2(\lambda/2) \quad \text{o} \quad \lambda = L = 200 \text{ cm}$$

Entonces, utilizando $\lambda = \upsilon T = \upsilon/f$,

$$\upsilon = \lambda f = (2.00 \text{ m})(3 \times 10^3 \text{ s}^{-1}) = 6 \text{ km/s}$$

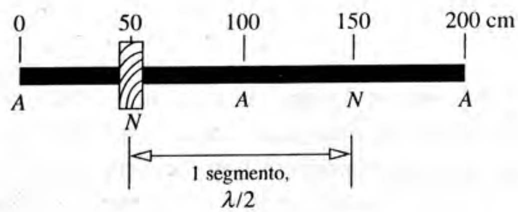


Fig. 22-6

22.16 *a*) Determínese la menor longitud de un tubo cerrado en uno de sus extremos y que resonará con un sonido originado por una frecuencia de 160 Hz. Considérese la rapidez del sonido en el aire como de 340 m/s. *b*) Repítase el cálculo para un tubo abierto en ambos extremos.

a) La Fig. 22-4*a* se aplica a este caso. El tubo más corto tendrá una longitud $\lambda/4$. Por lo tanto

$$L = \frac{1}{4}\lambda = \frac{1}{4}\left(\frac{\upsilon}{f}\right) = \frac{340 \text{ m/s}}{4(160 \text{ s}^{-1})} = 0.531 \text{ m}$$

b) En este caso, el tubo tiene antinodos en los extremos y un nodo en su centro. Entonces

$$L = 2\left(\frac{1}{4}\lambda\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\upsilon}{f}\right) = \frac{340 \text{ m/s}}{2(160 \text{ s}^{-1})} = 1.06 \text{ m}$$

22.17 Un tubo de 90 cm de longitud está abierto tanto en la parte superior como en la parte inferior. ¿De qué longitud debe ser un segundo tubo, cerrado en uno de sus extremos, si va a tener la frecuencia de resonancia fundamental del tubo abierto?

Los dos tubos en su frecuencia fundamental se muestran en la Fig. 22-7. Como puede observarse,

$$L_o = 2(\tfrac{1}{4}\lambda) \quad L_c = \tfrac{1}{4}\lambda$$

de donde $L_c = \frac{1}{2}L_o = 45$ cm.

22.18 Un tubo de vidrio de 70.0 cm de longitud está abierto por ambos extremos. Determínese las frecuencias a las cuales resonará con ondas sonoras que tienen una rapidez de 340 m/s.

Un tubo abierto por ambos extremos debe tener un antinodo en cada extremo. Las formas de resonancia se muestran en la Fig. 22-8. Se observa que las longitudes de onda para la resonancia λ_n, están dadas por

$$L = n\left(\frac{\lambda_n}{2}\right) \quad \text{o} \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

donde n es un número entero. Pero $\lambda_n = \upsilon/f_n$, así que

$$f_n = \left(\frac{n}{2L}\right)(\upsilon) = (n)\left(\frac{340\text{ m/s}}{2\times 0.700\text{ m}}\right) = 243n\text{ Hz}$$

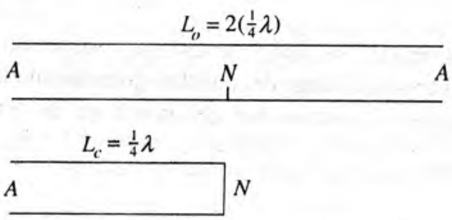


Fig. 22-7

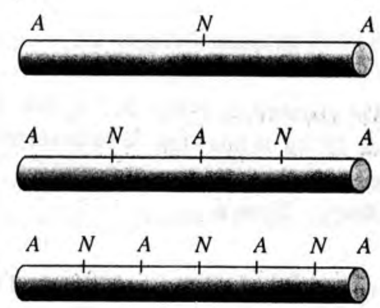


Fig. 22-8

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

22.19 Una persona común y corriente (promedio) puede oír sonidos comprendidos en un intervalo de frecuencias de aproximadamente 20 Hz a 20 kHz. Determínense las longitudes de onda en estos límites, si la rapidez del sonido es de 340 m/s. *Resp.* 17 m, 1.7 cm

22.20 La estación de radio WJR de Detroit transmite a 760 kHz. La rapidez de las ondas de radio es de 3.00×10^8 m/s. ¿Cuál será la longitud de onda de las ondas de la WJR? *Resp.* 395 m

22.21 Las ondas de un radar con una longitud de onda de 3.4 cm se emiten desde un transmisor. Su rapidez es de 3.00×10^8 m/s. ¿Cuál es su frecuencia? *Resp.* 8.8×10^9 Hz = 8.8 GHz

22.22 Cuando se hace vibrar una cuerda con un vibrador de 120 Hz se producen ondas transversales en la cuerda de 31 cm de longitud de onda. *a*) ¿Cuál es la rapidez de las ondas sobre la cuerda? *b*) Si la tensión en la cuerda es de 1.20 N, ¿cuál será la masa de una cuerda de 50 cm de largo? *Resp.* *a*) 37 m/s; *b*) 0.43 g

22.23 La onda que se muestra en la Fig. 22-9 está siendo emitida por un vibrador a 60 ciclos/s. Determínese lo siguiente para la onda: *a*) amplitud, *b*) frecuencia, *c*) longitud de onda, *d*) rapidez, *e*) periodo. *Resp.* *a*) 3.00 mm; *b*) 60 Hz; *c*) 2.00 cm; *d*) 1.2 m/s; *e*) 0.017 s

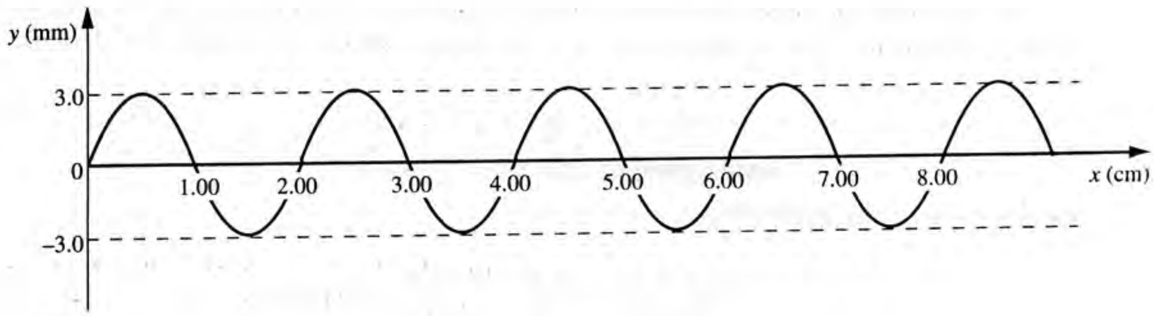


Fig. 22-9

22.24 Un alambre de cobre de 2.4 mm de diámetro tiene 3.0 m de longitud y se usa para suspender una masa de 2.0 kg de una viga. Si se envía una perturbación transversal a lo largo del alambre golpeándolo ligeramente con un lápiz, ¿con qué rapidez viajará la perturbación? La densidad del cobre es de 8920 kg/m³. *Resp.* 22 m/s

22.25 Un alambre de 180 cm de longitud resuena en tres segmentos de una onda transversal cuando se le envía una vibración de 270 Hz. ¿Cuál es la rapidez de las ondas en el alambre? *Resp.* 324 m/s

22.26 Una cuerda resuena en tres segmentos para una frecuencia de 165 Hz. ¿Cuál debe ser la frecuencia utilizada para que resuene en cuatro segmentos? *Resp.* 220 Hz

22.27 Un cable flexible de 30 m de longitud y 70 N de peso se tensa entre dos postes con una fuerza de 2.0 kN. Si el cable se golpea lateralmente por uno de sus extremos, ¿cuánto tiempo tardará la onda transversal en viajar al otro extremo y regresar? *Resp.* 0.65 s

22.28 Un alambre tenso vibra con la frecuencia fundamental de 256 Hz. ¿Cuál debería ser la frecuencia fundamental si el alambre tuviera la mitad de largo, el doble de grueso y estuviera sometido a un cuarto de la tensión? *Resp.* 128 Hz

22.29 Dos alambres de acero y plata, del mismo diámetro y longitud, son tensados con idéntica fuerza. Sus densidades son 7.80 g/cm^3 y 10.6 g/cm^3 respectivamente. ¿Cuál es la frecuencia fundamental del alambre de plata, si la del acero es de 200 Hz? *Resp.* 172 Hz

22.30 Un alambre tiene una longitud de 60 cm y una masa de 3.0 gramos. ¿Cuál debe ser la tensión, de tal manera que cuando vibra transversalmente su primer sobretono tenga una frecuencia de 200 Hz? *Resp.* 72 N

22.31 *a*) ¿En qué punto debe estar sujetada una cuerda tensa para hacer que su tono fundamental sea más intenso? *b*) ¿En qué punto tiene que estar sujeta y en qué punto tiene que tocarse para hacer su primer sobretono más marcado? *c*) ¿Y para hacer su segundo sobretono más intenso? *Resp.* *a*) centro, *b*) sujeta a una distancia de 1/4 de su longitud medida desde uno de sus extremos, después de ser tocada en su centro, *c*) sujeta a 1/6 de su longitud desde uno de sus extremos, después de ser tocada a 1/3 de su longitud desde ese extremo

22.32 ¿Cuál debe ser la longitud de una barra de hierro que tiene la frecuencia fundamental de 320 Hz cuando se sujeta por su centro? Supóngase que la rapidez de las vibraciones longitudinales es de 5.00 km/s. *Resp.* 7.81 m

22.33 Una barra de 120 cm de longitud se sujeta por el centro y se golpea de tal modo que emite su primer sobretono. Hágase un dibujo en el cual se muestre la localización de los nodos y los antinodos, y determínese en qué otros puntos la barra puede estar fija y todavía emitir el mismo sobretono. *Resp.* 20.0 cm desde cada extremo

22.34 Una barra de metal de 6.0 m de longitud, se fija en su centro y vibra longitudinalmente de tal manera que emite su primer sobretono, vibrando al unísono con un diapasón marcado a 1200 vibraciones/s. Calcúlese la rapidez del sonido en el metal. *Resp.* 4.8 km/s

22.35 Determínese la longitud de la columna de aire más corta en un recipiente cilíndrico que reforzará fuertemente el sonido de un diapasón que vibra a 512 Hz. Utilícese para la rapidez del sonido en el aire $v =$ 340 m/s. *Resp.* 16.6 cm

22.36 Un tubo largo y angosto, cerrado en uno de sus extremos, no resuena con un diapasón que tiene una frecuencia de 300 Hz, sino hasta que la columna de aire alcanza 28 cm. *a*) ¿Cuál es la rapidez del sonido en el aire a la temperatura ambiente? *b*) ¿Cuál es la siguiente longitud de la columna que resonará con el diapasón? *Resp.* *a*) 0.34 km/s; *b*) 84 cm

22.37 Un tubo de órgano, cerrado en uno de sus extremos, tiene 61.0 cm de longitud. ¿Cuáles son las frecuencias de los tres primeros sobretonos si v para el sonido es 342 m/s? *Resp.* 420 Hz, 700 Hz, 980 Hz

capítulo 23

Sonido

LAS ONDAS SONORAS en un medio material como el aire, el agua o el acero son ondas de compresión. Cuando las compresiones y rarefacciones de las ondas inciden sobre el tímpano del oído, dan como resultado la sensación de sonido, siempre y cuando la frecuencia de las ondas esté entre los 20 Hz y los 20 000 Hz. Las ondas con frecuencias superiores a los 20 kHz se llaman ondas *ultrasónicas*. Aquellas con frecuencias inferiores a los 20 Hz se conocen como *infrasónicas*.

ECUACIÓN PARA CALCULAR LA RAPIDEZ DEL SONIDO: En un gas ideal de masa molecular M y temperatura absoluta T, la rapidez del sonido υ se puede calcular con

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad \text{(gas ideal)}$$

donde R es la constante de los gases, y γ es la razón de los calores específicos c_p/c_υ. γ tiene un valor de aproximadamente 1.67 para los gases monoatómicos (He, Ne, Ar), y de aproximadamente 1.40 para los gases diatómicos (N_2, O_2, H_2).

La rapidez de las ondas de compresión en un medio material está dada por

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\text{módulo}}{\text{densidad}}}$$

Si el material tiene la forma de una barra, se usa el módulo de Young Y. En los líquidos se debe utilizar el módulo volumétrico de elasticidad.

LA RAPIDEZ DEL SONIDO EN EL AIRE a 0 °C es de 331 m/s. La rapidez se incrementa con la temperatura por un factor de aproximadamente 0.61 m/s por cada 1 °C que aumente. En particular, la relación que existe entre la rapidez υ_1 y la rapidez υ_2 a temperaturas absolutas T_1 y T_2 respectivamente es

$$\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

La rapidez del sonido no depende de la presión, la frecuencia y la longitud de onda.

LA INTENSIDAD (I) de una onda sonora es la potencia transportada por una onda a través de un área unitaria perpendicular a la dirección de propagación de la onda. Suponga que en un tiempo Δt una cantidad de energía ΔE atraviesa el área ΔA la cual es perpendicular a la dirección de propagación de la onda. Entonces

$$I = \frac{\Delta E}{\Delta A\, \Delta t} = \frac{P_{prom}}{\Delta A}$$

Se puede demostrar que para una onda sonora con amplitud a_0 y frecuencia f, que viaja con una rapidez υ en un medio material de densidad ρ,

$$I = 2\pi^2 f^2 \rho \upsilon a_0^2$$

Si f está en Hz, ρ en kg/m^3, υ en m/s y a_0 (el desplazamiento máximo de los átomos o moléculas del medio) en m, entonces I está en W/m^2.

LA INTENSIDAD ACÚSTICA es una medida de la percepción del sonido por el oído humano. Aunque una onda sonora de alta intensidad se percibe con mayor estrépito que una onda con menor intensidad, su relación está muy lejos de ser lineal. La sensación de sonido es más o menos proporcional al logaritmo de la intensidad sonora. Pero la relación exacta en sensación auditiva o intensidad es muy compleja y además diferente para cada individuo.

EL NIVEL DE INTENSIDAD (O VOLUMEN SONORO) (β) se define con una escala arbitraria que corresponde aproximadamente a la sensación de sonoridad. El cero en esta escala se toma en la intensidad de una onda sonora $I_0 = 1.00 \times 10^{-12}$ W/m^2, que corresponde al sonido audible más débil. La definición de la escala, en decibeles, es

$$\beta = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

El *decibel* (dB) es una unidad adimensional. El oído normal puede distinguir entre intensidades que difieren aproximadamente en 1 dB.

PULSACIONES (O BATIDOS): Las alteraciones que se producen en los máximos y mínimos de la intensidad del sonido debidas a la superposición de dos ondas sonoras con frecuencias ligeramente diferentes se llaman *pulsaciones*. El número de pulsaciones por segundo es igual a la diferencia entre las frecuencias de las dos ondas sonoras que se combinaron.

EFECTO DOPPLER: Suponga que una fuente sonora emite un sonido de frecuencia f_s. Sea υ la rapidez del sonido y υ_s la rapidez con la cual la fuente sonora se aproxima a un observador, relativa al medio de propagación del sonido. Suponga además que el observador se dirige hacia la fuente con una rapidez υ_o, también medida respecto al medio. El observador oirá un sonido de frecuencia f_o dada por

$$f_o = f_s \frac{\upsilon + \upsilon_o}{\upsilon - \upsilon_s}$$

Si tanto el observador como la fuente se alejan el uno del otro, el signo de la rapidez respectiva en la ecuación se debe cambiar.

Y si la fuente y el observador se acercan entre sí, el individuo percibirá más ondas por segundo que cuando ambos se encuentran en reposo. Esto ocasiona que el oído escuche una frecuencia más alta que la emitida por la fuente. Cuando los dos se apartan entre sí, ocurre lo contrario: la frecuencia percibida es más baja.

Como $\upsilon + \upsilon_o$ es la velocidad relativa de la onda respecto al observador, y $\upsilon - \upsilon_s$ es la velocidad relativa de la onda respecto a la fuente, una forma alterna es

$$f_o = f_s \frac{\text{rapidez de la cresta relativa al observador}}{\text{rapidez de la cresta relativa a la fuente}}$$

EFECTOS DE INTERFERENCIA: Dos ondas de la misma frecuencia y amplitud pueden dar origen a efectos de interferencia fácilmente observables en un punto por el cual pasan ambas. Si la cresta de una onda coincide con la cresta de la otra, se dice que las ondas están *en fase*. En este caso, ellas se refuerzan entre sí y ocasionan una intensidad más alta en ese punto.

Por otra parte, si la cresta de una onda coincide con el valle de la otra, las dos ondas se cancelarán entre sí. No se escuchará sonido alguno en este punto. Decimos que las ondas están 180° (media longitud de onda) *fuera de fase*.

Se observan efectos intermedios si las ondas no están en fase ni 180° fuera de fase, pero tendrán una relación de fase fija en algún punto intermedio.

PROBLEMAS RESUELTOS

23.1 Una explosión ocurre a una distancia de 6.00 km de una persona. ¿Qué tiempo transcurre después de la explosión antes de que la persona la pueda escuchar? Suponga que la temperatura es de 14.0 °C.

Como la velocidad del sonido se incrementa en 0.61 m/s por cada 1.0 °C, tenemos

$$\upsilon = 331 \text{ m/s} + (0.61)(14) \text{ m/s} = 340 \text{ m/s}$$

Utilizando $s = \upsilon t$, encontramos que el tiempo transcurrido es

$$t = \frac{s}{\upsilon} = \frac{6000 \text{ m}}{340 \text{ m/s}} = 17.6 \text{ s}$$

23.2 Para calcular qué tan lejos se produjo un relámpago, consideremos la siguiente regla: "Dividamos entre tres el tiempo en segundos que transcurre entre el destello y el sonido percibido. El resultado es igual a la distancia en km al relámpago". Justifique esta suposición.

La velocidad del sonido es $\upsilon \approx 333$ m/s $\approx \frac{1}{3}$ km/s, así que la distancia al relámpago es

$$s = \upsilon t \approx \frac{t}{3}$$

donde t, el tiempo que viaja el sonido, está en segundos y s en kilómetros. La luz emitida por el relámpago viaja muy rápido, 3×10^8 m/s, que llega al observador casi instantáneamente. Aquí t es prácticamente igual al tiempo entre *ver* el relámpago y oír el trueno. De aquí la regla.

23.3 Calcular la rapidez del sonido en un gas de neón a 27.0 °C. Para el neón, $M = 20.18$ kg/kmol.

El neón, por ser un gas monoatómico, tiene $\gamma \approx 1.67$. Por tanto,

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{(1.67)(8314\ \text{J/kmol}\cdot\text{K})(300\ \text{K})}{20.18\ \text{kg/kmol}}} = 454\ \text{m/s}$$

23.4 Calcular la rapidez del sonido en un gas diatómico ideal que tiene una densidad de 3.50 kg/m³ y una presión de 215 kPa.

Se sabe que $\upsilon = \sqrt{\gamma RT/M}$. De la ley de los gases $PV = (m/M)RT$, así que

$$\frac{RT}{M} = P\frac{V}{m}$$

Pero como $\rho = m/V$. la expresión para la rapidez se convierte en

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = \sqrt{\frac{(1.40)(215 \times 10^3\ \text{Pa})}{3.50\ \text{kg/m}^3}} = 293\ \text{m/s}$$

Hemos utilizado el hecho de que $\gamma \approx 1.40$ para un gas diatómico ideal.

23.5 Una barra metálica de 60 cm de longitud está prensada en su centro. Entra en resonancia a su frecuencia fundamental debido a una onda longitudinal que se propaga dentro de ella con una frecuencia de 3.00 kHz. ¿Cuál es el módulo de Young para el material de la barra? La densidad del metal es 8700 kg/m³.

La misma barra se discutió en el problema 22.11. Allí encontramos que la rapidez de las ondas longitudinales en ello es de 3.6 km/s. Sabemos que $\upsilon = \sqrt{Y/\rho}$ y entonces

$$Y = \rho\upsilon^2 = (8700\ \text{kg/m}^3)(3600\ \text{m/s})^2 = 1.1 \times 10^{11}\ \text{N/m}^2$$

23.6 ¿Cuál es la rapidez de una onda de compresión (onda sonora) en el agua? El módulo volumétrico del agua es 2.2×10^9 N/m^2.

$$v = \sqrt{\frac{\text{módulo volumétrico}}{\text{densidad}}} = \sqrt{\frac{2.2 \times 10^9 \text{ N/m}^2}{1000 \text{ kg/m}^3}} = 1.5 \text{ km/s}$$

23.7 Un diapasón vibra en el aire a razón de 284 Hz. Calcular la longitud de onda del tono emitido a 25 °C.

A 25 °C,

$$v = 331 \text{ m/s} + (0.61)(25) \text{ m/s} = 346 \text{ m/s}$$

Usando $\lambda = vT = v/f$ se obtiene

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{346 \text{ m/s}}{284 \text{ s}^{-1}} = 1.22 \text{ m}$$

23.8 El tubo de un órgano resuena con una frecuencia de 224.0 Hz cuando la temperatura es de 15 °C. ¿Cuál será la frecuencia de resonancia cuando la temperatura sea de 24 °C?

La longitud de onda de resonancia debe tener el mismo valor para las dos temperaturas ya que ésta depende sólo de la longitud del tubo. (Los nodos y antinodos deben distribuirse apropiadamente dentro del tubo.) Pero $\lambda = v/f$, y por consiguiente v/f debe tener el mismo valor para las dos temperaturas. Entonces tenemos

$$\frac{v_1}{224 \text{ Hz}} = \frac{v_2}{f_2} \quad \text{o} \quad f_2 = (224 \text{ Hz})\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$

A una temperatura próxima a la ambiente, $v = (331 + 0.61t)$ m/s, donde t es la temperatura en grados Celsius. Entonces tenemos

$$f_2 = (224.0 \text{ Hz})\left[\frac{331 + (0.61)(24)}{331 + (0.61)(15)}\right] = 0.228 \text{ kHz}$$

23.9 Un sonido fuerte y desagradable puede tener una intensidad de 0.54 W/m^2. Calcular la amplitud de la onda sonora si su frecuencia es de 800 Hz. Tomar la densidad del aire como 1.29 kg/m^3 y la rapidez del sonido como 340 m/s.

De la ecuación $I = 2\pi^2 f^2 \rho v a_0^2$,

$$a_0 = \frac{1}{\pi f}\sqrt{\frac{I}{2\rho v}} = \frac{1}{(800 \text{ s}^{-1}\pi)}\sqrt{\frac{0.54 \text{ W/m}^2}{(2)(1.29 \text{ kg/m}^3)(340 \text{ m/s})}} = 9.9 \times 10^{-6} \text{ m} = 9.9 \text{ } \mu\text{m}$$

23.10 Un sonido tiene una intensidad de 3.00×10^{-8} W/m². ¿Cuál es el nivel de intensidad en dB?

$$\beta = 10 \log\left(\frac{I}{1.00 \times 10^{-12}\ \text{W/m}^2}\right)$$

$$= 10 \log\left(\frac{3.00 \times 10^{-8}}{1.00 \times 10^{-12}}\right) = 10 \log(3.00 \times 10^{4}) = 10(4 + \log 3.00)$$

$$= 10(4 + 0.477) = 44.8\,\text{dB}$$

23.11 Un medidor de nivel de ruido da una lectura del nivel de sonido en un cuarto de 85.0 dB. ¿Cuál es la intensidad del sonido en la habitación?

$$\beta = 10 \log\left(\frac{I}{1.00 \times 10^{-12}\ \text{W/m}^2}\right) = 85.0\,\text{dB}$$

$$\log\left(\frac{I}{1.00 \times 10^{-12}\ \text{W/m}^2}\right) = \frac{85.0}{10} = 8.50$$

$$\frac{I}{1.00 \times 10^{-12}\ \text{W/m}^2} = \text{antilog}\, 8.50 = 3.16 \times 10^{8}$$

$$I = (1.00 \times 10^{-12}\ \text{W/m}^2)(3.16 \times 10^{8}) = 3.16 \times 10^{-4}\ \text{W/m}^2$$

23.12 Las intensidades de dos ondas sonoras son 10 y 500 μW/cm². ¿Cuántos decibeles arriba está el sonido más fuerte sobre el otro?

Sea el sonido A igual a 10 μW/cm², y B el otro. Entonces

$$\beta_A = 10 \log\left(\frac{I_A}{I_0}\right) = 10(\log I_A - \log I_0)$$

$$\beta_B = 10 \log\left(\frac{I_B}{I_0}\right) = 10(\log I_B - \log I_0)$$

Restando se obtiene

$$\beta_B - \beta_A = 10(\log I_B - \log I_A) = 10 \log\left(\frac{I_B}{I_A}\right)$$

$$= 10 \log\left(\frac{500}{10}\right) = 10 \log 50 = (10)(1.70)$$

$$= 17 \text{ dB de diferencia}$$

23.13 Calcular la razón de intensidades de dos sonidos si uno es 8.0 dB más intenso que el otro.

Podemos ver en el problema 23.12 que

$$\beta_B - \beta_A = 10 \log\left(\frac{I_B}{I_A}\right)$$

En el presente caso la ecuación se convierte en

$$8.0 = 10 \log\left(\frac{I_B}{I_A}\right) \quad \text{o} \quad \frac{I_B}{I_A} = \text{antilog } 0.80 = 6.3$$

23.14 Una fuente sonora puntual emite un sonido uniformemente en todas direcciones. El nivel de intensidad a una distancia de 2.0 m es de 100 dB. ¿Cuál es la potencia sonora de la fuente emisora?

En primer término note que la energía emitida por la fuente se puede considerar como un flujo que pasa por una superficie esférica en cuyo centro se localiza la fuente sonora. Por tanto, si encontramos la razón de flujo a través de tal superficie, éste será igual al flujo emitido por la fuente. Tome una esfera concéntrica de 2.0 m. Nosotros sabemos que el nivel de intensidad sobre la superficie es de 100 dB. Se puede demostrar que equivale a $I = 0.010\ \text{W/m}^2$. Entonces, la energía que fluye en cada segundo por cada m^2 de superficie es 0.010 W. Por tanto, la energía que fluye a través de la superficie esférica será $I(4\pi r^2)$, donde $I = 0.010\ \text{W/m}^2$ y $r = 2.0$ m

$$\text{Potencia emitida por la fuente} = (0.010\ \text{W/m}^2)(4\pi)(2\ \text{m})^2 = 0.50\ \text{W}$$

Note que la potencia emitida por la fuente es muy pequeña aun con una fuente tan intensa.

23.15 Un mecanógrafo escribe enérgicamente en un cuarto dando origen a un nivel de intensidad promedio de 60.0 dB. ¿Cuál será el nivel de intensidad en decibeles si tres mecanógrafos igualmente ruidosos están trabajando?

Si cada mecanógrafo escribe emitiendo la misma cantidad de energía sonora, entonces el nivel de intensidad sonora final I_f debe ser tres veces la intensidad inicial I_i. Entonces tendremos

$$\beta_f = \log\left(\frac{I_f}{I_0}\right) = \log I_f - \log I_0$$

y

$$\beta_i = \log I_i - \log I_0$$

Restando las dos ecuaciones da

$$\beta_f - \beta_i = \log I_f - \log I_i$$

de donde

$$\beta_f = \beta_i + \log\left(\frac{I_f}{I_i}\right) = 60.0\,\text{dB} + \log 3 = 60.5\,\text{dB}$$

El nivel de intensidad sonora, por ser una escala logarítmica, se eleva lentamente con el número de mecanógrafos.

23.16 Un automóvil que se mueve a 30.0 m/s se acerca a la sirena de una fábrica que tiene una frecuencia de 500 Hz. *a*) Si la rapidez del sonido en el aire es de 340 m/s, ¿cuál es la frecuencia aparente de la sirena escuchada por el conductor? *b*) Repetir para el caso en que el automóvil se aleja de la fábrica con la misma rapidez.

a)
$$f_o = f_s\frac{\upsilon + \upsilon_o}{\upsilon - \upsilon_s} = (500\,\text{Hz})\frac{340\,\text{m/s} + 30.0\,\text{m/s}}{340\,\text{m/s} - 0} = 544\,\text{Hz}$$

b)
$$f_o = f_s\frac{\upsilon + \upsilon_o}{\upsilon - \upsilon_s} = (500\,\text{Hz})\frac{340\,\text{m/s} + (-30.0\,\text{m/s})}{340\,\text{m/s} - 0} = 456\,\text{Hz}$$

23.17 Un automóvil se mueve a 20 m/s haciendo sonar el claxon ($f = 1200$ Hz) y persigue a otro automóvil que se mueve a una velocidad de 15 m/s. ¿Cuál es la frecuencia aparente del claxon escuchada por el conductor perseguido? Tome la rapidez del sonido como 340 m/s.

$$f_o = f_s\frac{\upsilon + \upsilon_o}{\upsilon - \upsilon_s} = (1200\,\text{Hz})\frac{340 + (-15)}{340 - 20} = 1.22\,\text{kHz}$$

23.18 Cuando dos diapasones se hacen vibrar simultáneamente producen una pulsación cada 0.30 s. *a*) ¿Cuál es la diferencia entre las frecuencias? *b*) Un pedazo de goma de mascar se pega a uno de los brazos de un diapasón. Ahora se tiene una pulsación cada 0.40 s. ¿A cuál de los diapasones se le pegó la goma de mascar: al de baja o al de alta frecuencia?

El número de pulsaciones por segundo es igual a la diferencia de frecuencias.

a)
$$\text{Diferencia de frecuencias} = \frac{1}{0.30\,\text{s}} = 3.3\,\text{Hz}$$

b)
$$\text{Diferencia de frecuencias} = \frac{1}{0.40\,\text{s}} = 2.5\,\text{Hz}$$

Al pegar la goma de mascar al diapasón se incrementa su masa y en consecuencia disminuye la frecuencia de vibración. Esta disminución en la frecuencia ocasiona que su valor se aproxime al de la frecuencia del otro diapasón. Por consiguiente al diapasón de mayor frecuencia se le pegó la goma de mascar.

23.19 Un diapasón con una frecuencia de 400 Hz se aleja de un observador y al mismo tiempo se acerca a una pared plana con una rapidez de 2.0 m/s. ¿Cuál es la frecuencia aparente *a*) de las ondas sonoras no reflejadas que van directamente al observador y *b*) la de las ondas sonoras que van al observador después de reflejarse? *c*) ¿Cuántas pulsaciones por segundo se escuchan? Suponga que la velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s.

a) El diapasón se aleja del observador, entonces

$$f_o = f_s \frac{v + v_o}{v - v_s} = (400\ \text{Hz}) \frac{340\ \text{m/s} + 0}{340\ \text{m/s} - (-2.0\ \text{m/s})} = 397.7\ \text{Hz} = 398\ \text{Hz}$$

b) Las crestas de las ondas que llegan a la pared están más juntas de lo que normalmente se encuentran, ya que el diapasón se mueve hacia la pared. Por lo tanto, las ondas reflejadas aparentan venir de una fuente que se aproxima.

$$f_o = f_s \frac{v + v_o}{v - v_s} = (400\ \text{Hz}) \frac{340\ \text{m/s} + 0}{340\ \text{m/s} - 2.0\ \text{m/s}} = 402.4\ \text{Hz} = 402\ \text{Hz}$$

c) Pulsaciones/s = diferencia entre las frecuencias = (402.4 − 397.7) Hz = 4.7 pulsaciones/s

23.20 En la Fig. 23-1, S_1 y S_2 son dos fuentes sonoras idénticas. La emisión de las fuentes es simultánea (las fuentes están en fase). ¿Para qué valores de $L_1 - L_2$ se escuchará un sonido fuerte en el punto P?

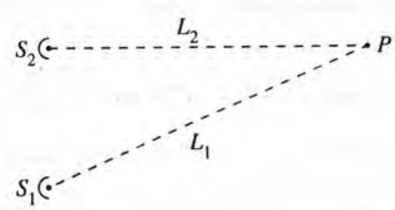


Fig. 23-1

Si $L_1 = L_2$, entonces el tiempo que tardan las ondas emitidas por las dos fuentes en llegar al punto P es el mismo. Las crestas de una onda aparecen en el punto P en igual tiempo que las de la otra onda. Entonces las ondas estarán en fase en P y el resultado será un sonido muy fuerte.

Si $L_1 = L_2 + \lambda$ entonces las ondas emitidas por S_1 estarán retrasadas en el punto P una longitud de onda respecto de las ondas emitidas por la fuente S_2. Como las ondas se repiten cada longitud de onda, las crestas de las ondas emitidas por S_1 alcanzarán el punto P al mismo tiempo que las crestas de las ondas emitidas por S_2 lo hacen. Una vez más las ondas estarán en fase en P y se escuchará un sonido fuerte.

En general, el ruido se escuchará en P cuando $L_1 - L_2 = \pm n\lambda$, donde n es un entero.

23.21 Las dos fuentes sonoras de la Fig. 23-1 oscilan en fase. Un ruido se escucha en P cuando $L_1 = L_2$. Conforme la distancia L_1 aumenta lentamente, se escucha un sonido débil cuando $L_1 - L_2$ toma los valores de 20.0 cm, 60.0 cm y 100 cm. ¿Cuál es la frecuencia de la fuente sonora si la rapidez del sonido es 340 m/s?

El sonido más débil será escuchado en P cuando una cresta de S_1 y un valle de S_2 lleguen al mismo tiempo. Esto sucederá si $L_1 - L_2$ es $\frac{1}{2}\lambda$, o $\lambda + \frac{1}{2}\lambda$, o $2\lambda + \frac{1}{2}\lambda$, y así sucesivamente. Entonces L_1 se incrementará en λ entre sonidos débiles, y de los datos se puede ver que $\lambda = 0.400$ m. Entonces, de $\lambda = \upsilon/f$,

$$f = \frac{\upsilon}{\lambda} = \frac{340\,\text{m/s}}{0.400\,\text{m}} = 850\,\text{Hz}$$

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

23.22 Tres segundos después de que se dispara una pistola, la persona que lo hizo escuchó un eco. ¿Qué tan lejos se encontraba la pared que reflejó el sonido del disparo? Use 340 m/s como la rapidez del sonido. *Resp.* 510 m

23.23 ¿Cuál es la rapidez del sonido en el aire cuando la temperatura es de 31 °C? *Resp.* 0.35 km/s

23.24 El impacto de un proyectil disparado a un blanco que se encuentra a 800 m de distancia se escucha 5.0 s después de salir de la pistola. Calcular la velocidad horizontal promedio del proyectil. La temperatura del aire es 20 °C. *Resp.* 0.30 km/s

23.25 En un experimento para determinar la rapidez del sonido, dos observadores, A y B, estaban apostados a 5.00 km uno del otro. Cada uno tenía una pistola y un cronómetro. El observador A escucha el disparo de B 15.5 s después de ver el flamazo. Más tarde, A dispara su pistola y B escucha el disparo 14.5 s después de ver el flamazo. Determine la rapidez del sonido y la componente de la velocidad del viento a lo largo de la línea que une a los observadores. *Resp.* 334 m/s, 11.1 m/s

23.26 Un disco tiene a lo largo de su circunferencia 40 hoyos y gira a razón de 1200 rpm. Determinar la frecuencia y la longitud de onda del tono producido por el disco cuando un chorro de aire golpea contra él. La temperatura es 15 °C. *Resp.* 0.80 kHz, 0.43 m

23.27 Encuéntrese la rapidez del sonido en dióxido de carbono ($M = 44$ kg/kmol, $\gamma = 1.30$) a una presión de 0.50 atm y a una temperatura de 400 °C. *Resp.* 0.41 km/s

23.28 Calcular la masa molecular M de un gas para el cual $\gamma = 1.40$ y la rapidez del sonido en él es de 1260 m/s a 0 °C. *Resp.* 2.00 kg/kmol (hidrógeno)

23.29 En condiciones normales (TPE), la rapidez del sonido en el aire es 331 m/s. Determinar la rapidez del sonido en hidrógeno en TPE si el peso específico del hidrógeno relativo al aire es 0.069 0 y $\gamma = 1.40$ para ambos gases. *Resp.* 1.26 km/s

23.30 El helio es un gas monoatómico que tiene una densidad de 0.179 kg/m^3 a una presión de 76.0 cm de mercurio y a una temperatura de 0 °C. Calcular la rapidez de las ondas de compresión (sonido) en helio a esta temperatura y presión. *Resp.* 970 m/s

23.31 Una barra cuyas dimensiones son 1.00 cm^2 × 200 cm y masa 2.00 kg está prensada en su centro. Cuando vibra longitudinalmente emite su tono fundamental en unísono con un diapasón que oscila a 1000 vibraciones/s. ¿Cuánto se alargará la barra si, estando sujeta de un extremo, se aplica en el otro extremo una fuerza de 980 N? *Resp.* 0.123 m

23.32 Encontrar la rapidez de una onda de compresión que se propaga en una barra metálica que tiene un módulo de Young de 1.20×10^{10} N/m^2 y una densidad de 8920 kg/m^3. *Resp.* 1.16 km/s

23.33 Un incremento de 100 kPa en la presión ocasiona que un volumen de agua disminuya en 5×10^{-3} por ciento de su volumen original. *a*) ¿Cuál es el módulo volumétrico del agua? *b*) ¿Cuál es la rapidez del sonido (ondas de compresión) en el agua? *Resp.* *a*) 2×10^9 N/m^2; *b*) 1 km/s

23.34 Un sonido tiene una intensidad de 5.0×10^{-7} W/m^2. ¿Cuál es el nivel de intensidad en decibeles? *Resp.* 57 dB

23.35 Una persona que maneja una cortadora de hierba escucha el ruido de la cortadora con una intensidad de 2.00×10^{-2} W/m^2. ¿Qué nivel de intensidad en decibeles escucha la persona? *Resp.* 103 dB

23.36 Una banda que toca en un cuarto fácilmente puede alcanzar un nivel de intensidad de 107 dB. ¿A cuánto equivalen 107 dB de nivel de intensidad en W/m? *Resp.* 0.050 0 W/m^2

23.37 Un susurro tiene un nivel de intensidad de aproximadamente 15 dB. ¿Cuál es la intensidad en W/m que corresponde a este nivel de dB? *Resp.* 3.2×10^{-11} W/m^2

23.38 ¿Qué sonido tiene un nivel de intensidad de 3.0 dB mayor que un sonido cuya intensidad es 10 μW/cm^2? *Resp.* 20 μW/cm^2

23.39 Calcular la intensidad de una onda sonora en aire a 0 °C y a 1.00 atm si su amplitud es de 0.002 0 mm y tiene una longitud de onda de 66.2 cm. La densidad del aire en condiciones normales TPE es 1.293 kg/m^3. *Resp.* 8.4 mW/m^2

23.40 ¿Cuál es la amplitud de oscilación de un haz de ruido que tiene una frecuencia de oscilación de 8000 Hz si su nivel de intensidad es de 62 dB? Suponga que el aire está a 15 °C y tiene una densidad 1.29 kg/m^3. *Resp.* 1.7×10^{-9} m

23.41 Un sonido tiene un nivel de intensidad de 75.0 dB mientras que un segundo tiene un nivel de 72.0 dB. ¿Cuál es el nivel de intensidad cuando los dos sonidos se combinan? *Resp.* 76.8 dB

23.42 Un tubo de órgano está afinado para emitir una frecuencia de 196.00 Hz. Cuando éste y la cuerda G de un violín suenan juntos, se escuchan 10 pulsaciones en un tiempo de 8 s. Las pulsaciones se hacen más lentas a medida que la cuerda del violín se tensa lentamente. ¿Cuál era la frecuencia original de la cuerda de violín? *Resp.* 194.75 Hz

23.43 Una locomotora que se mueve a 30.0 m/s se aproxima a una persona que se encuentra parada a un lado de la vía, alejándose posteriormente. Su silbato emite un tono de frecuencia 2.00 kHz. ¿Qué frecuencia escuchará la persona *a*) conforme se aproxima el tren y *b*) al alejarse? La velocidad del sonido es 340 m/s. *Resp.* *a*) 2.19 kHz; *b*) 1.84 kHz

23.44 Dos carros que viajan en direcciones opuestas se aproximan entre sí con una rapidez v. El claxon de uno de los automóviles suena ($f = 3.0$ kHz) y es escuchado por el chofer del otro automóvil con una frecuencia de 3.4 kHz. Calcular la velocidad de cada automóvil si la rapidez del sonido es 340 m/s. *Resp.* 21 m/s

23.45 Para determinar la rapidez de un oscilador armónico, se envía un haz de sonido a lo largo de la línea de movimiento del oscilador. El sonido se refleja regresando sobre su misma trayectoria y llegando a un sistema de detección. El sonido es emitido con una frecuencia de 8000.0 Hz. El detector encuentra que la señal reflejada tiene una frecuencia entre 8003.1 Hz y 7996.9 Hz. ¿Cuál es la máxima rapidez del oscilador? Tome la rapidez del sonido como 340 m/s. *Resp.* 0.132 m/s

23.46 En la Fig. 23-1 se muestran dos fuentes emisoras idénticas que emiten ondas hacia un punto P. Las ondas que salen de las fuentes están en fase y su longitud de onda es 60 cm. Si $L_2 = 200$ cm, calcular el valor de L_1 para el cual *a*) se escucha un máximo de sonido en P y *b*) se oye un mínimo de sonido en P. *Resp.* *a*) $(200 \pm 60n)$ cm cuando $n = 0, 1, 2,\ldots$; *b*) $(230 \pm 60n)$ cm, cuando $n = 0, 1, 2,\ldots$

23.47 Las dos fuentes sonoras mostradas en la Fig. 23-2 emiten haces sonoros idénticos ($\lambda = 80$ cm) de una hacia la otra. Ambas emiten una cresta al mismo tiempo (las fuentes están en fase). El punto P está en la posición de un máximo. A medida que una persona se mueve de P hacia Q, el sonido disminuye en intensidad, *a*) ¿A qué distancia de P se escuchará el primer mínimo? *b*) ¿A qué distancia de P se escuchará nuevamente un máximo? *Resp.* *a*) 20 cm; *b*) 40 cm

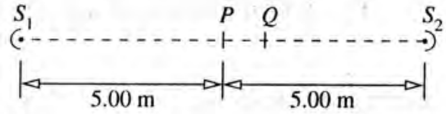


Fig. 23-2

capítulo 24

Ley de Coulomb y campos eléctricos

LEY DE COULOMB: Suponga que dos cargas puntuales, q y q', se encuentran a una distancia r de separación en el vacío. *Si q y q'* tienen el mismo signo, las dos cargas se repelen entre sí; si poseen signos opuestos, entonces se atraen una a la otra. La fuerza que experimenta una carga debido a la otra está dada por la *ley de Coulomb*,

$$F_E = k\frac{qq'}{r^2} \quad \text{(en el vacío)}$$

Como siempre en el SI, las distancias son medidas en metros y las fuerzas en newtons. En el SI la unidad de carga q es el *coulomb* (C). La constante k de la ley de Coulomb tiene el valor de

$$k = 8.988 \times 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$$

la cual se acostumbra aproximar a $9.0 \times 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$. A menudo se reemplaza k por $1/4\pi\epsilon_0$, donde $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$ se llama la *permisividad de espacio vacío* (*libre*). Entonces, en términos de ésta, la ley de Coulomb para el vacío queda

$$F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq'}{r^2} \quad \text{(en el vacío)}$$

Cuando el medio que rodea las cargas no es el vacío, las fuerzas que se originan por las cargas inducidas en el material reducen la fuerza entre las cargas puntuales. Si el material tiene una *constante dieléctrica K*, entonces ϵ_0 en la ley de Coulomb debe ser sustituida por $K\epsilon_o = \epsilon$, donde ϵ es llamada *permisividad del material.* Entonces

$$F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{qq'}{r^2} = \frac{k}{K}\frac{qq'}{r^2}$$

Para el vacío, $K = 1$; para el aire $K = 1.000\,6$.

La ley de Coulomb también se aplica a casos de cascarones y esferas uniformemente cargadas. En estos casos, r, la distancia entre los dos centros de las esferas debe ser mayor que la suma de los radios de la misma; es decir, que las cargas deben estar separadas.

LA CARGA ESTÁ CUANTIZADA: La magnitud de la carga más pequeña en el universo se denota por e (llamada *cuanto de carga*), donde $e = 1.602\ 18 \times 10^{-19}$ C. Todas las cargas son múltiples enteros de e. El electrón tiene una carga de $-e$, mientras que la del protón es $+e$. Aunque existen buenas razones para creer que cargas con magnitudes de $e/3$ y $2e/3$ son posibles, sólo existen en los sistemas ligados que tienen una carga neta igual a un múltiplo entero de e.

CONSERVACIÓN DE LA CARGA: La suma algebraica de la carga en el universo es constante. Cuando se crea una partícula de carga $+e$, simultáneamente se origina otra pero de carga $-e$. Cuando una partícula con carga $+e$ desaparece, otra con carga $-e$ también desaparece. Es decir, la carga neta del universo permanece constante.

EL CONCEPTO DE CARGA DE PRUEBA: Una *carga de prueba* es una carga muy pequeña que se puede usar al hacer mediciones en un sistema eléctrico. Se supone que esa carga, que es diminuta tanto en magnitud como en tamaño físico, tiene un efecto despreciable sobre su medio ambiente.

UN CAMPO ELÉCTRICO existe en cualquier punto del espacio donde una carga de prueba, al ser colocada en ese lugar, experimenta una fuerza eléctrica. La dirección del campo eléctrico en dicho punto es la misma que la de la fuerza experimentada en ese sitio por una carga de prueba *positiva*.

Los campos eléctricos pueden ser esbozados por las líneas del mismo nombre. La línea a través de un punto tiene la misma dirección que el campo eléctrico en dicho lugar. Donde las líneas están más juntas unas de otras, la intensidad del campo eléctrico es mayor. Las líneas de campo salen de las cargas positivas (ya que éstas repelen la carga de prueba positiva) y llegan a las cargas negativas (porque éstas atraen a la carga de prueba positiva).

LA INTENSIDAD ELÉCTRICA ($\vec{\mathbf{E}}$) (también llamada *intensidad de campo eléctrico*) en un punto es igual a la fuerza experimentada por una carga de prueba positiva colocada en ese punto. Dado que la intensidad eléctrica es una fuerza (por unidad de carga), se trata de un vector. Las unidades de $\vec{\mathbf{E}}$ son N/C o (véase capítulo 25) V/m.

Si una carga q se coloca en un punto donde el campo eléctrico es $\vec{\mathbf{E}}$, la carga experimentará una fuerza $\vec{\mathbf{F}}_E$ dada por

$$\vec{\mathbf{F}}_E = q\vec{\mathbf{E}}$$

Si la carga q es negativa, entonces $\vec{\mathbf{F}}_E$ será opuesta en sentido a $\vec{\mathbf{E}}$.

INTENSIDAD ELÉCTRICA DEBIDA A UNA CARGA PUNTUAL: Para calcular la intensidad eléctrica E (magnitud asignada a $\vec{\mathbf{E}}$) debida a una carga puntual q, se utilizará la ley de Coulomb. Si la carga puntual q' se coloca a una distancia r de la carga q, ésta experimentará una fuerza

$$F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{qq'}{r^2} = q'\left(\frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q}{r^2}\right)$$

Pero si la carga puntual q' se coloca en un punto donde el campo eléctrico es E, entonces la fuerza sobre q' es

$$F_E = q' E$$

Al comparar estas dos expresiones para F_E, se observa que

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2}$$

Ésta es la intensidad del campo eléctrico a una distancia de una carga puntual q. La misma relación se aplica para los puntos exteriores de una carga esférica finita q. Para q positiva, E es positivo y $\vec{\mathbf{E}}$ está dirigido radialmente hacia afuera; para q negativa, E es negativo y $\vec{\mathbf{E}}$ está dirigido radialmente hacia adentro.

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN: La fuerza que se ejerce sobre una carga debido a la presencia de otras cargas es la suma vectorial de las fuerzas coulombianas que actúan sobre ella, ocasionada por la presencia de aquéllas. De la misma manera, la intensidad eléctrica $\vec{\mathbf{E}}$ en un punto debida a varias cargas es la suma vectorial de las intensidades eléctricas debidas a las cargas individuales.

PROBLEMAS RESUELTOS

24.1 Dos monedas reposan sobre una mesa, con una separación de 1.5 m y contienen cargas idénticas. ¿De qué magnitud es la carga en cada una si una de las monedas experimenta una fuerza de 2 N?

El diámetro de las monedas es pequeño comparado con la separación de 1.5 m. Se puede suponer que las monedas son cargas puntuales. La ley de Coulomb, $F_E = (k/K)q_1q_2/r^2$, da con (K aproximadamente = 1.00)

$$q_1q_2 = q^2 = \frac{F_E r^2}{k} = \frac{(2\text{ N})(1.5\text{ m})^2}{9 \times 10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2} = 5 \times 10^{-10}\text{ C}^2$$

de donde $q = 2 \times 10^{-5}$ C.

24.2 Repítase el problema 24.1 si la separación entre las monedas es de 1.5 m y se encuentran dentro de una tina de agua. La constante dieléctrica del agua es de aproximadamente 80.

De la ley de Coulomb,

$$F_E = \frac{k}{K}\frac{q^2}{r^2}$$

donde K, la constante dieléctrica en este caso es de 80. Entonces,

$$q = \sqrt{\frac{F_E r^2 K}{k}} = \sqrt{\frac{(2\text{ N})(1.5\text{ m})^2(80)}{9 \times 10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2}} = 2 \times 10^{-4}\text{ C}$$

24.3 Un núcleo de helio tiene una carga de $+2e$ y uno de neón de $+10e$, donde e es el cuanto de carga, 1.60×10^{-19} C. Encuéntrese la fuerza de repulsión ejercida sobre cada uno de ellos debido al otro, cuando se encuentran apartados 3.0 nanómetros (1 nm = 10^{-9} m). Considérese que se encuentran en el vacío.

Los núcleos tienen radios del orden de 10^{-15} m. En este caso puede considerarse a los núcleos como cargas puntuales. Entonces

$$F_E = k\frac{qq'}{r^2} = (9.0 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})\frac{(2)(10)(1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{(3.0 \times 10^{-9}\ \mathrm{m})^2} = 5.1 \times 10^{-10}\ \mathrm{N} = 0.51\ \mathrm{nN}$$

24.4 En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, el electrón ($q = -e$) circunda a un protón ($q' = e$) en una órbita de radio 5.3×10^{-11} m. La atracción del protón por el electrón aporta la fuerza centrípeta necesaria para mantener al electrón en la órbita. Encuéntrese *a*) la fuerza de atracción eléctrica entre las partículas y *b*) la rapidez del electrón. La masa del electrón es 9.1×10^{-31} kg.

a)
$$F_E = k\frac{qq'}{r^2} = (9.0 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})\frac{(1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{(5.3 \times 10^{-11}\ \mathrm{m})^2} = 8.2 \times 10^{-8}\ \mathrm{N} = 82\ \mathrm{nN}$$

b) La fuerza encontrada en *a*) es la fuerza centrípeta, mv^2/r. Por tanto,

$$8.2 \times 10^{-8}\ \mathrm{N} = \frac{mv^2}{r}$$

de la cual

$$v = \sqrt{\frac{(8.2 \times 10^{-8}\ \mathrm{N})(r)}{m}} = \sqrt{\frac{(8.2 \times 10^{-8}\ \mathrm{N})(5.3 \times 10^{-11}\ \mathrm{m})}{9.1 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}}} = 2.2 \times 10^6\ \mathrm{m/s}$$

24.5 Tres cargas puntuales se colocan sobre el eje x como se muestra en la Fig. 24-1. Determínese la fuerza neta sobre la carga de $-5\ \mu$C ocasionada por las otras dos cargas.

Ya que las cargas diferentes se atraen, las fuerzas en la carga -5μC son como se muestran. Las *magnitudes de* $\vec{\mathbf{F}}_{E3}$ y de $\vec{\mathbf{F}}_{E8}$ están dadas por la ley de Coulomb:

$$F_{E3} = (9.0 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})\frac{(3.0 \times 10^{-6}\ \mathrm{C})(5.0 \times 10^{-6}\ \mathrm{C})}{(0.20\ \mathrm{m})^2} = 3.4\ \mathrm{N}$$

$$F_{E8} = (9.0 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})\frac{(8.0 \times 10^{-6}\ \mathrm{C})(5.0 \times 10^{-6}\ \mathrm{C})}{(0.30\ \mathrm{m})^2} = 4.0\ \mathrm{N}$$

Nótense dos observaciones sobre los cálculos: 1) se utilizaron las unidades apropiadas (metros y coulombs). 2) Ya que sólo se desean las magnitudes de las fuerzas, *no se consideraron los signos de las cargas*. (Es decir, se utilizaron sus valores absolutos.) La dirección de cada fuerza está dada en el diagrama, la cual se obtuvo de la inspección de la situación.

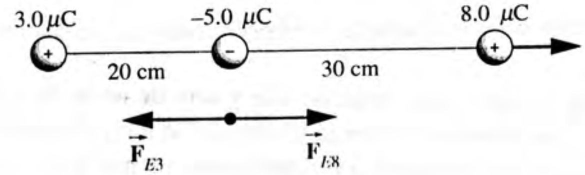


Fig. 24-1

Del diagrama, la fuerza resultante sobre la carga del centro es

$$F_E = F_{E8} - F_{E3} = 4.0\ \text{N} - 3.4\ \text{N} = 0.6\ \text{N}$$

y en la dirección de $+x$.

24.6 Determínese la razón de la fuerza eléctrica de Coulomb F_E a la fuerza gravitacional F_G entre dos electrones en el vacío.

De la ley de Coulomb y la ley de Newton de gravitación,

$$F_E = k\frac{q^2}{r^2} \quad \text{y} \quad F_G = G\frac{m^2}{r^2}$$

Por lo tanto,

$$\frac{F_E}{F_G} = \frac{kq^2/r^2}{Gm^2/r^2} = \frac{kq^2}{Gm^2}$$

$$= \frac{(9.0\times10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1.6\times10^{-19}\ \text{C})^2}{(6.67\times10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(9.1\times10^{-31}\ \text{kg})^2} = 4.2\times10^{42}$$

Como se puede observar, la fuerza eléctrica es mucho más intensa que la fuerza gravitacional.

24.7 Como se muestra en la Fig. 24-2, dos bolas idénticas, cada una de masa 0.10 g, portan cargas idénticas y están suspendidas por un hilo de igual longitud. La posición que se muestra es la de equilibrio. Encuéntrese la carga en cada bola.

Considérese la bola de la izquierda. Se mantiene en equilibrio bajo la acción de tres fuerzas: 1) la tensión de la cuerda; 2) la fuerza de gravedad,

$$mg = (1.0\times10^{-4}\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2) = 9.8\times10^{-4}\ \text{N}$$

y 3) la fuerza de repulsión de Coulomb F_E.

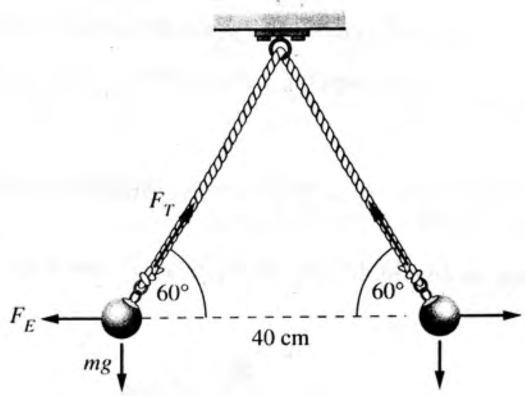


Fig. 24-2

Escribiendo $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ para la bola de la izquierda, se obtiene

$$F_T \cos 60° - F_E = 0 \qquad \text{y} \qquad F_T \operatorname{sen} 60° - mg = 0$$

De la segunda ecuación,

$$F_T = \frac{mg}{\operatorname{sen} 60°} = \frac{9.8 \times 10^{-4}\ \text{N}}{0.866} = 1.13 \times 10^{-3}\ \text{N}$$

Sustituyendo en la primera ecuación se obtiene

$$F_E = F_T \cos 60° = (1.13 + 10^{-3}\ \text{N})(0.50) = 5.7 + 10^{-4}\ \text{N}$$

Pero ésta es la fuerza de Coulomb, kqq'/r^2. Por lo tanto,

$$qq' = q^2 = \frac{F_E r^2}{k} = \frac{(5.7 \times 10^{-4}\ \text{N})(0.40\ \text{m})^2}{9.0 \times 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2}$$

de donde $q = 0.10\ \mu\text{C}$.

24.8 Las cargas de la Fig. 24-3 son estacionarias. Encuéntrese la fuerza ejercida sobra la carga de 4.0 μC, debida a las otras dos cargas.

De la ley de Coulomb se tiene

$$F_{E2} = k\frac{qq'}{r^2} = (9.0 \times 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(2.0 \times 10^{-6}\ \text{C})(4.0 \times 10^{-6}\ \text{C})}{(0.20\ \text{m})^2} = 1.8\ \text{N}$$

$$F_{E3} = k\frac{qq'}{r^2} = (9.0 \times 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(3.0 \times 10^{-6}\ \text{C})(4.0 \times 10^{-6}\ \text{C})}{(0.20\ \text{m})^2} = 2.7\ \text{N}$$

Las componentes de la fuerza resultante sobre la carga de 4 μC

$$F_{Ex} = F_{E2}\cos 60° - F_{E3}\cos 60° = (1.8 - 2.7)(0.50)\text{N} = -0.45\text{ N}$$

$$F_{Ey} = F_{E2}\text{ sen } 60° + F_{E3}\text{ sen } 60° = (1.8 + 2.7)(0.866)\text{ N} = 3.9\text{ N}$$

así

$$F_E = \sqrt{F_{Ex}^2 + F_{Ey}^2} = \sqrt{(0.45)^2 + (3.9)^2}\text{ N} = 3.9\text{ N}$$

La resultante forma un ángulo de $\tan^{-1}(0.45/3.9) = 7°$ con el eje y positivo, que es lo mismo que $\theta = 97°$.

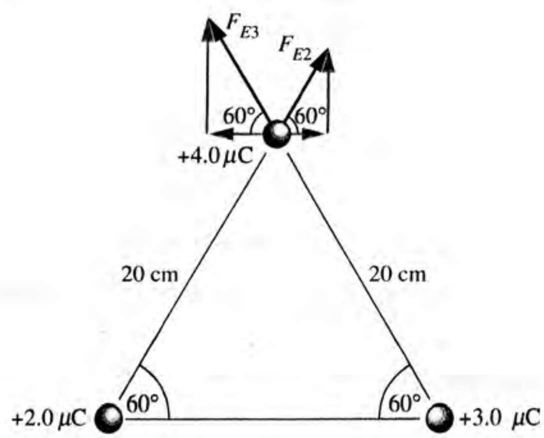


Fig. 24-3

24.9 Dos cargas están colocadas sobre el eje x: +3.0 μC en $x = 0$ y −5.0 μC en $x = 40$ cm. ¿ Dónde debe colocarse una tercera carga q si la fuerza resultante sobre ésta debe ser cero?

La situación se muestra en la Fig. 24-4. Se sabe que q debe estar colocada sobre el eje x. (¿Por qué?) Supóngase que q es positiva. Cuando se coloca en el intervalo BC, las dos fuerzas sobre ella tienen el mismo sentido y no se cancelan. Al colocarla en un punto a la derecha de C, la fuerza de atracción de la carga de −5.0 μC siempre es mayor que la repulsión de la carga de +3.0 μC. Por lo tanto, la fuerza sobre q no puede ser cero en esa región. Sólo en la región a la izquierda de B es posible que ocurra una cancelación. (¿Sería capaz de demostrar que esto también es verdad si q es negativa?)

Para q colocada como se muestra, cuando la fuerza neta sobre ella es cero, se tiene $F_3 = F_5$ y así, para las distancias en metros,

$$k\frac{q(3.0\times 10^{-6}\text{ C})}{d^2} = k\frac{q(5.0\times 10^{-6}\text{ C})}{(0.40\text{ m} + d)^2}$$

Después de cancelar k, q y 10^{-6} C de cada lado, se multiplica en cruz y se obtiene

$$5d^2 = 3.0(0.40 + d)^2 \quad \text{o} \quad d^2 - 1.2d - 0.24 = 0$$

Utilizando la fórmula cuadrática, encontramos

$$d = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1.2 \pm \sqrt{1.44 + 0.96}}{2} = 0.60 \pm 0.775\,\mathrm{m}$$

Por lo tanto, se tienen dos valores para d: 1.4 m y −0.18 m. La primera es la respuesta correcta; la segunda da el punto en BC donde las fuerzas poseen la misma magnitud, pero no se cancelan.

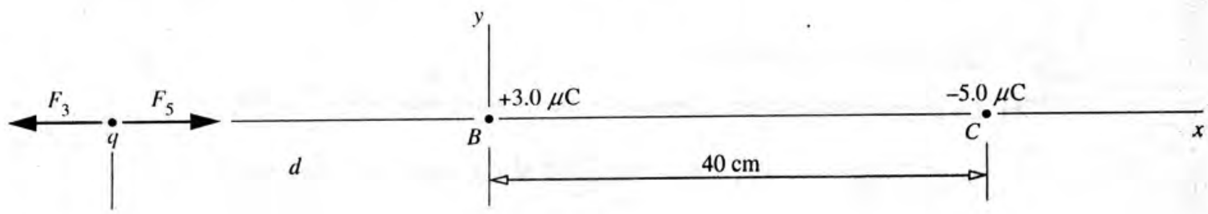


Fig. 24-4

24.10 Calcúlese *a*) la intensidad del campo eléctrico E en el aire a una distancia de 30 cm de una carga puntual $q_1 = 5.0 \times 10^{-9}$ C. *b*) la fuerza sobre una carga $q_2 = 4.0 \times 10^{-10}$ C colocada a 30 cm de q_1 y *c*) la fuerza sobre la carga $q_3 = -4.0 \times 10^{-10}$ C colocada a 30 cm de q_1 (en ausencia de q_2).

a)
$$E = k\frac{q_1}{r^2} = (9.0 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})\frac{5.0 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}}{(0.30\ \mathrm{m})^2} = 0.50\ \mathrm{kN/C}$$

dirigida hacia afuera de q_1.

b)
$$F_E = Eq_2 = (500\ \mathrm{N/C})(4.0 \times 10^{-10}\ \mathrm{C}) = 2.0 \times 10^{-7}\ \mathrm{N} = 0.20\ \mu\mathrm{N}$$

dirigida hacia afuera de q_1.

c)
$$F_E = Eq_3 = (500\ \mathrm{N/C})(-4.0 \times 10^{-10}\ \mathrm{C}) = -0.20\ \mu\mathrm{N}$$

Esta fuerza está dirigida hacia q_1.

24.11 Para la situación que se muestra en la Fig. 24-5, encuéntrese *a*) la intensidad del campo eléctrico E en el punto P, *b*) la fuerza sobre una carga de -4.0×10^{-8} C colocada en el punto P y *c*) el lugar en donde el campo eléctrico será igual a cero (en ausencia de la carga -4.0×10^{-8} C).

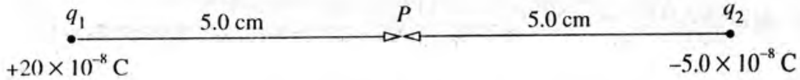


Fig. 24-5

a) Una carga positiva de prueba colocada en el punto *P* será repelida hacia la derecha por la carga positiva q_1 y atraída hacia la derecha por la carga negativa q_2. En virtud de que $\vec{\mathbf{E}}_1$ y $\vec{\mathbf{E}}_2$ tienen el mismo sentido y dirección, pueden sumarse sus magnitudes para obtener la magnitud del campo resultante:

$$E = E_1 + E_2 = k\frac{|q_1|}{r_1^2} + k\frac{|q_2|}{r_2^2} = \frac{k}{r_1^2}\left(|q_1| + |q_2|\right)$$

donde $r_1 = r_2 = 0.05$ m, y $|q_1|$ y $|q_2|$ son los valores absolutos de q_1 y q_2. Entonces.

$$E = \frac{9.0 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2}}{(0.050\ \mathrm{m})^2}(25 \times 10^{-8}\ \mathrm{C}) = 9.0 \times 10^5\ \mathrm{N/C}$$

dirigido hacia la derecha.

b) La carga *q* colocada en el punto *P* experimentará una fuerza *Eq*. Entonces

$$F_E = Eq = (9.0 \times 10^5\ \mathrm{N/C})(-4.0 \times 10^{-8}\ \mathrm{C}) = -0.036\ \mathrm{N}$$

El signo negativo nos indica que la fuerza está dirigida hacia la izquierda. Esto es correcto, ya que el campo eléctrico representa la fuerza sobre una carga positiva. La fuerza sobre una carga negativa es en sentido opuesto al campo.

c) Razonando como en el problema 24.9, se concluye que el campo será cero en algún lugar a la derecha de la carga de -5.0×10^{-8} C. Represéntese la distancia a ese punto desde la carga de -5.0×10^{-8} C, por *d*. En dicho punto,

$$E_1 - E_2 = 0$$

puesto que el campo debido a la carga positiva está dirigido hacia la derecha, mientras el campo de la carga negativa está dirigido hacia la izquierda. Así que

$$k\left(\frac{|q_1|}{r_1^2} - \frac{|q_2|}{r_2^2}\right) = (9.0 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})\left[\frac{20 \times 10^{-8}\ \mathrm{C}}{(d + 0.10\ \mathrm{m})^2} - \frac{5.0 \times 10^{-8}\ \mathrm{C}}{d^2}\right] = 0$$

$$3d^2 - 0.2d - 0.01 = 0$$

lo cual da $d = 0.10$ m y -0.03 m. Sólo el signo positivo tiene significado y por consiguiente $d = 0.10$ m. El punto en cuestión está a 10 cm hacia la derecha de la carga negativa.

24.12 Tres cargas están colocadas sobre tres esquinas de un cuadrado, como se muestra en la Fig. 24-6. Cada lado del cuadrado es de 30.0 cm. Calcúlese $\vec{\mathbf{E}}$ en la cuarta esquina. ¿Cuál sería la fuerza sobre una carga de 6.00 μC situada en la esquina vacante?

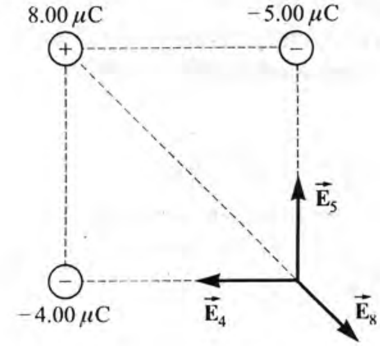


Fig. 24-6

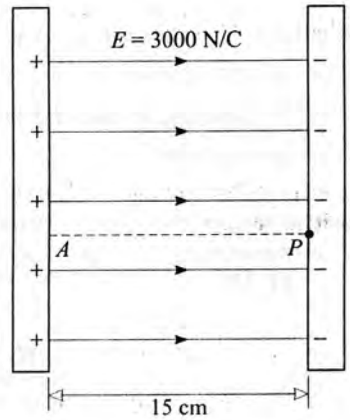


Fig. 24-7

Las contribuciones de las tres cargas al campo en la esquina libre son como se ven en la figura. Obsérvense las direcciones de cada una. Sus magnitudes están dadas por $E = kq/r^2$ y son:

$$E_4 = 4.00 \times 10^5 \text{ N/C} \qquad E_8 = 4.00 \times 10^5 \text{ N/C} \qquad E_5 = 5.00 \times 10^5 \text{ N/C}$$

Ya que el vector E_8 hace un ángulo de 45.0° con la horizontal, se tiene

$$E_x = E_8 \cos 45.0° - E_4 = -1.17 \times 10^5 \text{ N/C}$$
$$E_y = E_5 - E_8 \cos 45.0° = 2.17 \times 10^5 \text{ N/C}$$

Utilizando $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$ y $\tan\theta = E_y/E_x$, se encuentra que $E = 2.47 \times 10^5$ N a 118°.

La fuerza sobre una carga colocada en la esquina vacía simplemente sería $F_E = Eq$. Ya que $q = 6.00 \times 10^{-6}$ C, se tiene $F_E = 1.48$ N a un ángulo de 118°.

24.13 Sean dos placas metálicas en el vacío, separadas 15 cm, como se muestra en la figura 24-7. El campo eléctrico entre las placas es uniforme y tiene una intensidad $E = 3000$ N/C. Un electrón ($q = -e$, $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg) está en reposo en el punto P justamente sobre la superficie de la placa negativa. *a*) ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar la otra placa? *b*) ¿Cuál será la rapidez a la que viajará exactamente antes de que choque?

Las líneas del campo eléctrico muestran la fuerza sobre una carga positiva. (Una carga positiva sería repelida hacia la derecha por la placa positiva y atraída en la misma dirección por una negativa). Un electrón, por ser negativo, experimentará una fuerza en sentido opuesto, hacia la izquierda y de magnitud

$$F_E = |q|\, E = (1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(3000 \text{ N/C}) = 4.8 \times 10^{-16} \text{ N}$$

Debido a esta fuerza, el electrón experimenta una aceleración hacia la izquierda dada por

$$a = \frac{F_E}{m} = \frac{4.8 \times 10^{-16}\text{ N}}{9.1 \times 10^{-31}\text{ kg}} = 5.3 \times 10^{14}\text{ m/s}^2$$

En el problema de movimiento para el electrón que se libera desde la placa negativa y viaja hacia la placa positiva se tiene

$$v_0 = 0 \qquad x = 0.15\text{ m} \qquad a = 5.3 \times 10^{14}\text{ m/s}^2$$

a) De $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ se tiene

$$t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{(2)(0.15\text{ m})}{5.3 \times 10^{14}\text{ m/s}^2}} = 2.4 \times 10^{-8}\text{ s}$$

b) $$v = v_0 + at = 0 + (5.3 \times 10^{14}\text{ m/s}^2)(2.4 \times 10^{-8}\text{ s}) = 1.30 \times 10^7\text{ m/s}$$

Como se verá en el capítulo 41, los efectos relativistas empiezan a ser importantes para una rapidez superior a ésta. Por lo tanto, este tratamiento debe ser modificado para partículas más rápidas.

24.14 Supóngase en la Fig. 24-7 que un electrón se dispara en línea recta hacia arriba desde el punto P con una rapidez de 5×10^6 m/s. ¿A qué distancia sobre el punto A golpea la placa positiva?

Éste es un problema de proyectiles. (Dado que la fuerza gravitacional es muy pequeña comparada con la fuerza eléctrica, se debe ignorar la fuerza de gravedad.) La única fuerza que actúa sobre el electrón después de que se libera es la del campo eléctrico, que equivale a una fuerza horizontal. Se encontró en el problema 24.13*a*, que bajo esta fuerza el electrón tiene un tiempo de vuelo de 2.4×10^{-8} s. El desplazamiento vertical en ese tiempo es

$$(5.0 \times 10^6\text{ m/s})(2.4 \times 10^{-8}\text{ s}) = 0.12\text{ m}$$

El electrón golpea la placa positiva 12 cm arriba del punto A.

24.15 En la Fig. 24-7 un protón ($q = +e$, $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) se dispara con una rapidez de 2.00×10^5 m/s desde A hacia P. ¿Cuál será su rapidez inmediatamente antes de golpear la placa en el punto P?

$$a = \frac{F_E}{m} = \frac{qE}{m} = \frac{(1.60 \times 10^{-19}\text{ C})(3000\text{ N/C})}{1.67 \times 10^{-27}\text{ kg}} = 2.88 \times 10^{11}\text{ m/s}^2$$

Para el problema del movimiento horizontal tenemos

$$v_0 = 2.00 \times 10^5\text{ m/s} \quad x = 0.15\ m \quad a = 2.88 \times 10^{11}\text{ m/s}^2$$

Utilícese $v_f^2 = v_0^2 + 2ax$ para encontrar

$$v_f = \sqrt{v_0^2 + 2ax} = \sqrt{(2.00 \times 10^5\text{ m/s})^2 + (2)(2.88 \times 10^{11}\text{ m/s}^2)(0.15\text{ m})} = 356\text{ km/s}$$

24.16 Dos diminutas pelotas metálicas idénticas tienen cargas q_1 y q_2. La fuerza repulsiva que una ejerce sobre la otra cuando están separadas 20 cm es de 1.35×10^{-4} N. Posteriormente se tocan una a la otra y se vuelven a separar a 20 cm, ahora la fuerza repulsiva es de 1.406×10^{-4} N. Determínese q_1 y q_2.

Dado que la fuerza es repulsiva, q_1 y q_2 son del mismo signo. Después que las pelotas se tocaron, tendrán la misma cantidad de carga, así que cada una tiene una carga de $\frac{1}{2}(q_1 + q_2)$. Escribiendo la ley de Coulomb para las dos situaciones descritas, se tiene

$$0.000\,135\,\mathrm{N} = k\frac{q_1 q_2}{0.040\,\mathrm{m}^2}$$

y

$$0.000\,140\,6\,\mathrm{N} = k\frac{[\frac{1}{2}(q_1 + q_2)]^2}{0.040\,\mathrm{m}^2}$$

Después de sustituir k, estas ecuaciones se reducen a

$$q_1 q_2 = 6.00 \times 10^{-16}\ \mathrm{C}^2 \quad \text{y} \quad q_1 + q_2 = 5.00 \times 10^{-8}\ \mathrm{C}$$

Resolviendo estas ecuaciones simultáneas se obtiene $q_1 = 20$ nC y $q_2 = 30$ nC (o viceversa). Alternativamente, ambas cargas podrían ser negativas.

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

24.17 ¿Cuántos electrones están contenidos en una carga de 1.0 C? ¿Cuál es la masa de los electrones en 1.0 C de carga? *Resp.* 6.2×10^{18} electrones, 5.7×10^{-12} kg

24.18 Si dos cargas iguales de 1 C están separadas en aire por una distancia de 1 km, ¿cuál sería la fuerza entre ellas? *Resp.* 9 kN de repulsión

24.19 Determínese la fuerza entre dos electrones libres separados 1.0 angstrom (10^{-10} m). *Resp.* 23 nN de repulsión

24.20 ¿Cuál es la fuerza de repulsión entre dos núcleos de argón que están separados por una distancia de 1.0 nm (10^{-9} m)? La carga de un núcleo de argón es de $+18e$. *Resp.* 75 nN

24.21 Dos bolas igualmente cargadas están separadas por una distancia de 3 cm en el aire y se repelen con una fuerza de 40 μN. Calcúlese la carga de cada bola. *Resp.* 2 nC

24.22 Tres cargas puntuales se colocan sobre el eje x como sigue: +2.0 μC en $x = 0$, −3.0 μC en $x = 40$ cm, y − 5.0 μC en $x = 120$ cm. Encuéntrese la fuerza *a*) sobre la carga de −3.0 μC, *b*) sobre la carga de −5.0 μC. *Resp.* *a*) −0.55 N; *b*) 0.15 N

24.23 Cuatro cargas puntuales iguales de +3.0 μC se colocan en los cuatro vértices de un cuadrado cuyo lado es de 40 cm. Determínese la fuerza sobre una de las cargas. *Resp.* 0.97 N hacia afuera a lo largo de la diagonal

24.24 Cuatro cargas puntuales de igual magnitud (3.0 μC) se colocan en las esquinas de un cuadrado de 40 cm de lado. Dos, diagonalmente opuestas, son positivas y las otras dos son negativas. Determínese la fuerza sobre una de las cargas negativas. *Resp.* 0.46 N hacia adentro a lo largo de la diagonal

24.25 Cargas de +2.0 +3.0 y −8.0 μC se colocan en los vértices de un triángulo equilátero cuyo lado es de 10 cm. Calcúlese la magnitud de la fuerza que actúa sobre la carga de −8.0 μC debida a las otras dos cargas. *Resp.* 31 N

24.26 Una carga (+5.0 μC) es colocada en $x = 0$ y una segunda carga (+7.0 μC) en $x = 100$ cm. ¿Dónde debe colocarse una tercera carga para que la fuerza neta debida a las otras dos sea cero? *Resp.* en $x = 46$ cm

24.27 Dos diminutas bolas metálicas idénticas portan cargas de +3 nC y −12 nC. Están separadas 3 cm. *a*) Calcúlese la fuerza de atracción. *b*) las bolas se juntan y después se separan a 3 cm. Describa las fuerzas que ahora actúan sobre ellas. *Resp.* *a*) 4×10^{-4} N de atracción; *b*) 2×10^{-4} N de repulsión

24.28 En cierto punto del espacio una carga de +6.0 μC experimenta una fuerza de 2.0 mN en la dirección de $+x$. *a*) ¿Cuál era el campo eléctrico en ese punto antes de que la carga se colocara? *b*) Descríbase la fuerza que experimentaría una carga de −2.0 μC si se situara en el lugar de la carga de +6.0 μC? *Resp.* *a*) 0.33 kN/C en≠ la dirección de $+x$; *b*) 0.67 mN en la dirección de $-x$

24.29 Una carga puntual de -3.0×10^{-5} C se coloca en el origen de coordenadas. Encuéntrese el campo eléctrico en un punto sobre el eje de la x en $x = 5.0$ m. *Resp.* 11 kN/C en dirección de $-x$

24.30 Cuatro cargas de igual magnitud (4.0 μC) se ponen en todas las esquinas de un cuadrado de 20 cm de lado. Determínese el campo eléctrico en el centro del cuadrado *a*) si todas las cargas son positivas, *b*) si los signos de las cargas se alternan alrededor del perímetro del cuadrado, *c*) si las cargas tienen la siguiente secuencia alrededor del cuadrado: más, más, menos, menos. *Resp.* *a*) cero; *b*) cero; *c*) 5.1 MN/C hacia el lado negativo

24.31 Una bola de 0.200 g cuelga de un hilo en un campo eléctrico de 3.00 kN/C dirigido hacia arriba. ¿Cuál es la carga de la bola si la tensión en la cuerda es de *a*) cero y *b*) 4.00 mN? *Resp.* *a*) +653 nC; *b*) −680 nC

24.32 Determínese la aceleración de un protón ($q = +e$, $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) en un campo eléctrico de intensidad 0.50 kN/C. ¿Cuántas veces es más grande esta aceleración que la debida a la gravedad? *Resp.* 4.8×10^{10} m/s^2, 4.9×10^9

24.33 Una pequeña bola de 0.60 g tiene una carga cuya magnitud es 8.0 μC. Está suspendida por un hilo en un campo eléctrico de 300 N/C dirigido hacia abajo. ¿Cuál es la tensión en el hilo si la carga de la bola es *a*) positiva, *b*) negativa? *Resp.* *a*) 8.3 mN; *b*) 3.5 mN

24.34 La pequeña bola que se encuentra en el extremo de un hilo, como se muestra en la Fig. 24-8, tiene una masa de 0.60 g y está en un campo eléctrico horizontal de intensidad 700 N/C. Se encuentra en equilibrio en la posición que se muestra. ¿Cuál es la magnitud y el signo de la carga de la bola? *Resp.* $-3.1\ \mu C$

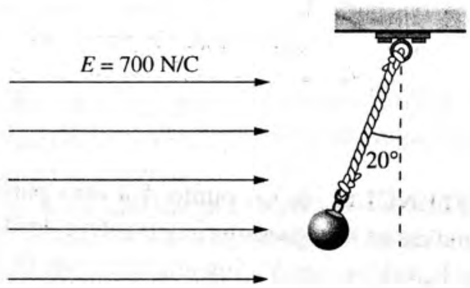


Fig. 24-8

24.35 Un electrón ($q = -e$, $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg) se proyecta en el eje de las x con una rapidez inicial de 3.0×10^6 m/s. Se mueve 45 cm y se detiene debido a un campo eléctrico uniforme en la región. Encuentre la magnitud y dirección del campo. *Resp.* 57 N/C en dirección $+x$

24.36 Una partícula de masa m y carga $-e$ se proyecta con velocidad horizontal υ en un campo eléctrico de intensidad E dirigido hacia abajo. Encuentre *a*) las componentes horizontal y vertical de su aceleración, a_x y a_y; *b*) son desplazamientos horizontal y vertical, x y y, después de un tiempo t; *c*) la ecuación de su trayectoria. *Resp.* *a*) $a_x = 0$, $a_y = Ee/m$; *b*) $x = \upsilon t$, $y = \frac{1}{2}a_y t^2 = \frac{1}{2}(Ee/m)t^2$; *c*) $y = \frac{1}{2}(Ee/m\upsilon^2)x^2$ (una parábola)

capítulo 25

Potencial y capacitancia

LA DIFERENCIA DE POTENCIAL de un punto A a otro punto B es el trabajo que se hace contra la fuerza eléctrica para llevar una carga testigo unitaria y positiva desde A hasta B. Representamos la diferencia de potencial entre A y B por $V_B - V_A$ o por V. Sus unidades son de trabajo por carga (joules/coulomb) y se llaman *volts* (V):

$$1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$$

Ya que el trabajo es un escalar, la diferencia de potencial también lo es. Lo mismo que el trabajo, la diferencia de potencial puede ser positiva o negativa.

El trabajo W que se hace para mover una carga q de un punto A a un segundo punto B es

$$W = q(V_B - V_A) = qV$$

donde se debe dar a la carga los signos apropiados (+ o −). Si tanto $V_B - V_A$ como q son positivos (o negativos), el trabajo realizado es positivo. Si $(V_B - V_A)$ y q tienen signos opuestos, el trabajo efectuado es negativo.

POTENCIAL ABSOLUTO: El potencial absoluto en un punto es el trabajo que se hace contra la fuerza eléctrica para llevar una carga testigo unitaria y positiva desde infinito hasta ese punto. Por consiguiente, el potencial absoluto en un punto B es la diferencia de potencial desde $A = \infty$ hasta B.

Considere una carga puntual q en el vacío y un punto P que se encuentra a una distancia r de la carga puntual. El potencial absoluto en P debido a la carga q es

$$V = k\frac{q}{r}$$

donde $k = 8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ es la constante de Coulomb. El potencial absoluto en infinito (en $r = \infty$) es cero.

Por el principio de superposición y la naturaleza escalar de la diferencia de potencial, el potencial absoluto en un punto debido a un número de cargas puntuales es

$$V = k\sum\frac{q_i}{r_i}$$

donde r_i son las distancias desde las cargas q_i al punto de referencia. Las cargas negativas contribuyen con términos al potencial, mientras que las cargas positivas aportan con términos positivos.

El potencial absoluto debido a una carga esférica uniforme en puntos *fuera* de la esfera o *sobre* su superficie es $V = kq/r$, donde q es la carga de la esfera. Este potencial es el mismo que el producido por una carga puntual q colocada en el centro de la esfera.

ENERGÍA POTENCIAL ELÉCTRICA (EP_E)**:** Para llevar una carga q desde infinito a un punto donde el potencial absoluto es V, se debe realizar un trabajo qV sobre la carga. Este trabajo aparece como energía potencial eléctrica (EP_E) almacenada en la carga.

De la misma manera, cuando se lleva una carga a través de una *diferencia de potencial* V, se debe realizar un trabajo qV sobre la carga, el cual da como resultado un cambio de qV en la EP_E de la carga. Para una *elevación* en el potencial, V será positivo y la EP_E se incrementará si q es positiva. Pero en el caso de una *caída* de potencial, V será negativo y la EP_E de la carga decrecerá si q es positiva.

RELACIÓN ENTRE V Y E: Suponga que en una región del espacio el campo eléctrico es uniforme y está en la dirección x. Llamemos E_x a su magnitud. Como E_x es la fuerza sobre una carga testigo unitaria y positiva, el trabajo que se hace para mover dicha carga a una distancia x es (de la ecuación $W = F_x x$)

$$V = E_x x$$

El campo entre dos placas metálicas con cargas opuestas, de longitud infinita y paralelas, es uniforme. Con esta ecuación podemos relacionar el campo eléctrico E que existe entre las placas y la separación d que hay entre ellas con la diferencia de potencial V: para placas paralelas,

$$V = Ed$$

EL ELECTRÓN VOLT, UNA UNIDAD DE ENERGÍA: El trabajo que se hace para llevar una carga de $+e$ (coulombs) a través de una elevación en el potencial de 1 volt se define como 1 *electrón volt* (eV). Por lo tanto,

$$1\ \text{eV} = (1.602 \times 10^{-19}\ \text{C})(1\ \text{V}) = 1.602 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

Su equivalente,

$$\text{Trabajo o energía (en eV)} = \frac{\text{trabajo (en joules)}}{e}$$

UN CAPACITOR o *condensador* es un dispositivo que almacena carga. Con frecuencia, aunque no siempre, consiste en dos conductores separados por un aislante o dieléctrico. La *capacitancia* (C) de un capacitor se define como

$$\text{Capacitancia} = \frac{\text{magnitud de la carga } q \text{ en cualquier conductor}}{\text{magnitud de la diferencia de potencial } V \text{ entre los conductores}}$$

Para q en coulombs y V en volts, C está en *farads* (F).

CAPACITOR DE PLACAS PARALELAS: En un capacitor de placas paralelas, cada una de área A, y separadas una distancia d, su capacitancia está dada por

$$C = K\epsilon_0 \frac{A}{d}$$

donde $K = \epsilon/\epsilon_0$ (que es adimensional) es la constante dieléctrica (véase capítulo 24) del material no conductor (el *dieléctrico*) entre las placas, y

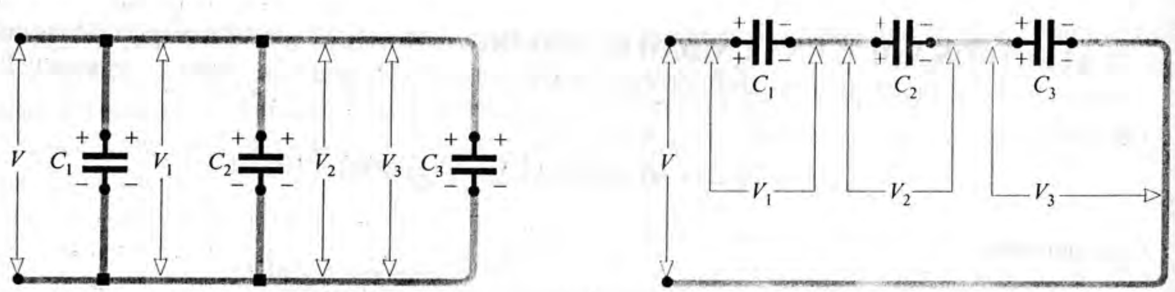
$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2} = 8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m}$$

Para el vacío, $K = 1$, entonces en un capacitor de placas paralelas el espacio entre ellas se llena con un dieléctrico y su capacitancia será K veces la de un capacitor que tiene un vacío entre sus placas. El resultado es válido para todo tipo de capacitores, sin importar su geometría.

CAPACITORES EN PARALELO Y EN SERIE: Como se muestra en la Fig. 25-1, para una combinación en paralelo, la capacitancia equivalente es igual a la suma de las capacitancias individuales, mientras que para una combinación en serie, el recíproco de la capacitancia es igual a la suma de los recíprocos de las capacitancias individuales.

ENERGÍA ALMACENADA EN UN CAPACITOR: La energía PE_E almacenada en un capacitor de capacitancia C que tenga una carga q y una diferencia de potencial V es

$$\mathrm{PE}_E = \frac{1}{2}qV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$



$$q = q_1 + q_2 + q_3$$
$$V = V_1 = V_2 = V_3$$
$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$$

a) Capacitores en paralelo

$$q = q_1 = q_2 = q_3$$
$$V = V_1 + V_2 + V_3$$
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

b) Capacitores en serie

Fig. 25-1

PROBLEMAS RESUELTOS

25.1 En la Fig. 25-2, la diferencia de potencial entre las placas metálicas es de 40 V. *a*) ¿Qué placa tiene el mayor potencial? *b*) ¿Cuánto trabajo se debe hacer para llevar una carga de +3.0 C desde *B* hasta *A*? ¿Desde *A* hasta *B*? *c*) ¿Cómo sabemos que el campo eléctrico está en la dirección indicada? *d*) Si la separación de las placas es de 5.0 mm, ¿cuál es la magnitud de $\vec{E}$?

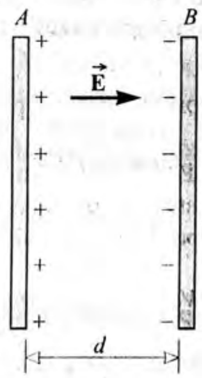


Fig. 25-2

a) Una carga positiva que se encuentre entre las placas es repelida por *A* y atraída por *B*. La carga testigo al ser positiva se moverá de *A* hacia *B*, esto se debe a que *A* está a un potencial más alto.

b) La magnitud del trabajo que se hace para llevar la carga q a través de una diferencia de potencial V es qV. Entonces la magnitud del trabajo hecho en la situación presente es

$$W = (3.0\ \text{C})(40\ \text{V}) = 0.12\ \text{kJ}$$

Porque una carga positiva que se halla en medio de las placas es repelida por *A*, se debe hacer un trabajo positivo (+120 J) para arrastrar la carga de +3.0 C desde *B* hasta *A*. Para restringir el movimiento de la carga que ha de desplazarse únicamente de *A* hasta *B*, se tiene que efectuar un trabajo negativo (−120 J).

c) Una carga testigo positiva que se encuentre entre las placas experimenta una fuerza dirigida desde *A* hacia *B* y ésta es, por definición, la dirección del campo.

d) Para las placas paralelas, $V = Ed$. Por tanto,

$$E = \frac{V}{d} = \frac{40\ \text{V}}{0.0050\ \text{m}} = 8.0\ \text{kV/m}$$

Nótese que las unidades del campo eléctrico en el SI, V/m y N/C son idénticas.

25.2 ¿Cuánto trabajo se requiere para llevar a un electrón desde la terminal positiva de una batería de 12 V hasta la terminal negativa?

Al desplazarse de la terminal positiva a la negativa se debe pasar a través de la caída de potencial, que en este caso es $V = -12$ V. Entonces

$$W = qV = (-1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})(-12\ \text{V}) = 1.9 \times 10^{-18}\ \text{J}$$

Como comprobación, se observa que el electrón, si se deja solo, se moverá de la terminal negativa a la positiva por tener una carga negativa. Por lo tanto hay que hacer un trabajo positivo para llevarla en la dirección contraria como se pide.

25.3 ¿Cuánta energía potencial pierde un protón cuando pasa a través de una caída de potencial de 5 kV?

El protón tiene una carga positiva. Por consiguiente se moverá de una región de mayor potencial a una región donde el potencial es menor, si está en libertad de hacerlo. Su cambio en energía potencial conforme se mueve a través de la diferencia de potencial V es Vq. En nuestro caso, $V = -5$ kV. Por tanto,

$$\text{Cambio en EP}_E = Vq = (-5 \times 10^3\ \text{V})(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C}) = -8 \times 10^{-16}\ \text{J}$$

25.4 Un electrón parte del reposo y cae a través de una elevación de potencial de 80 V. ¿Cuál es su rapidez final?

Las cargas positivas tienden a moverse a través de una caída de potencial; las cargas negativas, tales como los electrones, tienden a moverse a través de elevaciones de potencial.

$$\text{Cambio en EP}_E = Vq = (80\ \text{V})(-1.6 \times 10^{-19}\ \text{C}) = -1.28 \times 10^{-17}\ \text{J}$$

Esta pérdida en EP_E aparece como EC en el electrón:

$$\text{EP}_E \text{ perdida} = \text{EC ganada}$$

$$1.28 \times 10^{-17}\ \text{J} = \tfrac{1}{2} m v_f^2 - \tfrac{1}{2} m v_i^2 = \tfrac{1}{2} m v_f^2 - 0$$

$$v_f = \sqrt{\frac{(1.28 \times 10^{-17}\ \text{J})(2)}{9.1 \times 10^{-31}\ \text{kg}}} = 5.3 \times 10^6\ \text{m/s}$$

25.5 *a*) ¿Cuál es el potencial absoluto para cada una de las siguientes distancias, medidas desde una carga de 2.0 μC: $r = 10$ cm y $r = 50$ cm? *b*) ¿Cuánto trabajo se requiere para mover una carga de 0.05 μC desde un punto en $r = 50$ cm hasta un punto en $r = 10$ cm?

a)
$$V_{10} = k\frac{q}{r} = (9.0 \times 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)\frac{2.0 \times 10^{-6}\ \text{C}}{0.10\ \text{m}} = 1.8 \times 10^5\ \text{V}$$

$$V_{50} = \frac{10}{50} V_{10} = 36\ \text{kV}$$

b) $$\text{Trabajo} = q(V_{10} - V_{50}) = (5 \times 10^{-8}\ \text{C})(1.44 \times 10^5\ \text{V}) = 7.2\ \text{mJ}$$

25.6 Suponga, en el problema 25.5*a*, que el protón se suelta en $r = 10$ cm. ¿Qué tan rápido se moverá al pasar por el punto en $r = 50$ cm?

Al moverse el protón de un punto a otro, habrá una caída de potencial

$$\text{Caída de potencial} = 1.80 \times 10^5\ \text{V} - 0.36 \times 10^5\ \text{V} = 1.44 \times 10^5\ \text{V}$$

El protón gana una EC al moverse a través de la celda de potencial:

$$\text{EC ganada} = \text{EP}_E \text{ perdida}$$

$$\tfrac{1}{2} m v_f^2 - \tfrac{1}{2} m v_i^2 = qV$$

$$\tfrac{1}{2}(1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg})\, v_f^2 - 0 = (1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})(1.44 \times 10^5\ \text{V})$$

de donde $v_f = 5.3 \times 10^6$ m/s.

25.7 En la Fig. 25-2, sea $E = 2.0$ kV/m y $d = 5.0$ mm. Se dispara un protón desde la placa B hacia la placa A con una rapidez de 100 km/s. ¿Cuál será su rapidez un instante antes de golpear a la placa A?

El protón, de carga positiva, es repelido por A y por lo mismo su rapidez disminuye. Necesitamos la diferencia de potencial entre las placas, que es

$$V = Ed = (2.0\ \text{kV/m})(0.005\,0\ \text{m}) = 10\ \text{V}$$

Ahora, de la conservación de la energía, para el protón,

$$\text{EC perdida} = \text{EP}_E \text{ ganada}$$

$$\tfrac{1}{2} m v_B^2 - \tfrac{1}{2} m v_A^2 = qV$$

Sustituyendo $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg, $v_B = 1.00 \times 10^5$ m/s, $q = 1.60 \times 10^{-19}$ C y $V = 10$ V da $v_A = 90$ km/s. Como podemos ver, el protón se mueve más lento.

25.8 Un núcleo pequeño tiene una carga de $+50e$. *a*) Calcular el potencial absoluto V en un radio de 1.0×10^{-12} m medido desde el núcleo. *b*) Si el protón se suelta en este punto, ¿qué tan rápido se moverá cuando se encuentre a 1.0 m del núcleo?

a) $$V = k\frac{q}{r} = (9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(50)(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})}{10^{-12}\ \text{m}} = 72\ \text{kV}$$

b) El protón es repelido por el núcleo y viaja al infinito. El potencial absoluto en un punto es la diferencia de potencial entre el punto e infinito. Por consiguiente hay una caída de potencial de 72 kV conforme el protón se aproxima al infinito.

Normalmente se supone que 1.0 m está tan retirado del núcleo que se puede considerar como si estuviera en infinito. Para comprobar calculemos V en $r = 1.0$ m:

$$V_{1\,\mathrm{m}} = k\frac{q}{r} = (9.0 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})\frac{(50)(1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})}{1.0\ \mathrm{m}} = 7.2 \times 10^{-8}\ \mathrm{V}$$

que es prácticamente cero en comparación con 72 kV.

Conforme el protón cae a través de los 72 kV,

$$\text{EC ganada} = \text{EP}_E \text{ perdida}$$

$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 = qV$$

$$\tfrac{1}{2}(1.67 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg})\,v_f^2 - 0 = (1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})(72\,000\ \mathrm{V})$$

de donde $v_f = 3.7 \times 10^6$ m/s.

25.9 Las siguientes cargas puntuales están colocadas sobre el eje de las x: $+2.0\ \mu$C en $x = 20$ cm, $-3.0\ \mu$C en $x = 30$ cm, $-4.0\ \mu$C en $x = 40$ cm. Encontrar el potencial absoluto sobre el eje en $x = 0$.

El potencial es una cantidad escalar, por tanto

$$V = k\sum\frac{q_i}{r_i} = (9.0 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})\left(\frac{2.0 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}}{0.20\ \mathrm{m}} + \frac{-3.0 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}}{0.30\ \mathrm{m}} + \frac{-4.0 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}}{0.40\ \mathrm{m}}\right)$$

$$= (9.0 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(10 \times 10^{-6}\ \mathrm{C/m} - 10 \times 10^{-6}\ \mathrm{C/m} - 10 \times 10^{-6}\ \mathrm{C/m}) = -90\ \mathrm{kV}$$

25.10 Dos cargas puntuales, $+q$ y $-q$, están separadas una distancia d. ¿En qué punto, aparte de infinito, es el potencial absoluto igual a cero?

En el punto (o puntos) en cuestión

$$0 = k\frac{q}{r_1} + k\frac{-q}{r_2} \quad \text{o} \quad r_1 = r_2$$

Esta condición se cumple para todo punto en un plano, el cual es el bisector perpendicular de la línea que une a las dos cargas. Por consiguiente, el potencial absoluto es cero en todo punto que se encuentre sobre ese plano.

25.11 Cuatro cargas puntuales están colocadas en las esquinas de un cuadrado que tiene 30 cm de lado. Calcular el potencial en el centro del cuadrado si *a*) cada una de las cuatro cargas tiene $+2.0\ \mu$C y *b*) dos de éstas son de $+2.0\ \mu$C y las otras dos de $-2.0\ \mu$C.

a)
$$V = k\sum\frac{q_i}{r_i} = k\frac{\sum q_i}{r} = (9.0 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})\frac{(4)(2.0 \times 10^{-6}\ \mathrm{C})}{(0.30\ \mathrm{m})(\cos 45°)} = 3.4 \times 10^5\ \mathrm{V}$$

b)
$$V = (9.0 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})\frac{(2.0 + 2.0 - 2.0 - 2.0) \times 10^{-6}\ \mathrm{C}}{(0.30\ \mathrm{m})(\cos 45°)} = 0$$

25.12 En la Fig. 25-3, la carga en A tiene +200 pC, mientras que la carga en B es de −100 pC. *a*) Calcular el potencial absoluto en los puntos C y D. *b*) ¿Cuánto trabajo se debe hacer para llevar una carga de +500 μC desde el punto C al punto D?

a) $$V_C = k\sum\frac{q_i}{r_i} = (9.0\times10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\left(\frac{2.00\times10^{-10}\ \text{C}}{0.80\ \text{m}} - \frac{1.00\times10^{-10}\ \text{C}}{0.20\ \text{m}}\right) = -2.25\ \text{V} = -2.3\ \text{V}$$

$$V_D = (9.0\times10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\left(\frac{2.00\times10^{-10}\ \text{C}}{0.20\ \text{m}} - \frac{1.00\times10^{-10}\ \text{C}}{0.80\ \text{m}}\right) = +7.88\ \text{V} = +7.9\ \text{V}$$

b) Existe una elevación en el potencial desde C hasta D de $V = V_D - V_C = 7.88\ \text{V} - (-2.25\ \text{V}) = 10.13\ \text{V}$. Así que

$$W = Vq = (10.13\ \text{V})(5.00\times10^{-4}\ \text{C}) = 5.1\ \text{mJ}$$

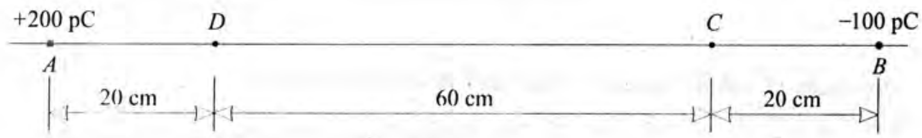


Fig. 25-3

25.13 Encontrar la energía potencial eléctrica debida a tres cargas puntuales colocadas sobre el eje x como se indica: +2.0 μC en $x = 0$, +3.0 μC en $x = 20$ cm, y +6.0 μC en $x = 50$ cm. Se considera la EP_E como cero cuando las cargas están muy separadas.

Calculemos cuánto trabajo se requiere hacer para atraer cada carga desde el infinito hasta sus lugares sobre el eje x. Primero acerquemos la carga de 2.0 μC. No es necesario hacer trabajo ya que no hay cargas en las vecindades.

En seguida aproximemos la carga de 3.0 μC, que es repelida por la carga de +2.0 μC. La diferencia de potencial entre infinito y su posición final se debe a la carga de +2.0 μC y es

$$V_{x=0.2} = k\frac{2.0\ \mu\text{C}}{0.20\ \text{m}} = (9.0\times10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\left(\frac{2\times10^{-6}\ \text{C}}{0.20\ \text{m}}\right) = 9.0\times10^4\ \text{V}$$

Entonces, el trabajo que se requiere para traer la carga de 3.0 μC es

$$W_{3\,\mu\text{C}} = qV_{x=0.2} = (3.0\times10^{-6}\ \text{C})(9.0\times10^4\ \text{V}) = 0.270\ \text{J}$$

Finalmente acercamos la carga de 6.0 μC al punto $x = 0.50$ m. El potencial se debe a las dos cargas que ya están presentes

$$V_{x=0.5} = k\left(\frac{2.0\times10^{-6}\ \text{C}}{0.50\ \text{m}} + \frac{3.0\times10^{-6}\ \text{C}}{0.30\ \text{m}}\right) = 12.6\times10^4\ \text{V}$$

Así pues, el trabajo requerido para aproximar la carga de 6.0 μC es

$$W_{6\,\mu C} = qV_{x=0.5} = (6.0 \times 10^{-6}\text{ C})(12.6 \times 10^{4}\text{ V}) = 0.756\text{ J}$$

Al sumar las cantidades de trabajo requeridas para ensamblar las cargas se proporciona la energía almacenada en el sistema:

$$\text{EP}_E = 0.270\text{ J} + 0.756\text{ J} = 1.0\text{ J}$$

¿Puede demostrar que el orden en que se traen las cargas desde infinito no afectan el resultado?

25.14 Dos protones se mantienen en reposo, separados por una distancia 5.0×10^{-12} m. Cuando se sueltan se repelen. ¿Qué tan rápido se moverá cada uno cuando estén muy separados uno del otro?

Su EP_E original se convertirá en EC. Procedemos como en el problema 25.13. Acerquemos una carga al punto 5.0×10^{-12} m, el potencial debido a esta carga en el punto en cuestión es

$$V = (9.0 \times 10^{9}\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\left(\frac{1.60 \times 10^{-19}\text{ C}}{5 \times 10^{-12}\text{ m}}\right) = 288\text{ V}$$

Entonces el trabajo necesario para traer al segundo protón es

$$W = qV = (1.60 \times 10^{-19}\text{ C})(288\text{ V}) = 4.61 \times 10^{-17}\text{ J}$$

y ésta es la EP_E original del sistema. A partir del principio de conservación de la energía,

$$\text{EP}_E\text{ original} = \text{EC final}$$
$$4.61 \times 10^{-17}\text{ J} = \tfrac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 \upsilon_2^2$$

Como las partículas son idénticas $\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon$. Resolviendo, se encuentra que $\upsilon = 1.7 \times 10^{5}$ m/s cuando las partículas están muy separadas.

25.15 En la Fig. 25-4 se muestran dos grandes placas metálicas conectadas a una batería de 120 V. Suponga que las placas se encuentran en el vacío y son más grandes de lo que se muestran. Calcule *a*) el campo *E* entre las placas, *b*) la fuerza que experimenta un electrón que se encuentra entre las placas, *c*) la EP_E perdida por el electrón al moverse desde la placa *B* hasta la placa *A*, y *d*) la rapidez del electrón un instante antes de impactarse con la placa *A*, si fue soltado en la placa *B*.

a) El campo *E* está dirigido de la placa positiva *A* hacia la placa negativa *B*. Es uniforme entre placas paralelas de longitud muy grande y está dado por

$$E = \frac{V}{d} = \frac{120\text{ V}}{0.020\text{ m}} = 6000\text{ V/m} = 6.0\text{ kV/m}$$

dirigido de izquierda a derecha.

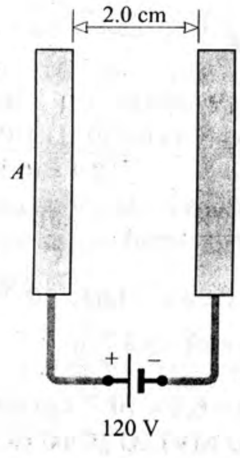


Fig. 25-4

b) $$F_E = qE = (-1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})(6000\ \text{V/m}) = -9.6 \times 10^{-16}\ \text{N}$$

El signo menos nos dice que $\vec{\mathbf{F}}_E$ está dirigido en sentido opuesto a $\vec{\mathbf{E}}$. Como la placa *A* es positiva, el electrón es atraído por ella. La fuerza sobre el electrón es hacia la izquierda.

c) $$\text{Cambio en EP}_E = Vq = (120\ \text{V})(-1.6 \times 10^{-19}\ \text{C}) = -1.92 \times 10^{-17}\ \text{J} = -1.9 \times 10^{-17}\ \text{J}$$

Nótese que el potencial se eleva de *B* hacia *A*.

d) $$\text{EP}_E \text{ perdida} = \text{EC ganada}$$
$$1.92 \times 10^{-17}\ \text{J} = \tfrac{1}{2} m v_f^2 - \tfrac{1}{2} m v_i^2$$
$$1.92 \times 10^{-17}\ \text{J} = \tfrac{1}{2}(9.1 \times 10^{-31}\ \text{kg})\, v_f^2 - 0$$

de donde $v_f = 6.5 \times 10^6$ m/s.

25.16 Como se muestra en la Fig. 25-5, una partícula cargada permanece en reposo entre dos placas cargadas horizontales. La separación de las placas es de 2.0 cm, para la partícula $m = 4.0 \times 10^{-13}$ kg y $q = 2.4 \times 10^{-18}$ C. Calcular la diferencia de potencial entre las placas.

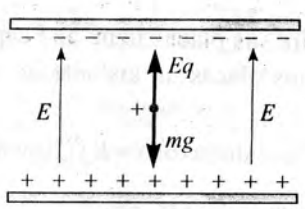


Fig. 25-5

Como la partícula está en equilibrio, el peso de la partícula es igual a la fuerza eléctrica, la cual está dirigida hacia arriba. Esto es,

$$mg = qE$$

o bien

$$E = \frac{mg}{q} = \frac{(4.0 \times 10^{-13}\ \mathrm{kg})(9.81\ \mathrm{m/s^2})}{2.4 \times 10^{-18}\ \mathrm{C}} = 1.63 \times 10^{6}\ \mathrm{V/m}$$

Para el sistema de placas paralelas,

$$V = Ed = (1.63 \times 10^{6}\ \mathrm{V/m})(0.020\ \mathrm{m}) = 33\ \mathrm{kV}$$

25.17 Una partícula alfa ($q = 2e$, $m = 6.7 \times 10^{-27}$ kg) inicialmente en reposo pasa a través de una caída de potencial de 3.0×10^{6} V (3.0 MV). *a)* ¿Cuál es su EC en electrón volts? *b)* ¿Cuál es su rapidez?

a) $$\text{Energía en eV} = \frac{qV}{e} = \frac{(2e)(3.0 \times 10^{6})}{e} = 6.0 \times 10^{6}\ \mathrm{eV} = 6.0\ \mathrm{MeV}$$

b) $$\mathrm{EP}_E \text{ perdida} = \mathrm{EC} \text{ ganada}$$

$$qV = \tfrac{1}{2} m v_f^2 - \tfrac{1}{2} m v_i^2$$

$$(2)(1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})(3.0 \times 10^{6}\ \mathrm{V}) = \tfrac{1}{2}(6.7 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg})\, v_f^2 - 0$$

de donde $v_f = 1.7 \times 10^{7}$ m/s.

25.18 Las partículas *a)* electrón, *b)* protón y *c)* partícula alfa tienen una energía de 400 eV ¿Cuál es su rapidez?

Sabemos que la energía cinética de cada partícula es

$$\tfrac{1}{2} m v^2 = (400\ \mathrm{eV})\left(\frac{1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}}{1.00\ \mathrm{eV}}\right) = 6.40 \times 10^{-17}\ \mathrm{J}$$

Sustituyendo $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg para el electrón, $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg para el protón y $m_\alpha = 4(1.67 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg})$ para la partícula alfa se obtiene la rapidez de cada partícula como *a)* 1.186×10^{7} m/s, *b)* 2.77×10^{5} m/s, y *c)* 1.38×10^{5} m/s.

25.19 Un capacitor con aire entre sus placas tiene una capacitancia de 8.0 μF. Determinar su capacitancia cuando se coloca entre sus placas un aislante de constante dieléctrica 6.0.

$$C \text{ con dieléctrico} = K\,(C \text{ con aire}) = (6.0)(8.0\ \mu\mathrm{F}) = 48\ \mu\mathrm{F}$$

25.20 Un capacitor de 300 pF se carga a un voltaje de 1.0 kV. ¿Cuál es la carga almacenada?

$$q = CV = (300 \times 10^{-12}\ \text{F})(1000\ \text{V}) = 3.0 \times 10^{-7}\ \text{C} = 0.30\ \mu\text{C}$$

25.21 Una esfera metálica tiene una carga de 6.0 nC cuando su potencial es de 200 V más alto que el de sus alrededores y está montada sobre una barra aislante. ¿Cuál es la capacitancia del capacitor formado por la esfera y sus alrededores?

$$C = \frac{q}{V} = \frac{6.0 \times 10^{-9}\ \text{C}}{200\ \text{V}} = 30\ \text{pF}$$

25.22 Un capacitor de 1.2 μF se carga a 3.0 kV. Calcular la energía almacenada en el capacitor.

$$\text{Energía} = \tfrac{1}{2}qV = \tfrac{1}{2}CV^2 = \tfrac{1}{2}(1.2 \times 10^{-6}\ \text{F})(3000\ \text{V})^2 = 5.4\ \text{J}$$

25.23 La combinación en serie de los dos capacitores que se muestran en la Fig. 25-6 está conectada a una diferencia de potencial de 1000 V. Encuentre *a*) la capacitancia equivalente C_{eq} de la combinación, *b*) la magnitud de las cargas en cada capacitor, *c*) la diferencia de potencial a través de cada capacitor y *d*) la energía almacenada en los capacitores.

a)
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{3.0\ \text{pF}} + \frac{1}{6.0\ \text{pF}} = \frac{1}{2.0\ \text{pF}}$$

de donde $C = 2.0$ pF.

b) En una combinación en serie, cada capacitor tiene la misma carga, que es igual a la carga de la combinación. Entonces, utilizando el resultado de *a*), obtenemos

$$q_1 = q_2 = q = C_{eq}V = (2.0 \times 10^{-12}\ \text{F})(1000\ \text{V}) = 2.0\ \text{nC}$$

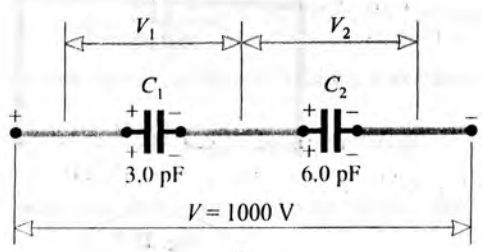


Fig. 25-6

c)

$$V_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{2.0\times10^{-9}\ \text{C}}{3.0\times10^{-12}\ \text{F}} = 667\ \text{V} = 0.67\ \text{kV}$$

$$V_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{2.0\times10^{-9}\ \text{C}}{6.0\times10^{-12}\ \text{F}} = 333\ \text{V} = 0.33\ \text{kV}$$

d)

Energía en $C_1 = \frac{1}{2}q_1V_1 = \frac{1}{2}(2.0\times10^{-9}\ \text{C})(667\ \text{V}) = 6.7\times10^{-7}\ \text{J} = 0.67\ \mu\text{J}$

Energía en $C_2 = \frac{1}{2}q_2V_2 = \frac{1}{2}(2.0\times10^{-9}\ \text{C})(333\ \text{V}) = 3.3\times10^{-7}\ \text{J} = 0.33\ \mu\text{J}$

Energía de la combinación $= (6.7 + 3.3)\times10^{-7}\ \text{J} = 10\times10^{-7}\ \text{J} = 1.0\ \mu\text{J}$

El último resultado también se puede obtener directamente de $\frac{1}{2}qV$ o de $\frac{1}{2}C_{eq}V^2$.

25.24 La combinación de capacitores en paralelo que se muestra en la Fig. 25-7 está conectada a una fuente que suministra una diferencia de potencial de 120 V. Calcular la capacitancia equivalente C_{eq}, la carga en cada capacitor y la carga en la combinación.

Para una combinación en paralelo,

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = 2.0\ \text{pF} + 6.0\ \text{pF} = 8.0\ \text{pF}$$

A cada capacitor se le ha aplicado una diferencia de potencial de 120 V. Por consiguiente,

$$q_1 = C_1V_1 = (2.0\times10^{-12}\ \text{F})(120\ \text{V}) = 0.24\ \text{nC}$$

$$q_2 = C_2V_2 = (6.0\times10^{-12}\ \text{F})(120\ \text{V}) = 0.72\ \text{nC}$$

La carga de la combinación es $q_1 + q_2 = 960$ pC. O, podría escribirse

$$q = C_{eq}V = (8.0\times10^{-12}\ \text{F})(120\ \text{V}) = 0.96\ \text{nC}$$

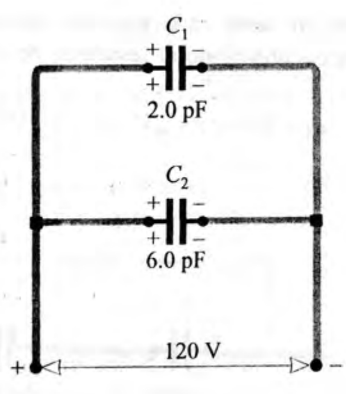


Fig. 25-7

25.25 Cada una de las placas paralelas de un capacitor tiene un área de 200 cm^2, y se encuentran separadas por un espacio de aire de 0.40 cm. *a*) Calcular su capacitancia. *b*) Si el capacitor está conectado a una fuente que suministra una diferencia de potencial de 500 V, calcular la carga, la energía almacenada y el valor de E entre las placas. *c*) Si un líquido con una $K = 2.60$ se vacía entre las placas para sustituir al espacio de aire, ¿qué carga adicional le suministrará al capacitor la fuente de 500 V?

a) Para un capacitor de placas paralelas con un espacio de aire,

$$C = K\epsilon_0 \frac{A}{d} = (1)(8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})\frac{200 \times 10^{-4}\ \text{m}^2}{4.0 \times 10^{-3}\ \text{m}} = 4.4 \times 10^{-11}\ \text{F} = 44\ \text{pF}$$

b)

$$q = CV = (4.4 \times 10^{-11}\ \text{F})(500\ \text{V}) = 2.2 \times 10^{-8}\ \text{C} = 22\ \text{nC}$$

$$\text{Energía} = \tfrac{1}{2}qV = \tfrac{1}{2}(2.2 \times 10^{-8}\ \text{C})(500\ \text{V}) = 5.5 \times 10^{-6}\ \text{J} = 5.5\ \mu\text{J}$$

$$E = \frac{V}{d} = \frac{500\ \text{V}}{4.0 \times 10^{-3}\ \text{m}} = 1.3 \times 10^5\ \text{V/m}$$

c) Ahora el capacitor tendrá una capacitancia $K = 2.60$ más grande que el valor anterior. Por consiguiente,

$$q = CV = (2.60 \times 4.4 \times 10^{-11}\ \text{F})(500\ \text{V}) = 5.7 \times 10^{-8}\ \text{C} = 57\ \text{nC}$$

El capacitor ya tenía una carga de 22 nC y entonces deben ser agregados 57 nC − 22 nC o bien 35 nC.

25.26 Dos capacitores, 3.0 μF y 4.0 μF, son cargados individualmente con una batería que suministra una diferencia de potencial de 6.0 V. Una vez desconectados de ésta, se conectan juntos, con la placa negativa de una unidad a la placa positiva del otro. ¿Cuál es la carga final en cada capacitor?

En la Fig. 25-8 se muestra el arreglo antes y después de conectarlos juntos. Antes de conectarlos, las cargas son

$$q_3 = CV = (3.0 \times 10^{-6}\ \text{F})(6.0\ \text{V}) = 18\ \mu\text{C}$$
$$q_4 = CV = (4.0 \times 10^{-6}\ \text{F})(6.0\ \text{V}) = 24\ \mu\text{C}$$

Cuando se conectan juntos se cancela parcialmente la carga. Las cargas finales están dadas por

$$q_3' + q_4' = q_4 - q_3 = 6.0\ \mu\text{C}$$

También, la diferencia de potencial entre los extremos de los dos capacitores es la misma, entonces $V = q/C$ da

$$\frac{q_3'}{3.0 \times 10^{-6}\ \text{F}} = \frac{q_4'}{4.0 \times 10^{-6}\ \text{F}} \quad \text{o} \quad q_3' = 0.75q_4'$$

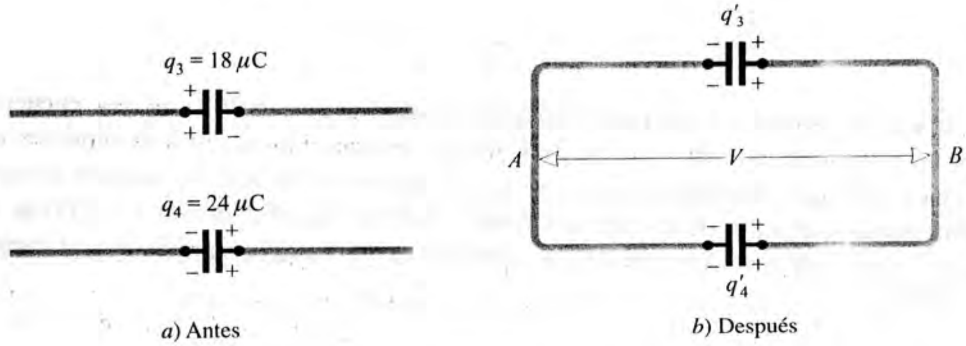


Fig. 25-8

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores se obtiene

$$0.75q_4' + q_4' = 6.0\,\mu\text{C} \quad \text{o} \quad q_4' = 3.4\,\mu\text{C}$$

Entonces $q_3' = 0.75q_4' = 2.6\ \mu\text{C}$.

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

25.27 Dos placas metálicas están conectadas a una batería de 1.50 V. ¿Qué trabajo se debe realizar para llevar una carga de +5.0 μC *a*) de la placa negativa a la positiva, *b*) de la placa positiva a la negativa? *Resp.* *a*) 7.5 μJ; *b*) −7.5 μJ

25.28 Las placas descritas en el problema 25.27 se encuentran en el vacío. Un electrón ($q = -e$, $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg) se suelta en la placa negativa y cae libremente a la placa positiva. ¿Cuál es su rapidez un instante antes de golpearla? *Resp.* 7.3×10^5 m/s

25.29 Un protón ($q = e$, $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) se acelera partiendo del reposo a través de una diferencia de potencial de 1.0 MV. ¿Cuál es su rapidez final? *Resp.* 1.4×10^7 m/s

25.30 Un cañón de electrones dispara electrones ($q = -e$, $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg) hacia una placa metálica que se encuentra en el vacío y a 4.0 mm de distancia. El potencial de la placa es de 5.0 V menor que el del cañón. ¿Qué tan rápido se deben mover los electrones al salir del cañón si deben llegar a la placa? *Resp.* 1.3×10^6 m/s

25.31 La diferencia de potencial entre dos grandes placas metálicas es de 120 V. La separación entre las placas es de 3.0 mm. Calcular la intensidad de campo eléctrico entre las placas. *Resp.* 40 kV/m hacia la placa negativa

25.32 Un electrón ($q = -e$, $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg) se dispara paralelamente a un campo eléctrico de inmensidad 3.0 kV/m, con una rapidez de 5.0×10^6 m/s. ¿Qué tan lejos llegará el electrón antes de detenerse? *Resp.* 2.4 cm

25.33 Una diferencia de potencial de 24 kV mantiene un campo eléctrico dirigido hacia abajo entre dos placas paralelas horizontales que están separadas una distancia de 1.8 cm. Calcular la carga contenida en una gota de aceite de masa 2.2×10^{-13} kg que permanece estacionaria en el campo entre las placas. *Resp.* 1.6×10^{-18} C $= 10e$

25.34 Una carga puntual de 500 μC se encuentra en el aire. Calcular el potencial absoluto a una distancia de 3.0 cm. *Resp.* 15 kV

25.35 Calcular la intensidad de campo eléctrico y el potencial absoluto a una distancia de 1.0 nm desde un núcleo de helio de carga $+2e$. ¿Cuál es la energía potencial (relativa al infinito) de un protón que se encuentra en esta posición? *Resp.* 2.9×10^9 N/C, 2.9 V, 4.6×10^{-19} J

25.36 Una carga de 0.20 μC se encuentra a 30 cm de una carga puntual de 3.0 μC en el vacío. ¿Qué trabajo hay que realizar para acercar a 18 cm la carga de 0.20 μC a la carga de 3.0 μC? *Resp.* 0.027 J

25.37 Una carga de +2.0 μC se encuentra en el origen de un sistema de coordenadas. Una segunda carga de -3.0 μC se coloca sobre el eje x en $x = 100$ cm. ¿En qué punto (o puntos) sobre el eje x será el potencial absoluto igual a cero? *Resp.* $x = 40$ cm y $x = -0.20$ m

25.38 En el problema 25.37, ¿cuál es la diferencia de potencial entre los siguientes dos puntos localizados sobre el eje x: punto A en $x = 0.1$ m y el punto B en $x = 0.9$ m? ¿Qué punto se encuentra con potencial más alto? *Resp.* 4×10^5 V, el punto A

25.39 Un electrón se mueve en la dirección $+x$ con una rapidez de 5.0×10^6 m/s. Existe un campo eléctrico de 3.0 kV/m en la dirección $+x$. ¿Cuál será la rapidez del electrón después de que se haya desplazado 1.00 cm? *Resp.* 3.8×10^6 m/s

25.40 Un electrón tiene una rapidez de 6.0×10^5 m/s cuando pasa por el punto A en su camino hacia el punto B. Su rapidez en B es de 12×10^5 m/s. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre A y B, y cuál está a un potencial más alto? *Resp.* 3.1 V, B

25.41 Un capacitor con aire entre sus placas tiene una capacitancia de 3.0 μF. ¿Cuál es su capacitancia cuando se coloca entre sus placas cera de constante dieléctrica 2.8? *Resp.* 8.4 μF

25.42 Determinar la carga en cada placa de un capacitor de 0.050 μF cuando la diferencia de potencial entre las placas es de 200 V. *Resp.* 10 μC

25.43 Un capacitor se carga con 9.6 nC y tiene una diferencia de potencial de 120 V entre sus terminales. Calcular la capacitancia y la energía almacenada en él. *Resp.* 80 pF, 0.58 μJ

25.44 Calcular la energía almacenada en un capacitor de 60 pF *a*) cuando está cargado a una diferencia de potencial de 2.0 kV y *b*) cuando la carga en cada placa es de 30 nC. *Resp.* *a*) 12 mJ; *b*) 7.5 μJ

25.45 Tres capacitores, cada uno con 120 pF de capacitancia, están cargados a un potencial de 0.50 kV y conectados en serie. Determinar *a*) la diferencia de potencial entre las placas extremas, *b*) la carga en cada capacitor y *c*) la energía almacenada en el sistema. *Resp.* *a*) 1.5 kV; *b*) 60 nC; *c*) 45 μJ

25.46 Tres capacitores (2.00 μF, 5.00 μF y 7.00 μF) están conectados en serie. ¿Cuál es la capacitancia equivalente? *Resp.* 1.19 μF

25.47 Tres capacitores (2.00 μF, 5.00 μF y 7.00 μF) están conectados en paralelo ¿Cuál es la capacitancia equivalente? *Resp.* 14.00 μF

25.48 La combinación de capacitores del problema 25.46 se conecta en serie con la combinación del problema 25.47. ¿Cuál es la capacitancia de la nueva combinación? *Resp.* 1.09 μF

25.49 Dos capacitores (0.30 y 0.50 μF) se conectan en paralelo. *a*) ¿Cuál es su capacitancia equivalente? Si una carga de 200 μC se coloca en la combinación en paralelo, *b*) ¿cuál es la diferencia de potencial entre las terminales? *c*) ¿Cuál es la carga en cada capacitor? *Resp.* *a*) 0.80 μF; *b*) 0.25 kV; *c*) 75 μC, 0.13 mC

25.50 Un capacitor de 2.0 μF es cargado a 50 V y después se conecta en paralelo (placa positiva a placa positiva) con un capacitor de 4.0 μF cargado a 100 V. *a*) ¿Cuál es la carga final en los capacitores? *b*) ¿Cuál es la diferencia de potencial a través de cada capacitor? *Resp.* *a*) 0.17 mC; 0.33 mC, *b*) 83 V

25.51 Repetir el problema 25.50 si la placa positiva de un capacitor se conecta a la placa negativa del otro. *Resp.* *a*) 0.10 mC, 0.20 mC; *b*) 50 V

25.52 *a*) Calcular la capacitancia de un capacitor formado por dos placas paralelas separadas por una capa de cera de parafina de 0.50 cm de espesor, siendo 80 cm^2 el área de cada placa. La constante dieléctrica de la cera es 2.0. *b*) Si el capacitor se conecta a una fuente de 100 V, calcular la carga y la energía almacenada en el capacitor. *Resp.* *a*) 28 pF; *b*) 2.8 nC, 0.14 μJ

capítulo 26

Corriente, resistencia y ley de Ohm

UNA CORRIENTE (I) de electricidad existe en cualquier región donde sean transportadas cargas eléctricas desde un punto a otro punto de esa región. Supóngase que la carga se mueve a través de un alambre. Si la carga q se traslada a través de una sección transversal dada del alambre en un tiempo t, entonces la corriente a través del alambre es:

$$I = \frac{q}{t}$$

Aquí, q está en coulombs, t en segundos e I en *amperes* (1 A = 1 C/s). Por costumbre, se toma la dirección de la corriente como la que corresponde a la dirección del flujo de la carga positiva. De este modo, un flujo de electrones hacia la derecha corresponde a una corriente hacia la izquierda.

UNA BATERÍA es una fuente de energía eléctrica. Si no hay pérdidas de energía interna, la diferencia de potencial (véase el capítulo 25) entre las terminales se llama *fuerza electromotriz* (fem) de la batería. A menos que se establezca lo contrario, se considerará que la diferencia de potencial entre la terminales (d.p.t.) de una batería es igual a su fem. La unidad para la fem es la misma que para la diferencia de potencial, el volt.

LA RESISTENCIA (R) de un alambre o de otro objeto es la medida de la diferencia de potencial (V) que debe aplicarse a través del objeto para lograr que se establezca a través de él una unidad de corriente:

$$R = \frac{V}{I}$$

La unidad de resistencia es el *ohm*, para la cual se utiliza el símbolo Ω (omega). 1 Ω = 1 V/A.

LA LEY DE OHM tenía originalmente dos partes. La primera parte era únicamente la ecuación de la definición de resistencia, $V = IR$. Con frecuencia se cita esta ecuación como la Ley de Ohm. Sin embargo, Ohm estableció también que la resistencia R es una constante independiente de V y de I. Esta última parte de la ley sólo es aproximadamente cierta.

La relación $V = IR$ puede aplicarse a cualquier resistor donde V es la diferencia de potencial (d.p.) entre los dos extremos del resistor, I es la corriente a través del resistor y R es el valor de la resistencia en estas condiciones.

MEDICIÓN DE LA RESISTENCIA POR MEDIO DE AMPERÍMETRO Y VOLTÍMETRO: Se utiliza un circuito en serie que consiste en una resistencia, un amperímetro y una batería. La corriente se mide con un amperímetro (de baja resistencia). La diferencia de potencial se mide conectando las terminales de un voltímetro (alta resistencia) a través de la resistencia, es decir, en paralelo con ésta. La resistencia se calcula dividiendo la lectura del voltímetro entre la lectura del amperímetro, de acuerdo con la Ley de Ohm, $R = V/I$. (Si se requiere un valor exacto de la resistencia, las resistencias internas del voltímetro y del amperímetro deben considerarse como parte del circuito.)

LA DIFERENCIA DE POTENCIAL DE LAS TERMINALES (o *voltaje*) de una batería o generador cuando descarga una corriente I está relacionada con su fuerza electromotriz $\mathscr{E}$ y su *resistencia interna* r de la siguiente forma:

1) Cuando está entregando corriente (*en la descarga*):

$$\text{Voltaje de las terminales} = (\text{fem}) - (\text{caída de voltaje en la resistencia interna})$$

$$V = \mathscr{E} - Ir$$

2) Cuando recibe corriente (*en la carga*):

$$\text{Voltaje de las terminales} = (\text{fem}) + (\text{caída de voltaje en la resistencia interna})$$

$$V = \mathscr{E} + Ir$$

3) Cuando no existe corriente:

$$\text{Voltaje de las terminales} = \text{fem de la batería o generador}$$

RESISTIVIDAD: La resistencia R de un alambre de longitud L y sección transversal A es

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

donde ρ es una constante llamada *resistividad* y es una propiedad característica del material del cual está hecho el alambre. Para L en m, A en m^2 y R en Ω, las unidades de ρ son $\Omega \cdot$ m.

LA RESISTENCIA VARÍA CON LA TEMPERATURA: Si un alambre tiene una resistencia R_0 a una temperatura T_0 entonces su resistencia R a una temperatura T es

$$R = R_0 + \alpha R_0(T - T_0)$$

donde α es el *coeficiente térmico de la resistencia* del material del alambre. Gereralmente varía con la temperatura, por lo que esta relación sólo es válida para pequeños cambios de temperatura. Las unidades de α son K^{-1} o °C^{-1}.

Una relación similar puede aplicarse a la variación de la resistividad con la temperatura. Si ρ_0 y ρ son las resistividades a T_0 y T respectivamente, entonces

$$\rho = \rho_0 + \alpha\rho_0\,(T - T_0)$$

CAMBIOS DE POTENCIAL: La diferencia de potencial a través de un resistor R por el cual fluye una corriente I, por la Ley de Ohm es IR. El extremo del resistor en el cual la corriente entra es el extremo de potencial alto de la resistencia. La corriente siempre fluye "cuesta abajo" del potencial alto al bajo, a través de un resistor.

La terminal positiva de una batería es siempre la de mayor potencial si la resistencia interna de la misma es pequeña o despreciable. Lo anterior es válido y además independiente de la dirección de la corriente a través de la batería.

PROBLEMAS RESUELTOS

26.1 Una corriente continua de 0.50 A fluye por un alambre. ¿Cuánta carga pasa a través del alambre en un minuto?

Ya que $I = q/t$, se tiene $q = It = (0.50\text{ A})(60\text{ s}) = 30\text{ C}$. (Recuérdese que $1\text{ A} = 1\text{ C/s}$.)

26.2 ¿Cuántos electrones fluyen a través de una bombilla cada segundo si la corriente en ésta es de 0.75 A?

Dado que $I = q/t$, la carga que fluye a través de la bombilla en 1.0 s es

$$q = It = (0.75\text{ A})(1.0\text{ s}) = 0.75\text{ C}$$

Pero la magnitud de la carga de electrón es $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C. Por lo tanto,

$$\text{Número} = \frac{\text{carga}}{\text{carga/electrón}} = \frac{0.75\text{ C}}{1.6 \times 10^{-19}\text{ C}} = 4.7 \times 10^{18}$$

26.3 Cierta bombilla tiene una resistencia de 240 Ω cuando se enciende. ¿Cuánta corriente fluirá a través de la bombilla cuando se conecta a 120 V, que es el voltaje de operación normal?

$$I = \frac{V}{R} = \frac{120\text{ V}}{240\,\Omega} = 0.500\text{ A}$$

26.4 Un calentador eléctrico utiliza 5.0 A cuando es conectado a 110 V. Determínese su resistencia.

$$R = \frac{V}{I} = \frac{110\text{ V}}{5.0\text{ A}} = 22\,\Omega$$

26.5 ¿Cuál es la caída de potencial a través de una parrilla eléctrica que consume 5.0 A cuando su resistencia, caliente, es de 24 Ω?

$$V = IR = (5.0\ \text{A})(24\ \Omega) = 0.12\ \text{kV}$$

26.6 La corriente en la Fig. 26-1 es de 0.125 A en la dirección que se muestra. Para cada uno de los siguientes pares de puntos, ¿cuál es la diferencia de potencial y cuál es el punto de mayor potencial? *a*) *A, B;* *b*) *B, C;* *c*) *C, D;* *d*) *D, E;* *e*) *C, E;* *f*) *E, C.*

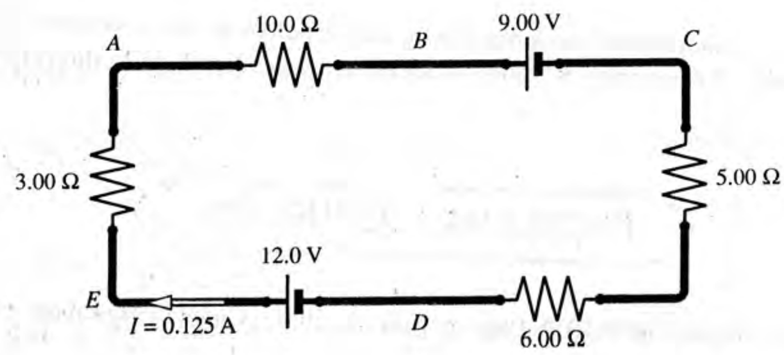


Fig. 26-1

Recuérdense los siguientes factores: 1) la corriente es la misma (0.125 A) en todos los puntos del circuito ya que la carga no tiene otro lugar para fluir. 2) La corriente siempre fluye del potencial mayor al menor a través de un resistor. 3) La terminal positiva de una fem pura (el lado más largo de su símbolo) es siempre la terminal de mayor potencial. Por lo tanto, considerando las caídas de potencial como negativas, se tiene lo siguiente:

a) $V_{AB} = -IR = -(0.125\ \text{A})(10.1\ \Omega) = -1.25\ \text{V}$; *A* es el de mayor potencial.

b) $V_{BC} = -\mathscr{E} = -9.00\ \text{V}$; *B* es mayor.

c) $V_{CD} = -(0.125\ \text{A})(5.00\ \Omega) - (0.125\ \text{A})(6.00\ \Omega) = -1.38\ \text{V}$; *C* es el de mayor potencial.

d) $V_{DE} = +\mathscr{E} = +12.0\ \text{V}$; *E* es el de mayor potencial.

e) $V_{CE} = -(0.125\ \text{A})(5.00\ \Omega) - (0.125\ \text{A})(6.00\ \Omega) + 12.0\ \text{V} = +10.6\ \text{V}$; *E* es el de mayor potencial.

f) $V_{EC} = -(0.125\ \text{A})(3.00\ \Omega) - (0.125\ \text{A})(10.0\ \Omega) - 9.00\ \text{V} = -10.6\ \text{V}$; *E* es mayor.

Nótese que coinciden las respuestas para *e*) y *f*).

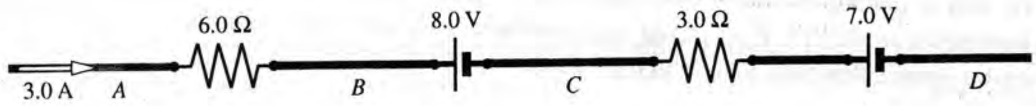


Fig. 26-2

26.7 Una corriente de 3.0 A fluye a través de un alambre como se muestra en la Fig. 26-2. ¿Cuál sería la lectura en un voltímetro si se conecta *a*) de *A* a *B*; *b*) de *A* a *C*; *c*) de *a* a *D*?

a) El punto *A* tiene un potencial más alto debido a que la corriente siempre fluye "cuesta abajo" por un resistor. Hay una caída de potencial de $IR = (3.0\text{ A})(6.0\ \Omega) = 18$ V cuando va de *A* a *B*. La lectura del voltímetro será de -18 V.

b) Al ir de *B* a *C*, se pasa del lado positivo al lado negativo de la batería, por lo tanto hay una caída de potencial de 8.0 V cuando se va de *B* hacia *C*, la cual se suma a la caída de 18 V de *A* a *B*, encontrada en *a*), para dar una caída de 26 V de *A* a *C*. La lectura del voltímetro será de -26 V desde *A* hasta *C*.

c) Al ir de *C* a *D*, primero hay una caída de $IR = (3.0\text{ A})(3.0\ \Omega) = 9.0$ V cuando se pasa por el resistor. Después, puesto que se va de la terminal negativa a la positiva de la batería de 7.0 V, hay una elevación de 7.0 V cuando se pasa por la batería. El voltímetro conectado desde *A* hasta *D* marcará una lectura de

$$-18\text{ V} - 8.0\text{ V} - 9.0\text{ V} + 7.0\text{ V} = -28\text{ V}$$

26.8 Repítase el problema 26.7 si la corriente 3.0 A fluye de derecha a izquierda en lugar de izquierda a derecha. ¿Cuál es el punto de mayor potencial en cada caso?

Procediendo como anteriormente se hizo, se tiene

a) $V_{AB} = +(3.0)(6.0) = +18$ V; *B* es el de mayor potencial.

b) $V_{AC} = +(3.0)(6.0) - 8.0 = +10$ V; *C* es el de mayor potencial.

c) $V_{AD} = +(3.0)(6.0) - 8.0 + (3.0)(3.0) + 7.0 = +26$ V; *D* es el de mayor potencial.

26.9 Una pila seca tiene una fem de 1.52 V. El potencial de sus terminales cae a cero cuando una corriente de 25 A pasa a través de ella. ¿Cuál es su resistencia interna?

Si se observa la Fig. 26-3, la batería actúa como una fem $\mathscr{E}$ pura en serie con el resistor *r*. Se indicó que bajo estas condiciones, la diferencia de potencial entre *A* y *B* es cero. Por lo tanto,

$$0 = +\mathscr{E} - Ir \qquad \text{o} \qquad 0 = 1.52\text{ V} - (25\text{ A})r$$

de donde la resistencia interna es $r = 0.061\ \Omega$.

26.10 Un generador de corriente directa tiene una fem de 120 V; es decir, el voltaje en sus terminales es de 120 V cuando no fluye corriente a través de él. Para una salida de 20 A, el potencial en sus terminales es de 115 V. *a*) ¿Cuál es la resistencia interna r del generador? *b*) ¿Cuál será el voltaje en las terminales para una salida de 40 A?

La situación es como se muestra en la Fig. 26-3. Sin embargo, $\mathscr{E} = 120$ V e I no es mayor de 25 A.

a) En este caso, $I = 20$ A y la d.p. de A a B es de 115 V. Así que,

$$115\ \text{V} = +120\ \text{V} - (20\ \text{A})r$$

de donde $r = 0.25\ \Omega$.

b) Ahora, $I = 40$ A. Por consiguiente,

$$\text{d.p. en las terminales} = \mathscr{E} - Ir = 120\ \text{V} - (40\ \text{A})(0.25\ \Omega) = 110\ \text{V}$$

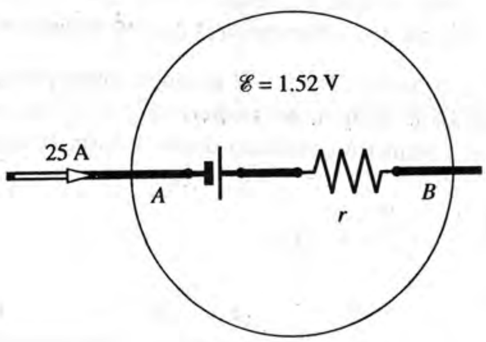


Fig. 26-3

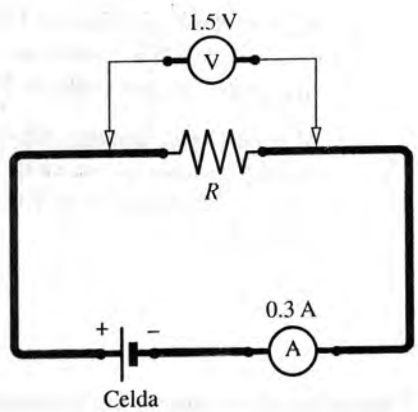


Fig. 26-4

26.11 Como se muestra en la Fig. 26-4, el método amperímetro-voltímetro es utilizado para medir una resistencia R desconocida. La lectura del amperímetro es de 0.3 A y la del voltímetro es de 1.50 V. Calcúlese el valor de R si el amperímetro y el voltímetro son ideales.

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1.50\ \text{V}}{0.3\ \text{A}} = 5\ \Omega$$

26.12 Una varilla de metal mide 2 m de largo y 8 mm de diámetro. Calcúlese su resistencia si la resistividad del metal es $1.76 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$.

$$R = \rho\frac{L}{A} = (1.76 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m})\frac{2\ \text{m}}{\pi(4 \times 10^{-3}\ \text{m})^2} = 7 \times 10^{-4}\ \Omega$$

26.13 El alambre del número 10 tiene un diámetro de 2.59 mm. ¿Cuántos metros de alambre de aluminio del mismo número se necesitan para hacer una resistencia de 1.0 Ω? La ρ para el aluminio es $2.8 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$.

De $R = \rho L/A$, tenemos

$$L = \frac{RA}{\rho} = \frac{(1.0\,\Omega)(\pi)(2.59 \times 10^{-3}\ \text{m})^2/4}{2.8 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}} = 0.19\ \text{km}$$

26.14 (Este problema da una introducción a una unidad que algunas veces se utiliza en Estados Unidos.) Un alambre de cobre del número 24 tiene un diámetro de 0.020 1 pulg. Calcúlese *a*) el área de la sección transversal del alambre en milésimas circulares y *b*) la resistencia de 100 pies de alambre. La resistividad del cobre es de 10.4 Ω · milésimas circulares/pies.

El área de un círculo en milésimas circulares está definida como el cuadrado del diámetro del círculo expresado en milésimas, donde 1 mil = 0.001 pulg.

a) área en mil circulares = $(20.1\ \text{mil})^2$ 404 mil circulares

b) $$R = \rho \frac{L}{A} = \frac{(10.4\ \Omega \cdot \text{mil circulares/pies})\,100\ \text{pies}}{404\ \text{mil circulares}} = 2.57\ \Omega$$

26.15 La resistencia de una bobina de cobre es de 3.35 Ω a 0 °C. ¿Cuál es su resistencia a 50 °C? Para el cobre $\alpha = 4.3 \times 10^{-3}\ °\text{C}^{-1}$.

$$R = R_0 + \alpha R_0(T - T_0) = 3.35\ \Omega + (4.3 \times 10^{-3}\ °\text{C}^{-1})(3.35\ \Omega)(50\ °\text{C}) = 4.1\ \Omega$$

26.16 Se requiere de una resistencia con un valor de 30.0 Ω que sea independiente de la temperatura. Para lograrlo, se utiliza un resistor de aluminio con valor R_{01} a 0 °C, conectado en serie con un resistor de carbón con valor R_{02} a 0 °C. Evalúense R_{01} y R_{02} dado que $\alpha_1 = 3.9 \times 10^{-3}\ °\text{C}^{-1}$ para el aluminio y $\alpha_2 = -0.50 \times 10^{-3}\ °\text{C}^{-1}$ para el carbón.

La resistencia combinada, a la temperatura T, será

$$\begin{aligned} R &= [R_{01} + \alpha_1 R_{01}(T - T_0)] + [R_{02} + \alpha_2 R_{02}(T - T_0)] \\ &= (R_{01} + R_{02}) + (\alpha_1 R_{01} + \alpha_2 R_{02})(T - T_0) \end{aligned}$$

Así, ya que se tienen dos condiciones

$$R_{01} + R_{02} = 30.0\ \Omega \qquad \text{y} \qquad \alpha_1 R_{01} + \alpha_2 R_{02} = 0$$

Sustituyendo los valores dados de α_1 y α_2 y resolviendo para R_{01} y R_{02} se encuentra que

$$R_{01} = 3.4\ \Omega \qquad R_{02} = 27\ \Omega$$

26.17 En el modelo de Bohr, el electrón del átomo de hidrógeno se mueve en una orbita circular de radio 5.3×10^{-11} m con una rapidez de 2.2×10^6 m/s. Determínese su frecuencia f y la corriente I en la órbita.

$$f = \frac{v}{2\pi r} = \frac{2.2 \times 10^6 \text{ m/s}}{2\pi(5.3 \times 10^{-11} \text{ m})} = 6.6 \times 10^{15} \text{ rev/s}$$

Cada vez que el electrón circunda la órbita, transporta una carga e alrededor del giro. La carga que está pasando por un punto sobre el giro cada segundo es

$$I = ef = (1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(6.6 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}) = 1.1 \text{ mA}$$

26.18 Un alambre cuya resistencia es de 5.0 Ω se estira uniformemente de tal forma que su longitud se triplica. ¿Cuál es su nueva resistencia?

Se utilizará $R = \rho L/A$ para calcular la resistencia del alambre estirado. Para encontrar ρ, se utilizarán los datos iniciales del alambre

$$5.0\ \Omega = \rho L_0/A_0 \quad \text{o} \quad \rho = (A_0/L_0)(5.0\ \Omega)$$

Se tomará $L = 3L_0$. Para calcular A en términos de A_0 se observará que el volumen del alambre no cambia. Entonces,

$$V_0 = L_0 A_0 \quad \text{y} \quad V_0 = LA$$

con lo cual

$$LA = L_0 A_0 \quad \text{o} \quad A = \left(\frac{L_0}{L_0}\right)(A_0) = \frac{A_0}{3}$$

Entonces,

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{(A_0/L_0)(5.0\ \Omega)(3L_0)}{A_0/3} = 9(5.0\ \Omega) = 45\ \Omega$$

26.19 Se desea hacer un alambre que tenga una resistencia de 8.0 Ω de 5.0 cm³ de un metal que tiene una resistividad de $9.0 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m. ¿Cuál deberá ser su longitud y su sección transversal?

Utilizaremos $R = \rho L/A$ con $R = 8.0\ \Omega$ y $\rho = 9.0 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m. Se conoce que el volumen del alambre (el cual es LA) es de 5.0×10^{-6} m³. Por lo tanto, se tienen dos ecuaciones para encontrar L y A:

$$8.0\ \Omega = (9.0 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m})\left(\frac{L}{A}\right) \quad \text{y} \quad LA = 5.0 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

De donde se obtiene $L = 21$ m y $A = 2.4 \times 10^{-7}$ m².

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

26.20 ¿Cuántos electrones por segundo pasan a través de la sección de un alambre que lleva una corriente de 0.70 A? *Resp.* 4.4×10^{18} electrones/s

26.21 Un cañón de electrones de un aparato de TV emite un haz de electrones. La corriente del haz es de 1.0×10^{-5} A. ¿Cuántos electrones inciden sobre la pantalla de TV cada segundo? ¿Qué cantidad de carga golpea por minuto la pantalla? *Resp.* 6.3×10^{13} electrones/s, -6.0×10^{-4} C/min

26.22 ¿Cuál es la corriente que circula por un tostador de 8.0 Ω cuando está operando a 120 V? *Resp.* 15 A

26.23 ¿Cuál es la diferencia de potencial necesaria para pasar 3.0 A a través de 28 Ω? *Resp.* 84 V

26.24 Determínese la diferencia de potencial entre los extremos de un alambre de resistencia de 5.0 Ω si pasan 720 C por minuto a través de él. *Resp.* 60 V

26.25 Una barra colectora de cobre que lleva 1200 A tiene una caída de potencial de 1.2 mV a lo largo de 24 cm. ¿Cuál es la resistencia por metro de barra? *Resp.* 4.2 $\mu\Omega$/m

26.26 Un amperímetro se conecta en serie con una resistencia desconocida y un voltímetro se conecta através de los extremos de una resistencia. Si la lectura del amperímetro es de 1.2 A y la del voltímetro es de 18 V, calcúlese el valor de la resistencia. Considérese que los medidores son ideales. *Resp.* 15 Ω

26.27 Una compañía nacional que suministra energía eléctrica instala dos alambres de cobre de 100 m desde la calle principal hasta el predio de un consumidor. Si la resistencia del cobre es de 0.10 Ω por cada 1000 m, determínese la caída de voltaje en la línea para una corriente de carga estimada en 120 A. *Resp.* 2.4 V

26.28 Cuando se prueba la resistencia del aislante entre la bobina del motor y la armadura, el valor obtenido es de 1.0 megaohm (10^6 Ω). ¿Cuánta corriente pasa a través del aislante del motor, si el voltaje de prueba es de 1000 V? *Resp.* 1.0 mA

26.29 Calcúlese la resistencia interna de un generador eléctrico que tiene una fem de 120 V y un voltaje en sus terminales de 110 V cuando suministra 20 A. *Resp.* 0.50 Ω

26.30 Una pila seca que suministra 2 A tiene un voltaje en sus terminales de 1.41 V. ¿Cuál es la resistencia interna de la pila si su voltaje a circuito abierto es de 1.59 V? *Resp.* 0.09 Ω

26.31 Una pila tiene una fem de 1.54 V. Cuando se conecta en serie con una resistencia de 1.0 Ω, la lectura que marca un voltímetro conectado a través de las terminales de la pila es de 1.40 V. Determínese la resistencia interna de la pila. *Resp.* 0.10 Ω

26.32 La resistencia interna de un acumulador de 6.4 V es de 4.8 mΩ. ¿Cuál es teóricamente la corriente máxima en un corto circuito? (En la práctica, los cables conductores y las conexiones tienen alguna resistencia y cuando se hace un análisis teórico estos valores no se toman en cuenta.) *Resp.* 1.3 kA

26.33 Sea una batería de fem igual a 13.2 V y de resistencia interna 24.0 mΩ. Si la corriente de carga es de 20.0 A, determínese el voltaje en la terminales. *Resp.* 12.7 V

26.34 Una batería tiene una fem de 25.0 V y resistencia interna de 0.200 Ω. Calcúlese su voltaje en las terminales *a*) cuando la corriente que libera es de 8.00 A, y *b*) cuando se está cargando con 8.00 A. *Resp.* *a*) 23.4 V; *b*) 26.6 V

26.35 Un cargador de baterías suministra 10 A para cargar un acumulador que tiene un voltaje a circuito abierto de 5.6 V. Si un voltímetro se conecta através del cargador y marca una lectura de 6.8 V, ¿cuál es la resistencia interna del acumulador en ese momento? *Resp.* 0.12 Ω

26.36 Encuéntrese la diferencia de potencial entre los puntos *A* y *B* en la Fig. 26-5 si *R* es de 0.70 Ω. ¿Cuál es el punto que está a mayor potencial? *Resp.* −5.1 V, el punto A

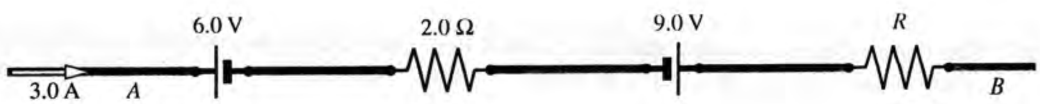


Fig. 26-5

26.37 Repítase el problema 26.36 si la corriente fluye en dirección opuesta y $R = 0.70$ Ω. *Resp.* 11.1 V, el punto *B*

26.38 En la Fig. 26-5, ¿qué tan grande debe ser *R* para que la caída de potencial de *A* a *B* sea 12 V? *Resp.* 3.0 Ω.

26.39 Para el circuito que se muestra en la Fig. 26-6, encuéntrese la diferencia de potencial desde *a*) *A* hasta *B*, *b*) *B* hasta *C*, *c*) *C* hasta *A*. Nótese que la corriente dada es de 2.0 A. *Resp.* *a*) −48 V. *b*) +28 V, *c*) +20 V

26.40 Calcúlese la resistencia de 180 m de alambre de plata que tiene una sección transversal de 0.30 mm². La resistividad de la plata es de 1.6×10^{-8} Ω · m. *Resp.* 9.6 Ω

26.41 La resistividad del aluminio es de 2.8×10^{-8} Ω · m. ¿Qué longitud debe tener una pieza del mismo metal, de 1.0 mm de diámetro, para que su resistencia sea de 4.0 Ω? *Resp.* 0.11 km

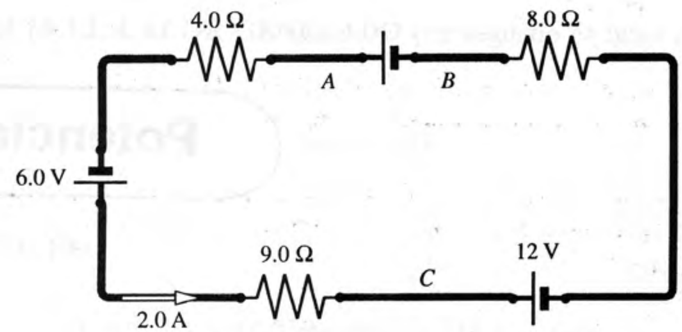


Fig. 26-6

26.42 El alambre de cobre del número 6 tiene un diámetro de 0.162 pulg. *a*) Calcúlese su área en milipulgadas circulares. *b*) Si $\rho = 10.4\ \Omega \cdot$ milipulgadas circulares/pies, encuéntrese la resistencia de 1.0×10^3 pies de alambre. (Refiérase al problema 26.14.) *Resp.* *a*) 26.0×10^3 milipulgadas circulares; *b*) 0.40 Ω

26.43 Una bobina de alambre tiene una resistencia de 25.00 Ω a 20 °C y una resistencia de 25.17 Ω a 35 °C. ¿Cuál es su coeficiente térmico de resistencia? *Resp.* 4.5×10^{-4} °C^{-1}

capítulo 27

Potencia eléctrica

EL TRABAJO ELÉCTRICO (en joules) requerido para llevar una carga q (en coulombs) a través de una diferencia de potencial V (en volts) está dado por

$$W = qV$$

Cuando a q y V se les dan los signos apropiados (es decir, elevación de potencial positivo y caída de potencial negativo), el trabajo tendrá el signo adecuado. Entonces, para llevar una carga positiva a través de una elevación de potencial, se debe realizar sobre la carga un trabajo positivo.

LA POTENCIA ELÉCTRICA (en watts) que entrega una fuente de energía al llevar una carga q (en coulombs) a través de una elevación de potencial V (en volts) en un tiempo t (en segundos) es

$$\text{Potencia entregada} = \frac{\text{trabajo}}{\text{tiempo}}$$

$$\mathrm{P} = \frac{Vq}{t}$$

Ya que $q/t = I$, esta ecuación se puede escribir como

$$\mathrm{P} = VI$$

donde I está en amperes.

LA PÉRDIDA DE POTENCIA EN UNA RESISTENCIA se encuentra sustituyendo V en VI por IR, o reemplazando I en VI por V/R, para obtener

$$\mathrm{P} = VI = I^2 R = \frac{V^2}{R}$$

EN UNA RESISTENCIA EL CALOR GENERADO por segundo es igual a la potencia perdida en la resistencia:

$$P = VI = I^2R$$

CONVERSIONES ÚTILES:

$$1\ \text{W} = 1\ \text{J/s} = 0.239\ \text{cal/s} = 0.738\ \text{pie} \cdot \text{lb/s}$$
$$1\ \text{kW} = 1.341\ \text{hp} = 56.9\ \text{Btu/min}$$
$$1\ \text{hp} = 746\ \text{W} = 33\ 000\ \text{pie} \cdot \text{lb/min} = 42.4\ \text{Btu/min}$$
$$1\ \text{kW} \cdot \text{h} = 3.6 \times 10^6\ \text{J} = 3.6\ \text{MJ}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

27.1 Calcular el trabajo y la potencia promedio que se requiere para transferir 96 kC de carga en una hora (1.0 h) a través de una elevación de potencial de 50 V.

$$W = qV = (96\ 000\ \text{C})(50\ \text{V}) = 4.8 \times 10^6\ \text{J} = 4.8\ \text{MJ}$$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{4.8 \times 10^6\ \text{J}}{3600\ \text{s}} = 1.3\ \text{kW}$$

27.2 ¿Cuánta corriente consume un foco de 60 W cuando se conecta a un voltaje de 120 V?

De la ecuación $P = VI$,

$$I = \frac{P}{V} = \frac{60\ \text{W}}{120\ \text{V}} = 0.50\ \text{A}$$

27.3 Un motor eléctrico consume 5.0 A de una línea de 110 V. Determinar la potencia aportada y la energía, en J y kW · h, suministrada al motor en 2.0 h.

$$\text{Potencia} = P = VI = (110\ \text{V})(5.0\ \text{A}) = 0.55\ \text{kW}$$
$$\text{Energía} = Pt = (550\ \text{W})(7200\ \text{s}) = 4.0\ \text{MJ}$$
$$= (0.55\ \text{kW})(2.0\ \text{h}) = 1.1\ \text{kW} \cdot \text{h}$$

27.4 Una plancha eléctrica tiene una resistencia de 20 Ω y consume una corriente de 5.0 A. Calcular el calor, en joules, desarrollado en 30 s.

$$\text{Energía} = I^2Rt = (5\ \text{A})^2(20\ \Omega)(30\ \text{s}) = 15\ \text{kJ}$$

27.5 Un calentador eléctrico tiene una resistencia de 8.0 Ω y consume una corriente de 15 A de la línea principal. ¿Cuál es la rapidez de calentamiento, en W? ¿Cuál es el costo de operación del calentador en un periodo de 4.0 h a razón de 10 ¢/kW · h?

$$W = I^2R = (15\ \text{A})^2(8.0\ \Omega) = 1800\ \text{W} = 1.8\ \text{kW}$$

$$\text{Costo} = (1.8\ \text{kW})(4.0\ \text{h})(10\ ¢/\text{kW}\cdot\text{h}) = 72\ ¢$$

27.6 Una bobina disipa 800 cal/s cuando se suministran 20 V a través de sus extremos. Calcular su resistencia.

$$\text{P} = (800\ \text{cal/s})(4.184\ \text{J/cal}) = 3347\ \text{J/s}$$

Entonces, como la $\text{P} = V^2/R$,

$$R = \frac{(20\ \text{V})^2}{3347\ \text{J/s}} = 0.12\ \Omega$$

27.7 Una línea tiene una resistencia total de 0.20 Ω y suministra 10.00 kW a 250 V a una pequeña fábrica. ¿Cuál es la eficiencia de la transmisión?

Utilizamos $\text{P} = VI$ para calcular $I = \text{P}/V$. Entonces

$$\text{Potencia perdida en la línea} = I^2R = \left(\frac{\text{P}}{V}\right)^2 R = \left(\frac{10\,000\ \text{W}}{250\ \text{V}}\right)^2 (0.20\ \Omega) = 0.32\ \text{kW}$$

$$\text{Eficiencia} = \frac{\text{potencia entregada por la línea}}{\text{potencia proporcionada a la línea}} = \frac{10.00\ \text{kW}}{(10.00 + 0.32)\ \text{kW}} = 0.970 = 97.0\%$$

27.8 Un motor de malacate alimentado por 240 V consume 12.0 A para levantar una carga de 800 kg a razón de 9.00 m/min. Determinar la potencia aportada al motor y la potencia aprovechada, ambas en caballos de potencia, y la eficiencia total del sistema.

$$\text{Potencia aportada} = IV = (12.0\ \text{A})(240\ \text{V}) = 2880\ \text{W} = (2.88\ \text{kW})(1.34\ \text{hp/kW}) = 3.86\ \text{hp}$$

$$\text{Potencia aprovechada} = F\upsilon = (800 \times 9.81\ \text{N})\left(\frac{9.00\ \text{m}}{\text{min}}\right)\left(\frac{1.00\ \text{hp}}{746\ \text{J/s}}\right)\left(\frac{1.00\ \text{min}}{60.0\ \text{s}}\right) = 1.58\ \text{hp}$$

$$\text{Eficiencia} = \frac{1.58\ \text{hp de salida}}{3.86\ \text{hp de entrada}} = 0.408 = 40.8\%$$

27.9 Las luces de un automóvil se dejan prendidas por descuido. Éstas consumen 95.0 W. ¿Cuánto tiempo tardarán en agotarse los 12.0 V de la carga total de la batería, si el consumo relativo de la misma es de 150 amperes-hora (A · h)?

Como una aproximación, suponga que la batería mantiene su potencial de 12.0 V conforme se baja. Su consumo relativo de 150 A · h significa que puede proporcionar una energía equivalente a 150 A de corriente por 1.00 h (3600 s). Por consiguiente, la energía total que puede proporcionar la batería es

$$\text{Energía total aportada} = (\text{potencia})(\text{tiempo}) = (VI)t = (12.0\ \text{V} \times 150\ \text{A})(3600\ \text{s}) = 6.48 \times 10^6\ \text{J}$$

La energía consumida por las luces en un tiempo t es

$$\text{Energía consumida} = (95\ \text{W})(t)$$

Igualando las dos energías y resolviendo para t, encontramos $t = 6.82 \times 10^4\ \text{s} = 18.9\ \text{h}$.

27.10 ¿Cuál es el costo que resulta de calentar eléctricamente 50 litros de agua de 40 °C a 100 °C a 8.0 ¢/kW · h?

$$\text{Calor ganado por el agua} = (\text{masa}) \times (\text{calor específico}) \times (\text{elevación de temperatura})$$

$$= (50\ \text{kg}) \times (1000\ \text{cal/kg} \cdot {}^\circ\text{C}) \times (60\ {}^\circ\text{C}) = 3.0 \times 10^6\ \text{cal}$$

$$\text{Costo} = (3.0 \times 10^6\ \text{cal})\left(\frac{4.184\ \text{J}}{1\ \text{cal}}\right)\left(\frac{1\ \text{kW} \cdot \text{h}}{3.6 \times 10^6\ \text{J}}\right)\left(\frac{8.0\ ¢}{1\ \text{kW} \cdot \text{h}}\right) = 28¢$$

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

27.11 Un calentador tiene una especificación de 1600 W/120 V. ¿Cuánta corriente consume el calentador de una fuente de 120 V? *Resp.* 13.3 A

27.12 Una bombilla eléctrica está marcada con 40 W/120 V. ¿Cuál es su resistencia cuando se prende con una fuente de 120 V? *Resp.* 0.36 kΩ

27.13 La chispa de un relámpago artificial de 10.0 MV libera una energía de 0.125 MW · s. ¿Cuántos coulombs de carga fluyen? *Resp.* 0.012 5 C

27.14 En un conductor, cuyas terminales están conectadas a una diferencia de potencial de 100 V, existe una corriente de 1.5 A. Calcular la carga total transferida en un minuto, el trabajo que se hace para transferir esta carga y la potencia empleada para calentar al conductor si toda la energía eléctrica se convierte en calor. *Resp.* 90 C, 9.0 kJ, 0.15 kW

27.15 Un motor eléctrico consume 15.0 A a 110 V. Determinar *a*) la potencia aportada y *b*) el costo de operación del motor por 8.00 h a 10.0 ¢/kW · h. *Resp.* *a*) 1.65 kW; *b*) $1.32

27.16 Una corriente de 10 A fluye por una línea de 0.15 Ω de resistencia. Calcular la rapidez de producción de calor en watts. *Resp.* 15 W

27.17 Un asador eléctrico produce 400 cal/s cuando la corriente que pasa por él es de 8.0 A. Determine la resistencia del asador. *Resp.* 26 Ω

27.18 Una bombilla de 25.0 W y 120 V tiene en frío una resistencia de 45.0 Ω. Cuando se le aplica una diferencia de potencial, ¿cuál es la corriente instantánea? ¿Cuál es la corriente en condiciones normales de operación? *Resp.* 2.67 A, 0.208 A

27.19 Con una corriente de 400 A, un interruptor defectuoso se sobrecalienta debido a la falta de contacto superficial. Un milivoltímetro conectado a través del interruptor muestra una caída de 100 mV. ¿Cuál es la pérdida de potencia debida a la resistencia de contacto? *Resp.* 40.0 W

27.20 ¿Qué potencia disipa una bombilla eléctrica marcada con 60 W/120 V con un voltaje de 115 V? Desprecie la disminución en la resistencia cuando baja el voltaje. *Resp.* 55 W

27.21 El alambrado de una casa debe soportar una corriente de 30 A cuando disipa no más de 1.40 W de calor por metro de su longitud. ¿Cuál es el diámetro mínimo del alambre si tiene una resistividad de $1.68 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$? *Resp.* 3.7 mm

27.22 Un calentador eléctrico de 10.0 Ω trabaja con una línea de 110 V. Calcular la rapidez con la cual genera calor, en W y en cal/s. *Resp.* 1.21 kW = 290 cal/s

27.23 Un motor eléctrico, con una eficiencia de 95%, utiliza 20 A a 110 V. ¿Cuál es la potencia en caballos de fuerza aprovechada por el motor? ¿Cuántos watts se pierden en forma de calor? ¿Cuántas calorías de calor se producen por segundo? Si el motor trabaja durante 3.0 h, ¿qué energía, en MJ y en kW · h, se consume? *Resp.* 2.8 hp, 0.11 kW, 26 cal/s, 24 MJ = 6.6 kW · h

27.24 Una grúa eléctrica utiliza 8.0 A a 150 V para subir una carga de 450 kg a razón de 7.0 m/min. Determinar la eficiencia del sistema. *Resp.* 43%

27.25 ¿Cuál será la resistencia de un calentador eléctrico que se usa para elevar la temperatura de 500 g de agua de 28 °C hasta el punto de ebullición en 2.0 minutos? Suponga que se pierde el 25% del calor. El calentador trabaja con una línea de 110 V. *Resp.* 7.2 Ω

27.26 Calcular el costo por hora a razón de 8.0 ¢/kW · h para calentar con energía eléctrica un cuarto, si se requiere 1.0 kg/h de carbón de antracita que tiene un calor de combustión de 8000 kcal/kg. *Resp.* 74 ¢/h

27.27 Entre dos estaciones se transmite una potencia de 80 kV. Si el voltaje se puede incrementar a 160 kV sin cambiar el tamaño del cable, ¿qué potencia adicional es posible transmitir con la misma corriente? ¿Cuál es el efecto que tiene el aumento de potencia en las pérdidas por calor en la línea? *Resp.* potencia adicional = potencia original, no tiene efecto

27.28 Una batería de almacenamiento, con una fem de 6.4 V y resistencia interna de 0.080 Ω, es cargada con una corriente de 15 A. Calcular *a*) las pérdidas de potencia en el calentamiento interno de la batería, *b*) la rapidez con la cual se almacena la energía en la batería y *c*) su voltaje final. *Resp.* *a*) 18 W; *b*) 96 W; *c*) 7.6 V

27.29 Un tanque que contiene 200 kg de agua se utilizó como un baño de temperatura constante. ¿Cuánto tiempo se llevará el calentar el baño de 20 °C a 25 °C con un calentador de inmersión de 250 W? Desprecie la capacidad calórica de la estructura del tanque y las pérdidas por calor al aire. *Resp.* 4.6 h

capítulo 28

Resistencia equivalente; circuitos simples

RESISTENCIAS EN SERIE: Cuando la corriente puede seguir una sola trayectoria al fluir a través de dos o más resistores conectados en línea, se dice que los resistores están en *serie*. En otras palabras, cuando y sólo una de las terminales de un resistor se conecta directamente a una y sólo una de las terminales de otro resistor, los dos están en serie y la misma corriente pasa por ambos. Un *nodo* es un punto en donde se encuentran tres o más alambres o ramales que llevan corriente. No se tienen nodos entre elementos de circuitos (como capacitores, resistores y baterías) que estén conectados en serie. Un caso típico es el que se muestra en la Fig. 28-1*a*. Para varios resistores en serie, su resistencia equivalente, R_{eq}, está dada por

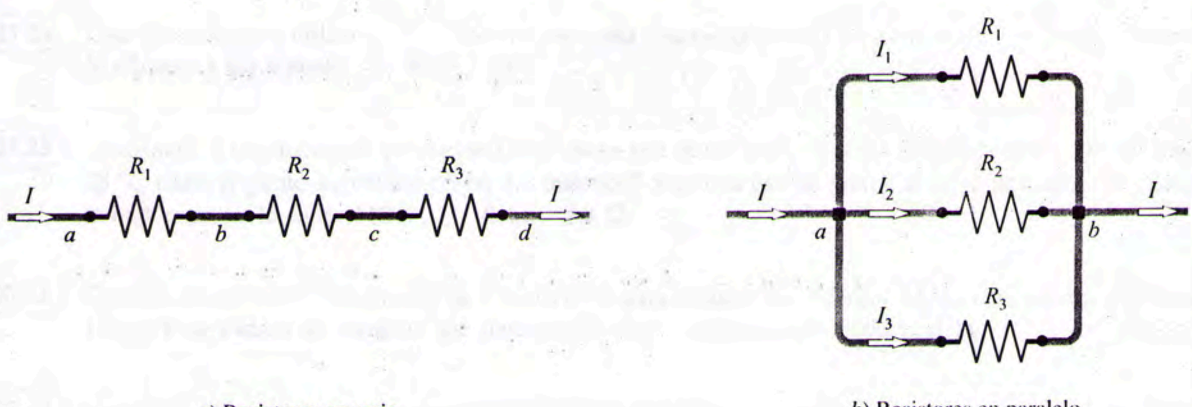
$I_t = I_1 = I_2 = I_3$

$V_t = V_1 + V_2 + V_3$

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots \qquad \text{(combinación en serie)}$$

donde $R_1, R_2, R_3, \ldots$, son las resistencias de los diversos resistores. Obsérvese que las resistencias conectadas en serie se comportan en forma similar a los capacitores en paralelo (véase el capítulo 25). Se supone que todos los alambres de conexión no tienen una resistencia efectiva.

En una combinación en serie, la corriente a través de cada resistencia es la misma para cualquiera de ellas. La caída de potencial (c.p.) a través de la combinación es igual a la suma de las caídas de potencial individuales. *La resistencia equivalente en serie siempre es mayor que la más grande de cada una de las resistencias.*



a) Resistores en serie

b) Resistores en paralelo

Fig. 28-1

RESISTENCIAS EN PARALELO: Varios resistores están conectados en *paralelo* entre a y b si un extremo de cada uno se conecta con alambres de baja resistencia en el punto a y el otro extremo conecta en el punto b. Un caso típico se muestra en la Fig. 28-1b. Su resistencia equivalente, R_{eq}, está dada por

$I_t = I_1 + I_2 + I_3$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots \qquad \text{(combinación en paralelo)}$$

$V_t = V_1 = V_2 = V_3$

La resistencia equivalente siempre es menor al valor más pequeño de las resistencias individuales. Si se conectan resistores adicionales en paralelo, el valor de R_{eq} disminuye para la combinación. Obsérvese que las resistencias en paralelo se combinan en forma similar a la combinación de capacitancias en serie (véase el capítulo 25).

La caída de potencial V a través de un resistor en paralelo es la misma que la caída de potencial a través de cada uno de los otros resistores de la combinación. La corriente a través del n-ésimo resistor es $I_n = V/R_n$ y la corriente total que entra a la combinación es igual a la suma de cada una de las corrientes de derivación.

PROBLEMAS RESUELTOS

28.1 Derívese la fórmula para la resistencia equivalente R_{eq} de los resistores R_1, R_2 y R_3, a) en serie y b) en paralelo, como se muestran en la Fig. 28-1a y b.

a) Para la combinación en serie,

$$V_{ad} = V_{ab} + V_{bc} + V_{cd} = IR_1 + IR_2 + IR_3$$

la corriente I es la misma para los tres resistores. Dividiendo entre I se tiene

$$\frac{V_{ad}}{I} = R_1 + R_2 + R_3 \qquad \text{o} \qquad R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

ya que V_{ad}/I es por definición la resistencia equivalente R_{eq} de la combinación.

b) La c.p. es igual para todos los resistores, así que

$$I_1 = \frac{V_{ab}}{R_1} \qquad I_2 = \frac{V_{ab}}{R_2} \qquad I_3 = \frac{V_{ab}}{R_3}$$

Puesto que la corriente de la línea I es la suma de las corrientes en las derivaciones,

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{V_{ab}}{R_1} + \frac{V_{ab}}{R_2} + \frac{V_{ab}}{R_3}$$

Dividiendo entre V_{ab} se tiene

$$\frac{I}{V_{ab}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

porque V_{ab}/I es por definición la resistencia equivalente R_{eq} de la combinación.

28.2 Como se muestra en la Fig. 28-2*a*, una batería (resistencia interna de 1 Ω) se conecta en serie con dos resistores. Calcúlese *a*) la corriente del circuito, *b*) la c.p. a través de cada resistor y *c*) la c.p. de las terminales de la batería.

El circuito es redibujado en la Fig. 28-2*b* para mostrar la resistencia de la batería. Se tiene

$$R_{eq} = 5\ \Omega + 12\ \Omega + 1\ \Omega = 18\ \Omega$$

Por consiguiente, el circuito equivalente es el que se muestra en la Fig. 28-2*c*. Al aplicar $V = IR$ se tiene

a)
$$I = \frac{V}{R} = \frac{18\ \text{V}}{18\ \Omega} = 1.0\ \text{A}$$

b) Puesto que $I = 1.0$ A, puede encontrarse la c.p. desde *b* hasta *c* por medio de

$$V_{bc} = IR_{bc} = (1.0\ \text{A})(12\ \Omega) = 12\ \text{V}$$

y desde *c* hasta *d* por

$$V_{cd} = IR_{cd} = (1.0\ \text{A})(5\ \Omega) = 5\ \text{V}$$

Nótese que *I* es la misma en todos los puntos en un circuito en serie.

c) La c.p. de las terminales de la batería es la c.p. desde *a* hasta *e*. Por lo tanto,

$$\text{c.p. de las terminales} = V_{bc} + V_{cd} = 12 + 5 = 17\ \text{V}$$

O bien, se podría empezar en *e* y calcular los cambios de potencial a través de la batería desde *e* hasta *a*. Considérese las caídas de voltaje como negativas, así que

$$\text{c.p. de las terminales} = -Ir + \mathscr{E} = -(1.0\ \text{A})(1\ \Omega) + 18\ \text{V} = 17\ \text{V}$$

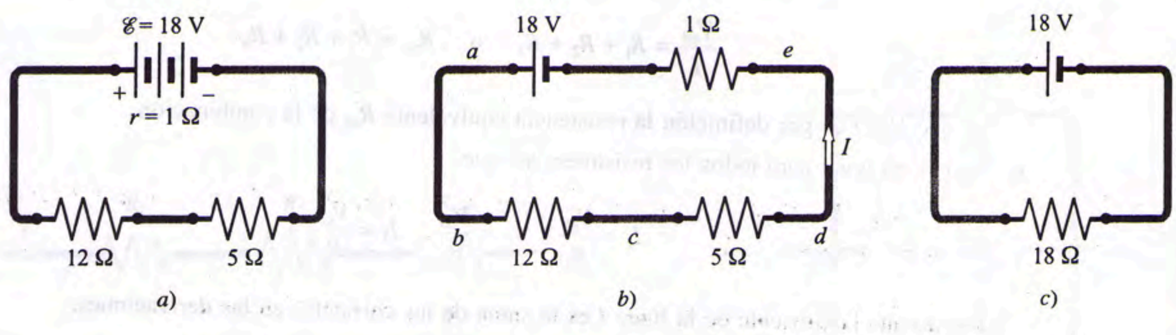


Fig. 28-2

28.3 En cierta red doméstica de 120 V se tienen conectadas las siguientes bombillas: 40.0 W, 60.0 W y 75.0 W. Determínese la resistencia equivalente de estas bombillas.

En una red eléctrica doméstica el circuito está construido de tal manera que cada dispositivo está conectado en paralelo con los otros. De $P = VI = V^2/R$, se tiene para la primera bombilla

$$R_1 = \frac{V^2}{P_1} = \frac{(120\ \text{V})^2}{40.0\ \text{W}} = 360\ \Omega$$

De la misma manera, $R_2 = 240\ \Omega$ y $R_3 = 192\ \Omega$. En virtud de que están en paralelo,

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{360\ \Omega} + \frac{1}{240\ \Omega} + \frac{1}{192\ \Omega} \quad \text{o} \quad R_{eq} = 82.3\ \Omega$$

Como prueba, se ve que la potencia total que se desprende de la línea es 40.0 W + 60.0 W + 75.0 W = 175.0 W. Por lo tanto, con $P = V^2/R$, se obtiene

$$R_{eq} = \frac{V^2}{\text{poder total}} = \frac{(120\ \text{V})^2}{175.0\ \text{W}} = 82.3\ \Omega$$

28.4 ¿Qué resistencia debe haber en paralelo con una de 12 Ω para obtener una resistencia combinada de 4 Ω?

De

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

se obtiene

$$\frac{1}{4\ \Omega} = \frac{1}{12\ \Omega} + \frac{1}{R_2}$$

de donde

$$R_2 = 6\ \Omega$$

28.5 Varios resistores de 40 Ω son conectados de tal forma que fluyen 15 A de una fuente de 120 V. ¿Cómo puede lograrse esto?

La resistencia equivalente debe ser tal que fluyan 15 A de 120 V. Entonces:

$$R_{eq} = \frac{V}{I} = \frac{120\ \text{V}}{15\ \text{A}} = 8\ \Omega$$

Los resistores deben estar en paralelo, ya que la resistencia equivalente va a ser menor que cualquiera de ellos. Sea n el número de resistores de 40 Ω, entonces se tiene

$$\frac{1}{80\ \Omega} = n\left(\frac{1}{40\ \Omega}\right) \quad \text{o} \quad n = 5$$

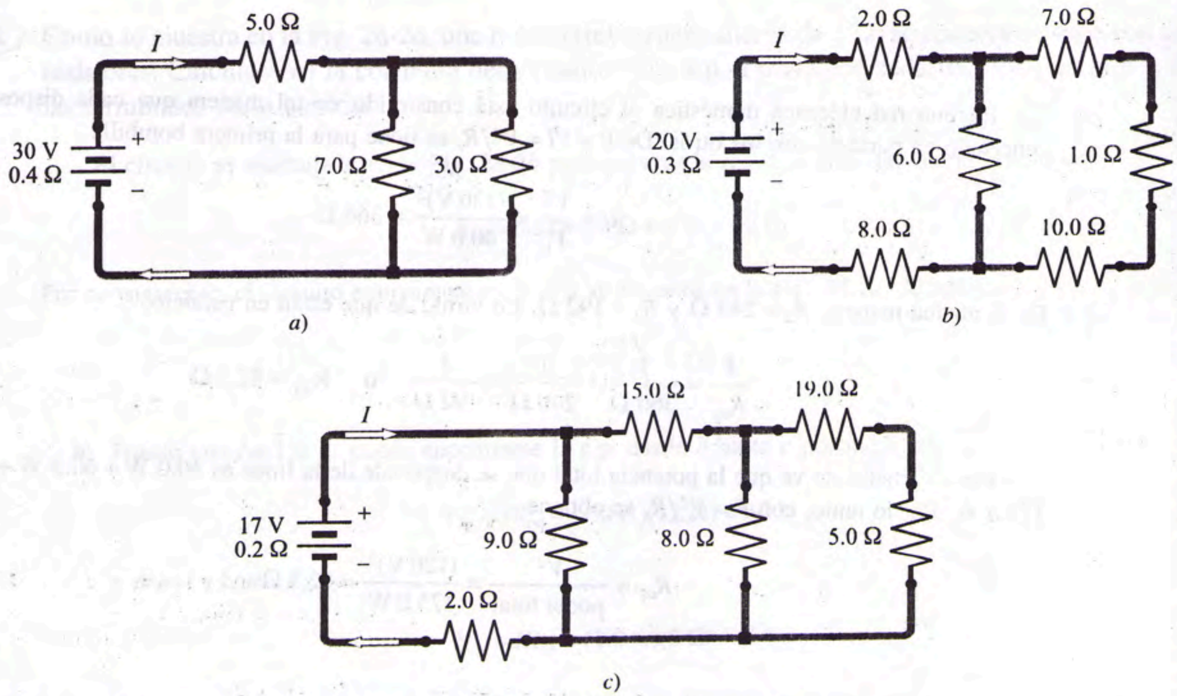


Fig. 28-3

28.6 Para cada uno de los circuitos que se muestran en la Fig. 28-3, determínese la corriente I a través de la batería.

a) Las resistencias de 3.0 Ω y 7.0 Ω están en paralelo; su resistencia equivalente, R_1, se encuentra

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{3.0\ \Omega} + \frac{1}{7.0\ \Omega} = \frac{10}{21\ \Omega} \quad \text{o} \quad R_1 = 2.1\ \Omega$$

Por lo tanto, la resistencia equivalente para todo el circuito es

$$R_{eq} = 2.1\ \Omega + 5.0\ \Omega + 0.4\ \Omega = 7.5\ \Omega$$

y la corriente en la batería es

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R_{eq}} = \frac{30\ \text{V}}{7.5\ \Omega} = 4.0\ \text{A}$$

b) Las resistencias de 7.0 Ω, 1.0 Ω y 10.0 Ω están en serie; su resistencia equivalente es de 18.0 Ω. Entonces la de 18.0 Ω está en paralelo con la de 6.0 Ω; la resistencia de esta combinación, R_1, se da por

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{18.0\ \Omega} + \frac{1}{6.0\ \Omega} \quad \text{o} \quad R_1 = 4.5\ \Omega$$

Por consiguiente, la resistencia equivalente del circuito completo es

$$R_{eq} = 4.5\ \Omega + 2.0\ \Omega + 8.0\ \Omega + 0.3\ \Omega = 14.8\ \Omega$$

y la corriente en la batería es

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R_{eq}} = \frac{20\ \text{V}}{14.8\ \Omega} = 1.4\ \text{A}$$

c) Los 5.0 Ω y 19.0 Ω están en serie; su resistencia conjunta es de 24.0 Ω. Después los 24.0 Ω están en paralelo con los 8.0 Ω; su resistencia conjunta R_1, se determina por

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{24.0\ \Omega} + \frac{1}{8.0\ \Omega} \quad \text{o} \quad R_1 = 6.0\ \Omega$$

Ahora bien $R_1 = 6.0\ \Omega$ está en serie con 15.0 Ω; su resistencia conjunta es 6.0 Ω + 15.0 Ω = 21.0 Ω. Como los 21.0 Ω están en paralelo con los 9.0 Ω su resistencia conjunta es

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{21.0\ \Omega} + \frac{1}{9.0\ \Omega} \quad \text{o} \quad R_2 = 6.3\ \Omega$$

por consiguiente la resistencia equivalente para el circuito completo es

$$R_{eq} = 6.3\ \Omega + 2.0\ \Omega + 0.2\ \Omega = 8.5\ \Omega$$

y la corriente en la batería es

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R_{eq}} = \frac{17\ \text{V}}{8.5\ \Omega} = 2.0\ \text{A}$$

28.7 Para el circuito mostrado en la Fig. 28-4, determínese la corriente en cada resistor y la corriente que sale de la batería.

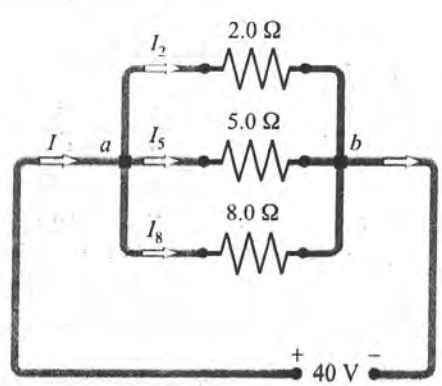


Fig. 28-4

Nótese que la c.p. de a a b es de 40 V. Así que, la c.p. en cada resistor es de 40 V. Entonces,

$$I_2 = \frac{40\text{ V}}{2.0\ \Omega} = 20\text{ A} \qquad I_5 = \frac{40\text{ V}}{5.0\ \Omega} = 8.0\text{ A} \qquad I_8 = \frac{40\text{ V}}{8.0\ \Omega} = 5.0\text{ A}$$

Dado que la I se divide en las tres corrientes,

$$I = I_2 + I_5 + I_8 = 20\text{ A} + 8.0\text{ A} + 5.0\text{ A} = 33\text{ A}$$

28.8 En la Fig. 28-5, la batería tiene una energía interna de 0.7 Ω. Determínese *a*) la corriente cedida por la batería, *b*) la corriente en cada uno de los resistores de 15 Ω y *c*) el voltaje en las terminales de la batería.

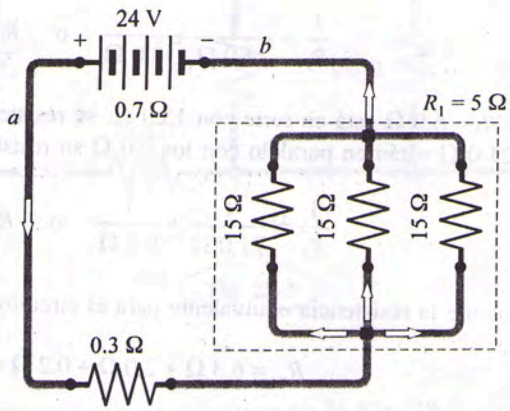


Fig. 28-5

a) Para las resistencias agrupadas en paralelo R_1 se tiene

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{15\ \Omega} + \frac{1}{15\ \Omega} + \frac{1}{15\ \Omega} = \frac{3}{15\ \Omega} \quad \text{o} \quad R_1 = 5.0\ \Omega$$

Por lo tanto,

$$R_{eq} = 5.0\ \Omega + 0.3\ \Omega + 0.7\ \Omega = 6.0\ \Omega$$

y

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R_{eq}} = \frac{24\text{ V}}{6.0\ \Omega} = 4.0\text{ A}$$

b) **Método 1**

La combinación de las tres resistencias conectadas en paralelo es equivalente a $R_1 = 5.0\ \Omega$. Una corriente de 4.0 A fluye través de ella. Por lo tanto, la c.p. a través de la combinación es

$$IR_1 = (4.0\text{ A})(5.0\ \Omega) = 20\text{ V}$$

Ésta también es la c.p. en cada uno de los resistores. Por consiguiente, la corriente que pasa por cada resistor de 15 Ω es

$$I_{15} = \frac{V}{R} = \frac{20\ \text{V}}{15\ \Omega} = 1.3\ \text{A}$$

Método 2

En este ejemplo especial, se sabe que un tercio de la corriente circulará a través de cada uno de los resistores de 15 Ω. Así que

$$I_{15} = \frac{4.0\ \text{A}}{3} = 1.3\ \text{A}$$

c) Iniciando en *a* y dirigiéndose hacia *b* por fuera de la batería:

$$V \text{ de } a \text{ hasta } b = -(4.0\ \text{A})(0.3\ \Omega) - (4.0\ \text{A})(5.0\ \Omega) = -21.2\ \text{V}$$

La c.p. en las terminales de la batería es de 21.2 V. Para el caso de la batería descargándose

$$\text{c.p. en las terminales} = \mathscr{E} - Ir = 24\ \text{V} - (4.0\ \text{A})(0.7\ \Omega) = 21.2\ \text{V}$$

28.9 Determínese la resistencia equivalente entre los puntos *a* y *b* para la combinación mostrada en la Fig. 28-6*a*.

Los resistores de 3.0 Ω y 2.0 Ω están conectados en serie y su resistencia equivalente es de 5.0 Ω. Estos 5.0 Ω están en paralelo con los 6.0 Ω y su resistencia equivalente, R_1, es,

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{5.0\ \Omega} + \frac{1}{6.0\ \Omega} = 0.20 + 0.167 = 0.367\ \Omega^{-1} \quad \text{o} \quad R_1 = 2.73\ \Omega$$

El circuito se reduce al que se muestra en la Fig. 28-6*b*.

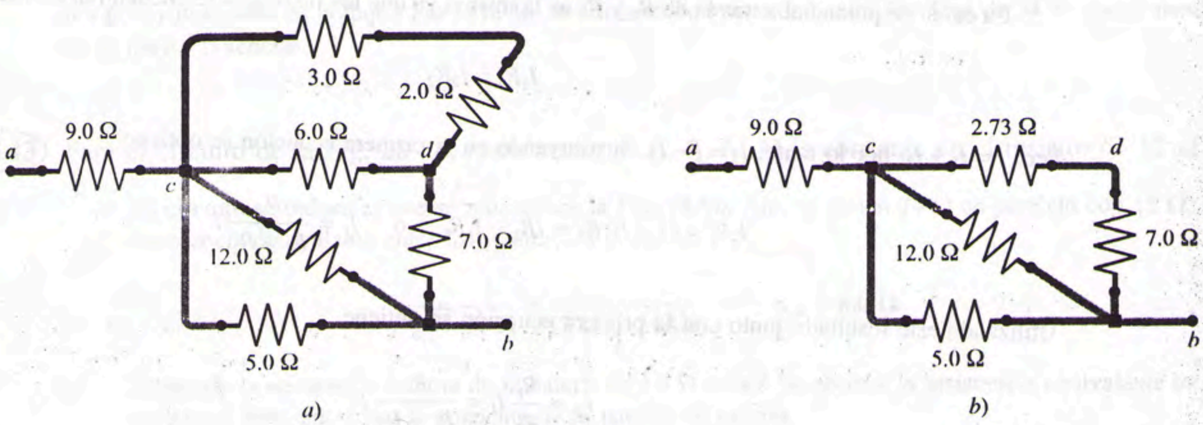


Fig. 28-6

Los 7.0 Ω y 2.73 Ω equivalen a 9.73 Ω. Ahora los 5.0 Ω, 12.0 Ω y 9.73 Ω están en paralelo, y su equivalente, R_2, es

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{5.0\ \Omega} + \frac{1}{12.0\ \Omega} + \frac{1}{9.73\ \Omega} = 0.386\ \Omega^{-1} \quad \text{o} \quad R_2 = 2.6\ \Omega$$

Estos 2.6 Ω están en serie con el resistor de 9.0 Ω. Por lo tanto, la resistencia equivalente de todo el circuito es 9.0 Ω + 2.6 Ω = 11.6 Ω.

28.10 Una corriente de 5.0 A fluye dentro del circuito de la Fig. 28-6 desde el punto a hasta el punto b. *a)* ¿Cuál es la diferencia de potencial de a a b? *b)* ¿Cuánta corriente fluye por el resistor de 12.0 Ω?

En el problema 28.9 se encontró que la resistencia equivalente del circuito es de 11.6 Ω, y se sabe que la corriente a través de él es de 5.0 A.

a) La caída de voltaje de a a $b = IR_{eq} = (5.0\ \text{A})(11.6\ \Omega) = 58\ \text{V}$

b) La caída de voltaje de a a c es (5.0 A)(9.0 Ω) = 45 V. Entonces, considerando lo calculado en la parte *a)*, la caída de voltaje de c a b es

$$58\ \text{V} - 45\ \text{V} = 13\ \text{V}$$

y la corriente en el resistor de 12.0 Ω es

$$I_{12} = \frac{V}{R} = \frac{13\ \text{V}}{12\ \Omega} = 1.1\ \text{A}$$

28.11 Como se muestra en la Fig. 28-7, la corriente I se divide en I_1 e I_2. Encuéntrese I_1 e I_2 en términos de I, R_1 y R_2.

La caída de potencial a través de R_1 y R_2 es la misma ya que los resistores se encuentran en paralelo, así

$$I_1R_1 = I_2R_2$$

Pero $I = I_1 + I_2$, por lo tanto, $I_2 = I - I_1$. Sustituyendo en la primera ecuación se obtiene

$$I_1R_1 = (I - I_1)R_2 = IR_2 - I_1R_2 \quad \text{o} \quad I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I$$

Utilizando este resultado junto con la primera ecuación se obtiene

$$I_2 = \frac{R_1}{R_2} I_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$

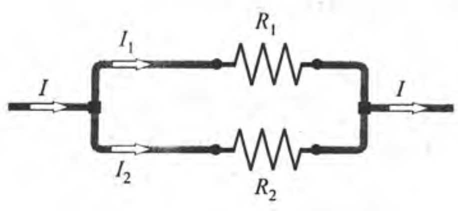


Fig. 28-7

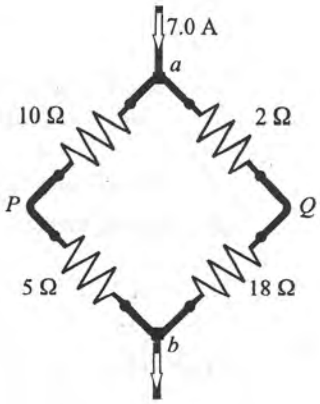


Fig. 28-8

28.12 Encuéntrese la diferencia de potencial entre los puntos P y Q en la Fig. 28-8. ¿Cuál punto tiene mayor potencial?

Del resultado del problema 28.11, la corriente a través de P y Q es

$$I_P = \frac{2\ \Omega + 18\ \Omega}{10\ \Omega + 5\ \Omega + 2\ \Omega + 18\ \Omega}(7.0\ \text{A}) = 4.0\ \text{A}$$

$$I_Q = \frac{10\ \Omega + 5\ \Omega}{10\ \Omega + 5\ \Omega + 2\ \Omega + 18\ \Omega}(7.0\ \text{A}) = 3.0\ \text{A}$$

Ahora iniciando en el punto P y yendo por el punto a hasta el punto Q, se encuentra que

$$\text{Cambio de potencial de } P \text{ a } Q = +(4.0\ \text{A})(10\ \Omega) - (3.0\ \text{A})(2\ \Omega) = +34\ \text{V}$$

(Nótese que cuando se va de P a a el potencial se eleva, ya que se va en contra de la corriente. Entonces, de a a Q hay una caída de voltaje.) Por lo tanto, la diferencia de potencial entre P y Q es de 34 V, con Q siendo el de mayor potencial.

28.13 Para el circuito de la Fig. 28-9*a*, encuéntrese *a*) I_1, I_2, I_3; *b*) la corriente en el resistor de 12 Ω.

a) El circuito se reduce al que se muestra en la Fig. 28-9*b*. Ahí, se tienen 24 Ω en paralelo con 12 Ω, la resistencia equivalente entre los puntos a y b es

$$\frac{1}{R_{ab}} = \frac{1}{24\ \Omega} + \frac{1}{12\ \Omega} = \frac{3}{24\ \Omega} \qquad \text{o} \qquad R_{ab} = 8.0\ \Omega$$

Sumando la resistencia interna de la batería de 1.0 Ω a ésta, se obtiene la resistencia equivalente total de 9.0 Ω. Para encontrar la corriente de la batería, se escribe

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}}{R_{eq}} = \frac{27\ \text{V}}{9.0\ \Omega} = 3.0\ \text{A}$$

Esta misma corriente fluye a través de la resistencia equivalente entre a y b, así que

$$\text{c.p. de } a \text{ a } b = \text{c.p. de } c \text{ a } d = I_1 R_{ab} = (3.0\ \text{A})(8.0\ \Omega) = 24\ \text{V}$$

Aplicando $V = IR$ para la derivación cd se obtiene

$$I_2 = \frac{V_{cd}}{R_{cd}} = \frac{24\ \text{V}}{24\ \Omega} = 1.0\ \text{A}$$

De la misma manera,

$$I_3 = \frac{V_{gh}}{R_{gh}} = \frac{24\ \text{V}}{12\ \Omega} = 2.0\ \text{A}$$

Al verificar se observa que $I_2 + I_3 = 3.0\ \text{A} = I_1$, como debe ser.

b) Ya que $I_2 = 1.0$ A, la c.p. a través del resistor de 2.0 Ω en la Fig. 28-9*b* es (1.0 A)(2.0 Ω) = 2.0 V. Pero ésta es también la c.p. a través del resistor de 12 Ω en la Fig. 28-9*a*. Aplicando $V = IR$ para los 12 Ω se obtiene

$$I_{12} = \frac{V_{12}}{R} = \frac{2.0\ \text{V}}{12\ \Omega} = 0.17\ \text{A}$$

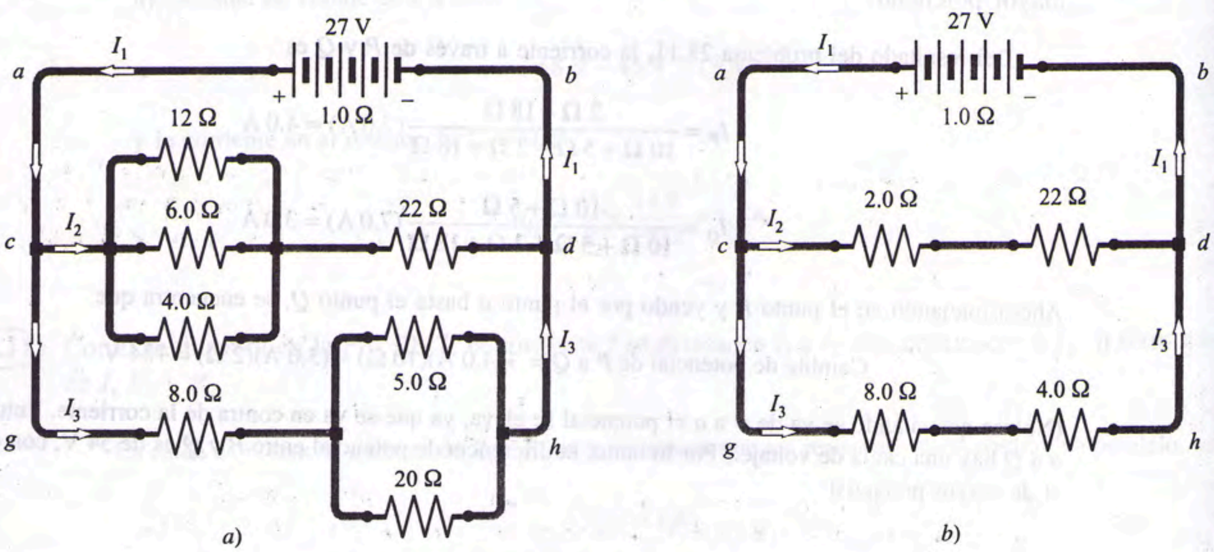


Fig. 28-9

28.14 Un galvanómetro tiene una resistencia de 400 Ω y con una corriente a través de él de 0.20 mA tiene una deflexión de escala completa. ¿De qué magnitud debe ser la resistencia de derivación que se le conectará para convertirlo en un amperímetro de 3.0 A?

En la Fig. 28-10 se identificó el galvanómetro con G y la resistencia de derivación como R_s. La corriente para una deflexión a escala completa es como se muestra.

La caída de voltaje desde a a b a través de G es la misma que a través de R_s. Por lo tanto,

$$(2.999\,8 \text{ A})R_s = (2.0 \times 10^{-4} \text{ A})(400 \ \Omega)$$

con lo cual $R_s = 0.027 \ \Omega$.

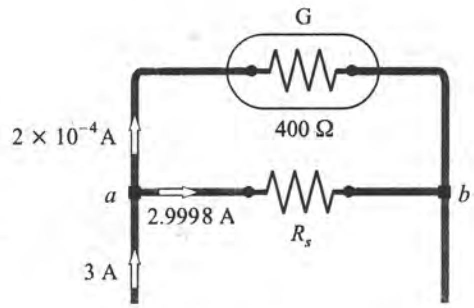


Fig. 28-10

28.15 Se desea construir un voltímetro, en el cual la aguja indicadora se deflecte en escala completa al aplicar una diferencia de potencial de 5.000 V, conectando una resistencia R_x en serie con un galvanómetro. El galvanómetro de 80.00 Ω se deflecta a escala completa para un potencial de 20.00 mV a través de él. Encuéntrese R_x.

Cuando el galvanómetro tiene la aguja deflectada a escala completa, la corriente a través de él es

$$I = \frac{V}{R} = \frac{20.00 \times 10^{-3} \text{ V}}{80.00 \ \Omega} = 2.500 \times 10^{-4} \text{ A}$$

Cuando R_x se conecta en serie con el galvanómetro, se desea que I sea de 2.500×10^{-4} A para una diferencia de potencial de 5.000 V a través de la combinación. Ya que, $V = IR$ se convierte en

$$5.000 \text{ V} = (2.500 \times 10^{-4} \text{ A}) = (80.00 \ \Omega + R_x)$$

por lo que $R_x = 19.92$ kΩ.

28.16 Las corrientes en el circuito de la Fig. 28-11 son estacionarias. Determínese I_1, I_2, I_3, y la carga en el capacitor.

Cuando un capacitor tiene una carga constante, como el que se considera aquí, la corriente que fluye a través de él es cero. Por lo tanto $I_2 = 0$, y el circuito se comporta como si le faltara el alambre del centro.

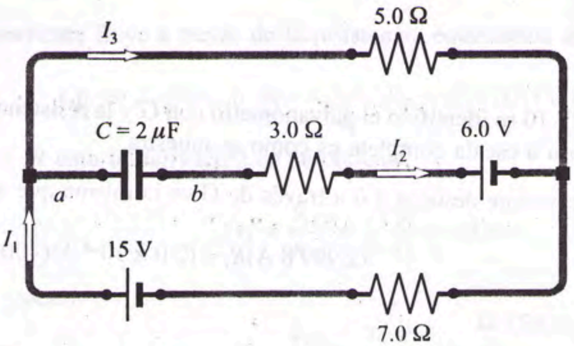


Fig. 28-11

Sin el alambre del centro, el circuito se reduce a una simple conexión de 12 Ω a través de una batería de 15 V. Por lo tanto,

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{15\text{ V}}{12\ \Omega} = 1.25\text{ A}$$

Resumiendo, ya que $I_2 = 0$, se obtiene que $I_3 = I_1 = 1.3$ A.

Para calcular la carga en el capacitor, se tiene que calcular la diferencia de voltaje entre los puntos *a* y *b*. Iniciando en *a* y yéndose por él alrededor de la parte superior del circuito.

$$\text{Cambio de voltaje de } a \text{ a } b = -(5.0\ \Omega)I_3 + 6.0\text{ V} + (3.0\ \Omega)I_2$$

$$= -(5.0\ \Omega)(1.25\text{ A}) + 6.0\text{ V} + (3.0\ \Omega)(0) = -0.25\text{ V}$$

Por lo tanto, *b* es la menor potencial y la placa del capacitor en *b* es negativa. Para encontrar la carga del capacitor, se tiene

$$Q = CV_{ab} = (2 \times 10^{-6}\text{ F})(0.25\text{ V}) = 0.5\ \mu\text{C}$$

28.17 Determínese la lectura del amperímetro y del voltímetro en el circuito de la Fig. 28-12. Supóngase que ambos medidores son ideales.

Un voltímetro ideal tiene una resistencia infinita y por lo tanto su alambre se puede quitar sin alterar el circuito. El amperímetro ideal tiene resistencia cero. Es posible demostrar (véase el capítulo 29) que el voltaje de las baterías en serie simplemente se suma o se resta. Las dos baterías de 6.0 V se cancelan una a la otra ya que tienden a establecer corrientes en sentidos opuestos. El resultado es que el circuito se comporta como si tuviera sólo una batería de 8.0 V que origina una corriente en el sentido de las manecillas del reloj.

La resistencia equivalente es de 3.0 Ω + 4.0 Ω + 9.0 Ω = 16.0 Ω, y la batería equivalente es de 8.0 V. Por lo tanto,

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{8.0\text{ V}}{16\ \Omega} = 0.50\text{ A}$$

que será la lectura del amperímetro.

Sumando los cambios de voltaje de *a* a *b* alrededor del lado derecho del circuito, da

$$\text{Cambio de voltaje de } a \text{ a } b = -6.0\text{ V} + 8.0\text{ V} - (0.50\text{ A})(9.0\ \Omega) = -2.5\text{ V}$$

Por lo tanto, un voltímetro conectado de *a* a *b* marcará una lectura de 2.5 V, estando *b* al potencial más alto.

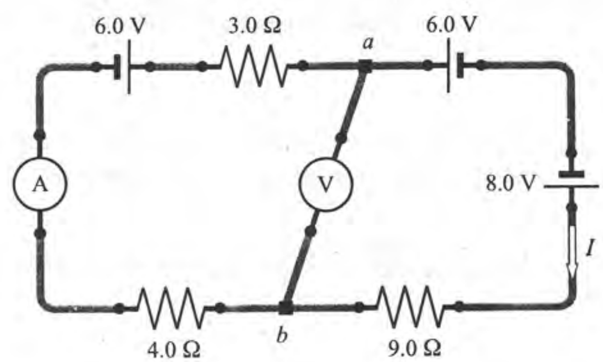


Fig. 28-12

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

28.18 Calcúlese la resistencia equivalente de 4.0 Ω y 8.0 Ω *a*) en serie *b*) en paralelo. *Resp.* *a*) 12 Ω; *b*) 2.7 Ω

28.19 Calcúlese la resistencia equivalente de *a*) 3.0 Ω, 6.0 Ω y 9.0 Ω en paralelo; *b*) 3.0 Ω, 4.0 Ω, 7.0 Ω, 10.0 Ω y 12.0 Ω en paralelo; *c*) tres elementos para calentar de 33 Ω en paralelo; *d*) veinte bombillas de 100 Ω en paralelo. *Resp.* *a*) 1.6 Ω; *b*) 1.1 Ω; *c*) 11 Ω; *d*) 5.0 Ω

28.20 ¿Qué resistencia debe conectarse en paralelo con una de 20 Ω para hacer una resistencia combinada de 15 Ω? *Resp.* 60 Ω

28.21 ¿Cuántos resistores de 160 Ω (en paralelo) se requieren para que se establezcan 5.0 A o en una línea de 100 V? *Resp.* 8

28.22 Tres resistores de 8.0 Ω, 12 Ω y 24 Ω están en paralelo y la combinación drena una corriente de 20 A. Determínese *a*) la diferencia de potencial de la combinación y *b*) la corriente en cada resistor. *Resp.* *a*) 80 V; *b*) 10 A, 6.7 A, 3.3 A

28.23 Al utilizar tres resistores de 3.0 Ω, 5.0 Ω y 6.0 Ω, se puede obtener un total de 18 resistencias equivalentes. ¿Cuáles son éstas? *Resp.* 0.70 Ω, 1.4 Ω, 1.9 Ω, 2.0 Ω, 2.4 Ω, 2.7 Ω, 3.0 Ω, 3.2 Ω, 3.4 Ω, 5.0 Ω, 5.7 Ω, 6.0 Ω, 7.0 Ω, 7.9 Ω, 8.0 Ω, 9.0 Ω, 11 Ω, 14 Ω

28.24 Dos resistores de 4.00 Ω y 12.0 Ω son conectados en paralelo a través de una batería de 22 V que tiene una resistencia interna de 1.00 Ω. Calcúlese *a*) la corriente en la batería, *b*) la corriente en el resistor de 4.00 Ω, *c*) el voltaje en las terminales de la batería, *d*) la corriente en el resistor de 12.0 Ω. *Resp.* *a*) 5.5 A; *b*) 4.1 A; *c*) 17 V; *d*) 1.4 A

28.25 Tres resistores, de 40 Ω, 60 Ω y 120 Ω, se conectan en paralelo, y este grupo paralelo está conectado en serie con 15 Ω, que a su vez se encuentra en serie con 25 Ω. El sistema completo se conecta a una fuente de 120 V. Determínese *a*) la corriente en la de 25 Ω, *b*) la caída de potencial a través del grupo paralelo, *c*) la caída de potencial a través de la de 25 Ω, *d*) la corriente en la de 60 Ω, *e*) la corriente en la de 40 Ω. *Resp.* *a*) 2.0 A; *b*) 40 V; *c*) 50 V; *d*) 0.67 A; *e*) 1.0 A

28.26 ¿Qué resistencia de derivación debe ser conectada en paralelo con un amperímetro que tiene una resistencia de 0.040 Ω para que el 25% de la corriente total pase a través de él? *Resp.* 0.013 Ω

28.27 Un galvanómetro de 36 Ω tiene una resistencia de derivación de 4.0 Ω. ¿Qué parte de la corriente total pasará a través del instrumento? *Resp.* 1/10

28.28 Un relevador cuya resistencia es de 6.0 Ω opera con una corriente mínima de 0.030 A. Se desea que el relevador opere cuando la corriente en la línea alcance 0.240 A. ¿Qué resistencia de derivación deberá utilizarse con el relevador? *Resp.* 0.86 Ω

28.29 Demuéstrese que si dos resistores están conectados en paralelo, su rapidez de generación de calor varía inversamente a sus resistencias.

28.30 Para el circuito que se muestra en la Fig. 28-13, encuéntrese la corriente y la caída de potencial en cada una de las resistencias. *Resp.* Para la de 20 Ω, 3.0 A y 60 V; para la de 75 Ω, 2.4 A y 180 V; para la de 300 Ω, 0.6 A y 180 V

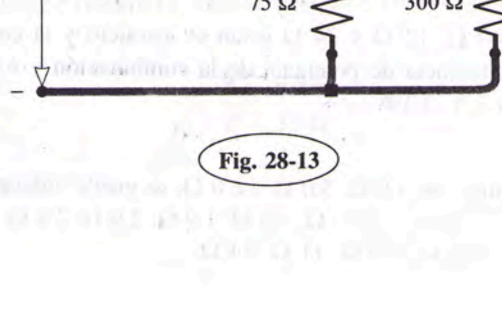


Fig. 28-13

28.31 Para el circuito que se muestra en la Fig. 28-14, encuéntrese *a*) su resistencia equivalente; *b*) la corriente entregada por la fuente de poder; *c*) la diferencia de potencial entre *ab*, *cd* y *de*; *d*) la corriente en cada resistencia. *Resp.* *a*) 15 Ω; *b*) 20 A; *c*) $V_{ab} = 80$ V, $V_{cd} = 120$ V, $V_{de} = 100$ V; *d*) $I_4 = 20$ A, $I_{10} = 12$ A, $I_{15} = 8$ A, $I_9 = 11.1$ A, $I_{18} = 5.6$ A, $I_{30} = 3.3$ A

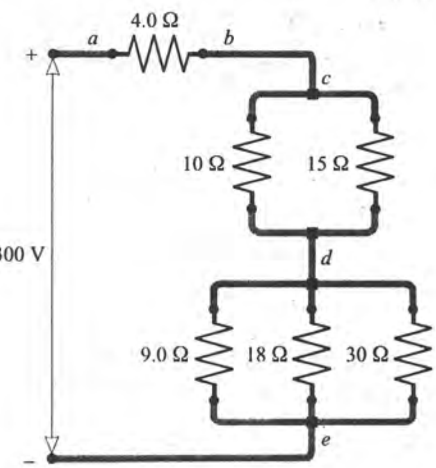


Fig. 28-14

28.32 Se sabe que la diferencia de potencial a través de la resistencia de 6.0 Ω en la Fig. 28-15 es de 48 V. Determínese *a*) la corriente *I* que entra, *b*) la diferencia de potencial en la resistencia de 8.0 Ω, *c*) la diferencia de potencial a través de la resistencia de 10 Ω, *d*) la diferencia de potencial de *a* a *b*. (*Sugerencia:* El alambre conector *c* y *d* puede acortarse hasta una longitud de cero, sin alterar la corriente o el potencial que se ilustra.) *Resp.* *a*) 12 A; *b*) 96 V; *c*) 60 V; *d*) 204 V

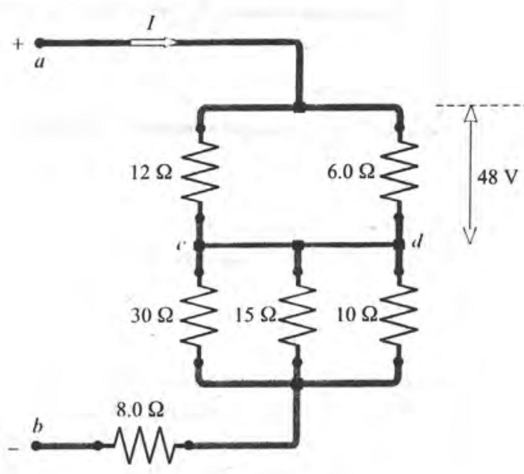


Fig. 28-15

28.33 En el circuito que se ilustra en la Fig. 28-16, la resistencia de 4.0 Ω produce 23.9 cal de calor cada segundo. Supóngase que el amperímetro A y los voltímetros V_1 y V_2 son ideales, ¿cuáles serán sus lecturas? *Resp.* 5.8 A, 8.0 V, 58 V

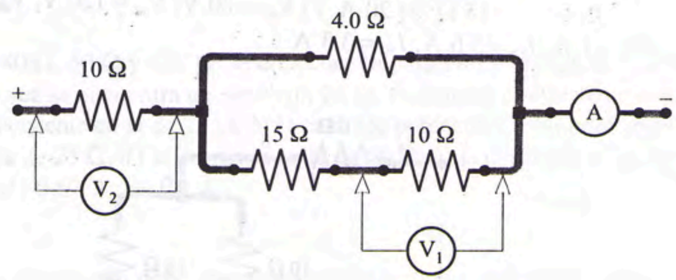


Fig. 28-16

28.34 Para el circuito que se muestra en la Fig. 28-17, encuéntrese *a*) la resistencia equivalente, *b*) la corriente a través de los resistores de 5.0 Ω, 7.0 Ω y 3.0 Ω, *c*) la potencia de la batería. *Resp.* *a*) 10 Ω; *b*) 12 A, 6.0 A, 2.0 A; *c*) 1.3 kW

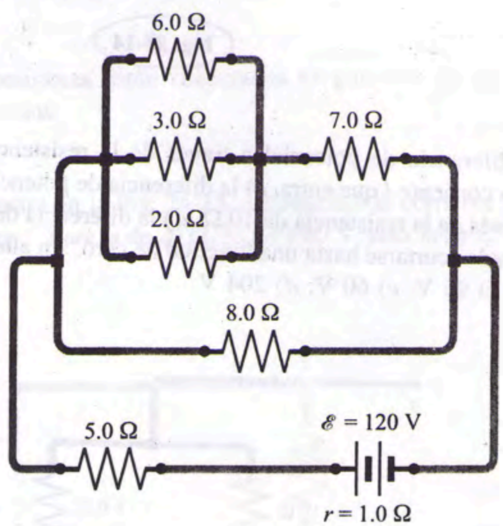


Fig. 28-17

28.35 En el circuito que aparece en la Fig. 28-18, un amperímetro ideal A registra 2.0 A. *a*) Considerando que *XY* es una resistencia, encuéntrese su valor. *b*) Considerando que *XY* es una batería (con resistencia interna de 2.0 Ω) que se está cargando, determínese su fem. *c*) Bajo las condiciones de la parte *b*), ¿cuál es el cambio de potencial desde el punto *Y* hasta el punto *X*? *Resp.* *a*) 5.0 Ω; *b*) 6.0 V; *c*) −10 V

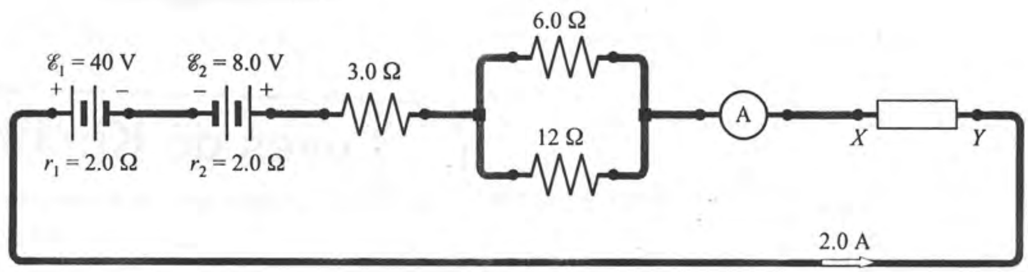


Fig. 28-18

28.36 El *puente de Wheatstone* que se muestra en la Fig. 28-19 se utiliza para medir la resistencia X. En el equilibrio, la corriente a través del galvanómetro G es cero, y las resistencias L, M y N son 3.0 Ω, 2.0 Ω, 10 Ω, respectivamente. Encuéntrese el valor de X. *Resp.* 15 Ω

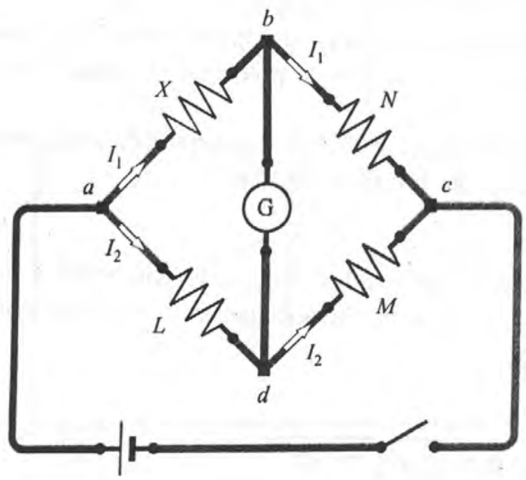


Fig. 28-19

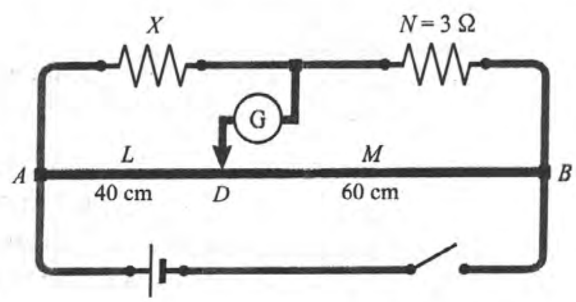


Fig. 28-20

28.37 El puente de Wheatstone de conductor corredizo que se muestra en la Fig. 28-20 está en equilibrio cuando el conductor corredizo uniforme AB se divide como se indica en dicha imagen. Hállese el valor de la resistencia X. *Resp.* 2 Ω

capítulo 29

Leyes de Kirchhoff

REGLA DE NODOS (O NUDOS) DE KIRCHHOFF: La suma de todas las corrientes que llegan a un nodo (es decir, un nodo en donde se sujetan tres o más conductores que llevan corriente) debe ser igual a la suma de todas las corrientes que salen del nodo.

REGLA DE MALLAS (O CIRCUITO CERRADO) DE KIRCHHOFF: Cuando uno recorre un circuito cerrado, la suma algebraica de los cambios de potencial encontrados es cero. En esta suma, una elevación de potencial se toma como positiva y una caída de potencial como negativa.

En una resistencia la corriente siempre fluye del potencial más alto al potencial más bajo. Cuando uno sigue el camino de la corriente a través de una resistencia, el cambio de potencial es negativo ya que hay una caída de potencial.

La terminal positiva de una fuente fem pura siempre es la terminal de potencial más alto, independientemente de la dirección de la corriente que pasa a través de la fuente de fem.

EL CONJUNTO DE ECUACIONES OBTENIDAS al aplicar las Reglas de Kirchhoff a un circuito cerrado serán independientes siempre y cuando en cada circuito cerrado nuevo la ecuación contenga un cambio de voltaje no incluido en la ecuación anterior.

PROBLEMAS RESUELTOS

29.1 Encontrar la corriente en el circuito que se muestra en la Fig. 29-1.

Este circuito no se puede reducir más porque no contiene combinaciones de resistencias en serie simple o en paralelo. Por lo tanto aplicaremos directamente las reglas de Kirchhoff. Si las corrientes no han sido designadas ni marcadas con flechas, debemos hacer esto como primer paso. No es necesario poner un cuidado especial al asignar la dirección de la corriente, ya que los valores numéricos de aquellas que se escogieron incorrectamente simplemente serán negativos.

Si empleamos la regla de los nodos al punto b en la Fig. 29-1:

Corriente que entra en b = corriente que sale de b

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \tag{1}$$

Ahora aplicamos la regla de las mallas al circuito cerrado *adba*. En volts,

$$-7.0\,I_1 + 6.0 + 4.0 = 0 \quad \text{o bien} \quad I_1 = \frac{10.0}{7.0}\,\text{A}$$

(¿Por qué el término $7.0\,I_1$ debe tener signo negativo?) A continuación aplicamos la regla de las mallas al circuito cerrado *abca*. En volts,

$$-4.0 - 8.0 + 5.0\,I_2 = 0 \quad \text{o bien} \quad I_2 = \frac{12.0}{5.0}\,\text{A}$$

(¿Por qué los signos deben ser como se escribieron?)

Ahora regrese a (*1*) para encontrar

$$I_3 = -I_1 - I_2 = -\frac{10.0}{7.0} - \frac{12.0}{5.0} = \frac{-50 - 84}{35} = -3.8\,\text{A}$$

El signo negativo quiere decir que I_3 tiene su sentido opuesto al que aparece en la figura.

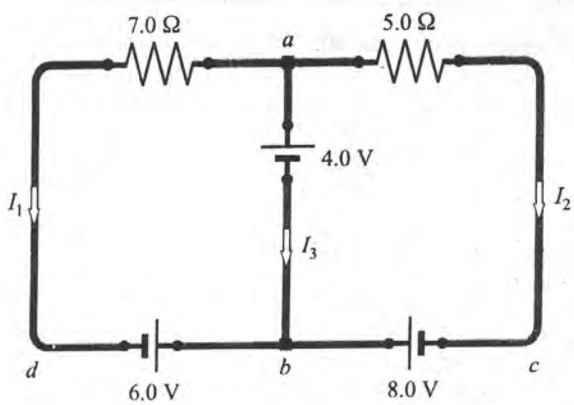


Fig. 29-1

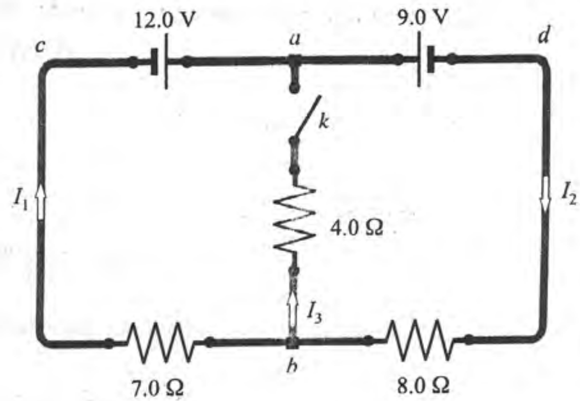


Fig. 29-2

29.2 En la Fig. 29-2, encontrar I_1, I_2 e I_3 si el interruptor k está *a*) abierto y *b*) cerrado.

a) Cuando k está abierto, $I_3 = 0$, ya que no puede fluir corriente a través de un circuito abierto. Aplicando la regla de los nodos al nodo a se obtiene

$$I_1 + I_3 = I_2 \quad \text{o} \quad I_2 = I_1 + 0 = I_1$$

Empleando la regla de las mallas al circuito cerrado *acbda* se obtiene

$$-12.0 + 7.0\,I_1 + 8.0\,I_2 + 9.0 = 0 \tag{1}$$

Para comprender el uso de los signos, recuerde que la corriente siempre fluye a través de una resistencia del potencial más alto al más bajo.

Como $I_2 = I_1$, (*1*) se convierte en

$$15.0\ I_1 = 3.0 \qquad \text{o bien} \qquad I_1 = 0.20\ \text{A}$$

También, $I_2 = I_1 = 0.20$ A. Note que es el mismo resultado que se obtendría al reemplazar las dos baterías por una sola batería de 3.0 V.

b) Con *k* cerrado, I_3 ya no tiene un valor de cero. Aplicando la regla de los nodos al nodo *a* se obtiene

$$I_1 + I_3 = I_2 \tag{2}$$

Aplicando la regla de las mallas al circuito cerrado *acba* se da

$$-12.0 + 7.0\ I_1 - 4.0\ I_3 = 0 \tag{3}$$

y al circuito cerrado *adba* da

$$-9.0 - 8.0\ I_2 - 4.0\ I_3 = 0 \tag{4}$$

Si aplicáramos la regla de los circuitos cerrados a la malla restante, *acbda*, daría una ecuación redundante, ya que contendría un cambio de voltaje que aparece en las ecuaciones anteriores.

Ahora debemos resolver (*2*), (*3*) y (*4*) para I_1, I_2 e I_3. De (*4*),

$$I_3 = -2.0\ I_2 - 2.25$$

Sustituyendo en (*3*) obtenemos

$$-12.0 + 7.0\ I_1 + 9.0 + 8.0\ I_2 = 0 \qquad \text{o bien} \qquad 7.0\ I_1 + 8.0\ I_2 = 3.0$$

Supliendo I_3 en (*2*) también obtenemos

$$I_1 - 2.0\ I_2 - 2.25 = I_2 \qquad \text{o bien} \qquad I_1 = 3.0\ I_2 + 2.25$$

Sustituyendo este valor en la ecuación previa, finalmente se obtiene

$$21.0\ I_2 + 15.75 + 8.0\ I_2 = 3.0 \qquad \text{o bien} \qquad I_2 = -0.44\ \text{A}$$

Utilizando este resultado en la ecuación para I_1 da

$$I_1 = 3.0(-0.44) + 2.25 = -1.32 + 2.25 = 0.93\ \text{A}$$

Note que el signo negativo es parte del valor calculado para I_2, el cual debe llevarse en todas las operaciones con su valor numérico. Ahora podemos emplear (*2*) para encontrar

$$I_3 = I_2 - I_1 = (-0.44) - 0.93 = -1.37\ \text{A}$$

29.3 Cada una de las celdas que aparecen en la Fig. 29-3 tiene una fem de 1.50 V y una resistencia interna de 0.075 0 Ω. Encontrar I_1, I_2 e I_3.

Aplicando la regla de los nodos al nodo *a* obtenemos

$$I_1 = I_2 + I_3 \qquad (1)$$

Aplicando la regla de las mallas en el circuito cerrado *abcea* obtenemos en volts,

$$-(0.075\ 0)I_2 + 1.50 - (0.075\ 0)I_2 + 1.50 - 3.00\ I_1 = 0$$

o bien

$$3.00\ I_1 + 0.150\ I_2 = 3.00 \qquad (2)$$

También, para el circuito cerrado *adcea*,

$$-(0.075\ 0)I_3 + 1.50 - (0.075\ 0)I_3 + 1.50 - 3.00\ I_2 = 0$$

o bien

$$3.00\ I_1 + 0.150\ I_3 = 3.00 \qquad (3)$$

Si resolvemos (2) para 3.00 I_1 sustituimos en (3) obtenemos

$$3.00 - 0.150\ I_3 + 0.150\ I_2 = 3.00 \qquad \text{o bien} \qquad I_2 = I_3$$

como se pudo haber sugerido por la simetría del problema. Entonces de (1) se obtiene

$$I_1 = 2I_2$$

y sustituyendo este resultado en (2) se determina que

$$6.00\ I_2 + 0.150\ I_2 = 3.00 \qquad \text{o bien} \qquad I_2 = 0.488\ \text{A}$$

Entonces, $I_3 = I_2 = 0.488$ A e $I_1 = 2I_2 = 0.976$ A.

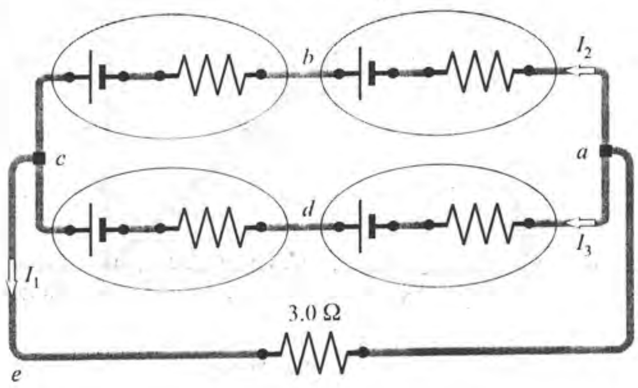


Fig. 29-3

29.4 En el circuito de la Fig. 29-4 las corrientes son estacionarias. Encontrar I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 y la carga en el capacitor.

Cuando el capacitor está cargado no fluye corriente a través de él, y por tanto $I_5 = 0$. Considere el circuito cerrado *acba*. La regla de las mallas da como resultado

$$-8.0 + 4.0\,I_2 = 0 \qquad \text{o bien} \qquad I_2 = 2.0\text{ A}$$

Utilizando la malla *adeca* da

$$-3.0\,I_1 - 9.0 + 8.0 = 0 \qquad \text{o bien} \qquad I_1 = -0.33\text{ A}$$

Aplicando la regla de los nodos al nodo c resulta en

$$I_1 + I_5 + I_2 = I_3 \qquad \text{o bien} \qquad I_3 = 1.67\text{ A} = 1.7\text{ A}$$

y en el nodo a, en

$$I_3 = I_4 + I_2 \qquad \text{o bien} \qquad I_4 = -0.33\text{ A}$$

(Debió suponerse desde un principio, ya que $I_5 = 0$ y por lo mismo $I_4 = I_1$.)

Para calcular la carga en el capacitor se necesita el voltaje V_{fg} a través de él. Aplicando la regla de los circuitos cerrados a la malla *dfgced* se obtiene

$$-2.0\,I_5 + V_{fg} - 7.0 + 9.0 + 3.0\,I_1 = 0 \qquad \text{o bien} \qquad 0 + V_{fg} - 7.0 + 9.0 - 1.0 = 0$$

de donde $V_{fg} = -1.0$ V. El signo menos indica que la placa g es negativa. La carga del capacitor es

$$Q = CV = (5.0\,\mu\text{F})(1.0\text{ V}) = 5.0\,\mu\text{C}$$

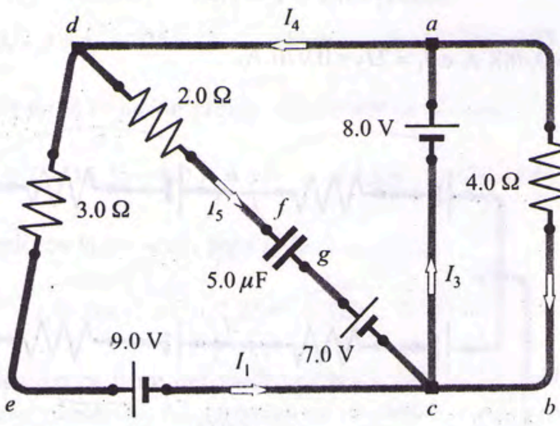


Fig. 29-4

29.5 Para el circuito que aparece en la Fig. 29-5, la resistencia R tiene un valor de 5.0 Ω y $\mathscr{E} = 20$ V. Encontrar las lecturas en el amperímetro y en el voltímetro. Suponga que los medidores son ideales.

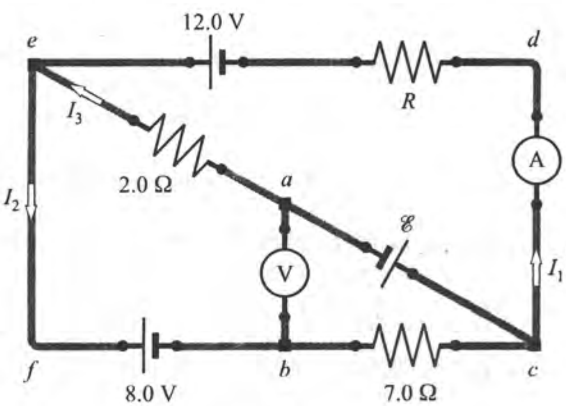


Fig. 29-5

El voltímetro ideal tiene una resistencia infinita y por lo mismo se puede retirar del circuito sin causar efectos. Escribamos la ecuación de un circuito cerrado para la malla *cdefc*:

$$-RI_1 + 12.0 - 8.0 - 7.0\, I_2 = 0$$

que se convierte en

$$5.0\, I_1 + 7.0\, I_2 = 4.0 \tag{1}$$

Ahora escribamos la ecuación del circuito cerrado para la malla *cdeac*. Ésta es

$$-5.0\, I_1 + 12.0 + 2.0\, I_3 + 20.0 = 0$$

o bien

$$5.0\, I_1 - 2.0\, I_3 = 32.0 \tag{2}$$

Pero la regla de los nodos aplicada a *e* da

$$I_1 + I_3 = I_2 \tag{3}$$

Sustituyendo (*3*) en (*1*) da

$$5.0\, I_1 + 7.0\, I_1 + 7.0\, I_3 = 4.0$$

Se resuelve esta ecuación para I_3 y se sustituye en (*2*) para obtener

$$5.0\, I_1 - 2.0\left(\frac{4.0 - 12.0\, I_1}{7.0}\right) = 32.0$$

que da $I_1 = 3.9$ A, que es la lectura del amperímetro. Entonces (*1*) se tiene $I_2 = -2.2$ A.

Para calcular la lectura del voltímetro V_{ab}, escribimos la ecuación del circuito cerrado para la malla *abca*:

$$V_{ab} - 7.0\, I_2 - \mathscr{E} = 0$$

Sustituyendo los valores conocidos de I_2 y $\mathscr{E}$ y resolviendo, obtenemos $V_{ab} = 4.3$ V. Como éste es el cambio de potencial entre *a* y *b*, el punto *b* debe estar al potencial más alto.

29.6 En el circuito de la Fig. 29-5, $I_1 = 0.20$ A y $R = 5.0\ \Omega$. Encontrar $\mathscr{E}$.

Escribiendo la ecuación de las mallas para el circuito cerrado *cdefc*:

$$-RI_1 + 12.0 - 8.0 - 7.0\, I_2 = 0 \qquad \text{o bien} \qquad -(5.0)(0.20) + 12.0 - 8.0 - 7.0\, I_2 = 0$$

de donde $I_2 = 0.43$ A. Podemos hallar I_3 aplicando la regla de los nodos al punto *e*:

$$I_1 + I_3 = I_2 \qquad \text{o bien} \qquad I_3 = I_2 - I_1 = 0.23 \text{ A}$$

Ahora aplicamos la regla de la malla al circuito cerrado *cdeac*:

$$-(5.0)(0.20) + 12.0 + (2.0)(0.23) + \mathscr{E} = 0$$

de donde $\mathscr{E} = -11.5$ V. El signo negativo indica que la polaridad de la batería es el inverso de la que se muestra.

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

29.7 Para el circuito que aparece en la Fig. 29-6, encontrar la corriente en la resistencia de 0.96 Ω y los voltajes en las terminales de las baterías. *Resp.* 5.0 A, 4.8 V, 4.8 V

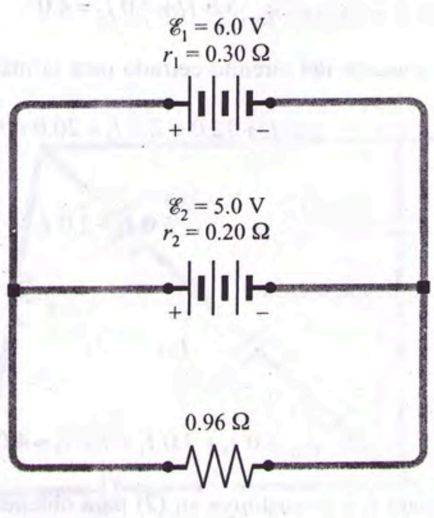


Fig. 29-6

29.8 Para la red que se muestra en la Fig. 29-7, determinar *a*) las tres corrientes I_1, I_2 e I_3, y *b*) el voltaje en las terminales de las tres baterías. *Resp.* *a*) $I_1 = 2$ A, $I_2 = 1$ A, $I_3 = -3$ A; *b*) $V_{16} = 14$ V, $V_4 = 3.8$ V, $V_{10} = 8.5$ V

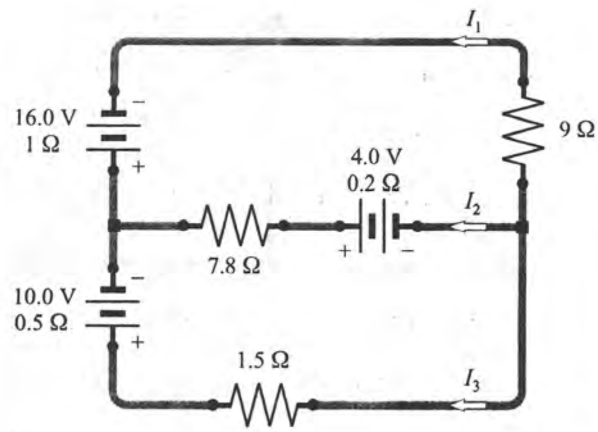


Fig. 29-7

29.9 Refiérase a la Fig. 29-5. Si la lectura del voltímetro es de 16.0 V (con el nodo *b* al potencial más alto) e $I_2 = 0.20$ A, encontrar $\mathscr{E}$, R y la lectura del amperímetro. *Resp.* 14.6 V, 0.21 Ω, 12 A

29.10 Hallar I_1, I_2, I_3 y la diferencia de potencial entre los puntos *e* y *b* en la Fig. 29-8. *Resp.* 2.0 A, −8.0 A, 6.0 A, −13.0 V

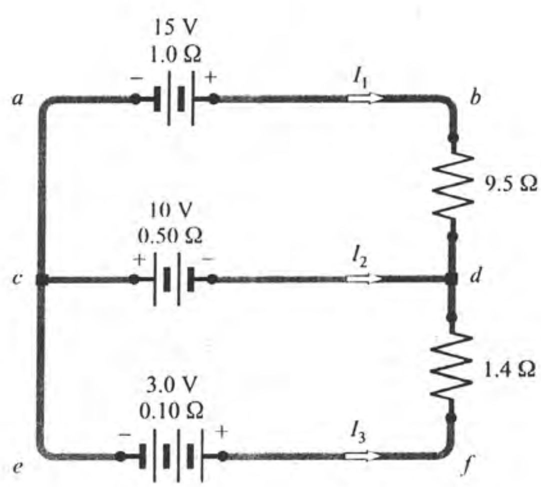


Fig. 29-8

29.11 En la Fig. 29-9, $R = 10.0\ \Omega$ y $\mathscr{E} = 13$ V. Encontrar las lecturas en el amperímetro y el voltímetro. *Resp.* 8.4 A, 27 V con el punto *a* como positivo

29.12 En la Fig. 29-9, la lectura del voltímetro es de 14 V (con el punto *a* en el potencial más alto) y la lectura del amperímetro es de 4.5 A. Encontrar $\mathscr{E}$ y R. *Resp.* $\mathscr{E} = 0$, $R = 3.2\ \Omega$

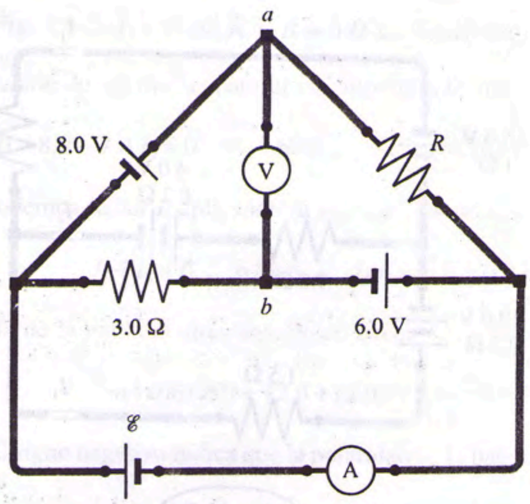


Fig. 29-9

capítulo 30

Fuerzas en campos magnéticos

UN CAMPO MAGNÉTICO ($\vec{B}$) existe en una región del espacio si una carga que se mueve ahí experimenta una fuerza (diferente a la fricción) debida a su movimiento (como se muestra en la Fig. 30-1). Es frecuente detectar la presencia de un campo magnético por el efecto que produce sobre la aguja de una brújula (que es un pequeño *imán*). La aguja en este caso se alinea en la dirección del campo magnético.

LAS LÍNEAS DE CAMPO MAGNÉTICO trazadas en una región del espacio se muestran siempre por la dirección hacia la cual apunta una brújula colocada en esa región. Un método para determinar las líneas de campo cercanas a una barra magnética (imán de barra) se muestra en la Fig. 30-2.

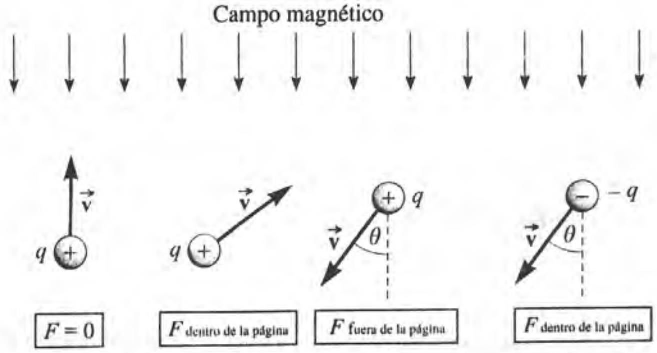


Fig. 30-1

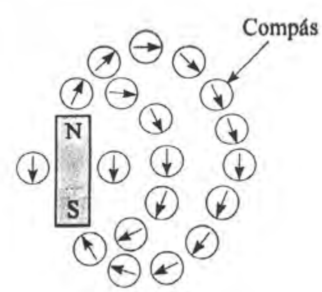


Fig. 30-2

UN IMÁN tiene un *polo norte* y un *polo sur*. Ya que la brújula siempre indica desde el polo norte (N en la Fig. 30-2) hacia el polo sur (S), las líneas de campo magnético salen del polo norte y entran al polo sur.

LOS POLOS MAGNÉTICOS del mismo tipo (norte o sur) se repelen uno al otro, mientras que cuando son distintos se atraen entre sí.

UNA CARGA QUE SE MUEVE A TRAVÉS DE UN CAMPO MAGNÉTICO experimenta una fuerza, debida al campo, siempre que su vector velocidad no esté a lo largo de una línea de fuerza. En la Fig. 30-1, las cargas (q) están moviéndose con velocidad $\vec{v}$ en un campo magnético dirigido. Véase el dibujo. La dirección de la fuerza $\vec{F}$ sobre cada carga es la indicada. Nótese que la dirección de la fuerza sobre la carga negativa es opuesta a la que actúa sobre la carga positiva con la misma velocidad.

LA DIRECCIÓN DE UNA FUERZA sobre una carga $+q$ en movimiento en un campo magnético puede determinarse por la *regla de la mano derecha* (Fig. 30-3):

> Manténgase la mano extendida. Apúntense los dedos en la dirección y sentido del campo. Oriéntese el dedo pulgar a lo largo de la dirección y sentido de la velocidad de la carga positiva. Entonces, la palma de la mano empuja en la dirección de la fuerza que actúa sobre la carga. El sentido de la fuerza que actúa sobre una carga negativa es opuesto al que actúa sobre una carga positiva (pero en la misma dirección).

Con frecuencia es útil señalar que las líneas del campo magnético a través de la partícula y el vector velocidad de la partícula forman un plano (el plano de la página en la Fig. 30-3). El vector fuerza es siempre perpendicular a este plano.

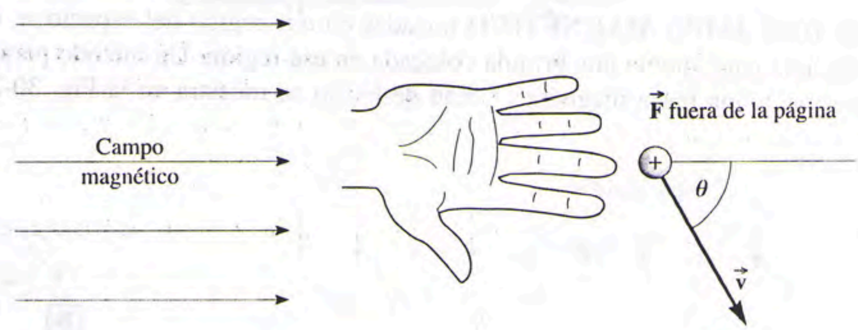


Fig. 30-3

LA MAGNITUD DE UNA FUERZA (F) sobre una carga que se mueve en un campo magnético depende del producto de cuatro factores:

1) q, la magnitud de la carga (en C)

2) v, la magnitud de la velocidad de la carga (en m/s)

3) B, la intensidad del campo magnético,

4) sen θ, donde θ es el ángulo entre las líneas de campo y la velocidad $\vec{v}$.

EL CAMPO MAGNÉTICO EN UN PUNTO dado se representa por un vector $\vec{\mathbf{B}}$. Su dirección es la del campo magnético. Los nombres dados a $\vec{\mathbf{B}}$ son: la *inducción magnética*, la *densidad de flujo magnético* y, coloquialmente, la *intensidad de campo magnético*.

Se definen la magnitud de $\vec{\mathbf{B}}$ y sus unidades al convertir la proporcionalidad $F \propto qvB$ sen θ en una igualdad. Así pues,

$$F_M = qvB \text{ sen } \theta$$

donde F_M está dada en newtons, q en coulombs, v en m/s y B en una unidad llamada *tesla* (T), la cual también es conocida como *weber por metro cuadrado*: 1 T = 1 Wb/m^2 (véase el capítulo 32). De la misma manera, se encuentra que en el sistema cgs la unidad para B es el *gauss* (G), donde

$$1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$$

El campo magnético de la Tierra tiene una B algo menor que 1 G. Nótese también que

$$1\,\text{T} = 1\,\text{Wb/m}^2 = 1\frac{\text{N}}{\text{C}\cdot(\text{m/s})} = 1\frac{\text{N}}{\text{A}\cdot\text{m}}$$

FUERZA SOBRE UNA CORRIENTE EN UN CAMPO MAGNÉTICO: Dado que una corriente es simplemente un flujo de cargas positivas, ésta experimenta una fuerza debida a un campo magnético. La dirección de la fuerza se encuentra por medio de la regla de la mano derecha que se muestra en la Fig. 30-3, usando la dirección de la corriente en lugar de la del vector velocidad.

La magnitud de la fuerza ΔF_M, que actúa sobre una pequeña longitud de alambre ΔL, lleva una corriente I que está dada por

$$\Delta F_M = I(\Delta L)B \text{ sen } \theta$$

donde θ es el ángulo entre la dirección de la corriente I y la del campo. Para un alambre recto de longitud L en un campo magnético uniforme, ésta se vuelve

$$F_M = ILB \text{ sen } \theta$$

Nótese que la fuerza es cero si el alambre es paralelo a las líneas de campo. La fuerza es máxima si las líneas de campo son perpendiculares al alambre. Análogamente al caso de la carga que se mueve en un campo magnético, la fuerza es perpendicular al plano formado por el alambre y las líneas de campo.

TORCA (MOMENTO DE TORSIÓN) SOBRE UNA BOBINA PLANA en un campo magnético uniforme: la torca τ que actúa sobre una bobina de N espiras, la cual lleva una corriente I en un campo magnético externo B es

$$\tau = NIAB \text{ sen } \theta$$

donde A es el área de la bobina, y θ es el ángulo entre las líneas de campo y una perpendicular al plano de la bobina. Para la dirección de rotación de la bobina, se tiene la siguiente regla de la mano derecha:

> Oriéntese el dedo pulgar derecho perpendicularmente al plano de la bobina, de tal manera que los dedos vayan en la dirección del flujo de la corriente. Entonces, la torca actúa para hacer girar el dedo pulgar y alinearlo con el campo magnético externo (en tal orientación la torca es cero).

PROBLEMAS RESUELTOS

30.1 Sea un campo magnético uniforme en la dirección $+x$, tal que, $B = 3.0$ G. Un protón ($q = +e$) se dispara a través del campo en dirección $+y$ con una rapidez de 5.0×10^6 m/s. *a*) Encuéntrese la magnitud y la dirección de la fuerza sobre el protón. *b*) Repítase reemplazando el protón por un electrón.

a) La situación se muestra en la Fig. 30-4. Se tiene, después de cambiar 3.0 G a 3.0×10^{-4} T,

$$F_M = qvB \text{ sen } \theta = (1.6 \times 10^{-19}\text{ C})(5.0 \times 10^6\text{ m/s})(3.0 \times 10^{-4}\text{ T}) \text{ sen } 90° = 2.4 \times 10^{-16}\text{ N}$$

La fuerza es perpendicular al plano xy, que es el plano definido por las líneas de campo y la velocidad $\vec{v}$. La regla de la mano derecha indica que está dirigida hacia adentro de la página, en la dirección $-z$.

b) La magnitud de la fuerza es la misma que en el inciso *a*), 2.4×10^{-16} N. Pero, como el electrón es negativo, la dirección de la fuerza se invierte. La fuerza está en la dirección de $+z$.

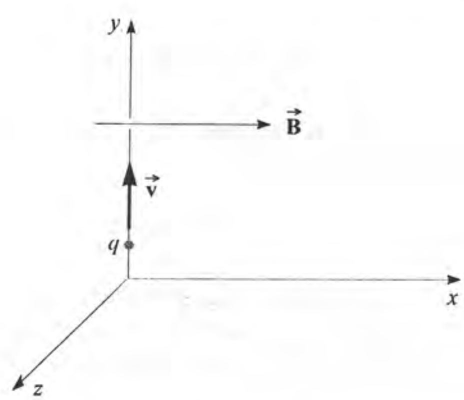


Fig. 30-4

30.2 La carga que se muestra en la Fig. 30-5 es un protón ($q = +e$, $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) con rapidez de 5.0×10^6 m/s. Se hace pasar por un campo magnético uniforme dirigido hacia afuera de la página; B es de 30 G. Descríbase la trayectoria que sigue el protón.

En virtud de que la velocidad del protón es perpendicular a $\vec{\mathbf{B}}$, la fuerza que actúa sobre el protón es

$$q\upsilon B \text{ sen } 90° = q\upsilon B$$

Esta fuerza es perpendicular a $\vec{\mathbf{v}}$ por lo que no efectúa trabajo sobre el protón. Simplemente desvía al protón y lo obliga a seguir la trayectoria circular que se muestra, como puede verificarse utilizando la regla de la mano derecha. La fuerza $q\upsilon B$ está dirigida radialmente hacia adentro, suministra la fuerza centrípeta para el movimiento circular: $F_M = q\upsilon B = ma = m\upsilon^2/r$ y

$$r = \frac{m\upsilon}{qB} \tag{1}$$

Para los datos dados,

$$r = \frac{(1.67 \times 10^{-27}\text{ kg})(5.0 \times 10^6\text{ m/s})}{(1.6 \times 10^{-19}\text{ C})(30 \times 10^{-4}\text{ T})} = 17\text{ m}$$

Obsérvese en la ecuación (*1*) que la cantidad de movimiento de la partícula cargada es proporcional al radio de la órbita circular.

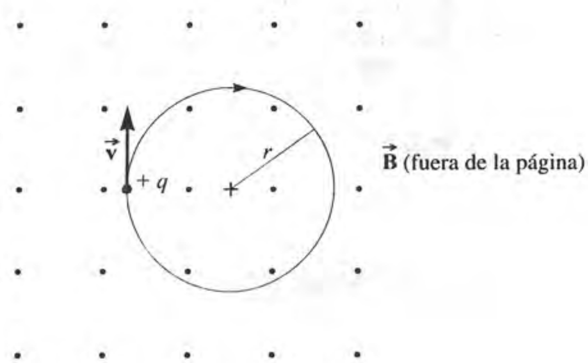


Fig. 30-5

30.3 Un protón entra en un campo magnético de densidad de flujo 1.5 Wb/m² con una velocidad de 2.0×10^7 m/s formando un ángulo de 30° con las líneas de campo. Calcúlese la fuerza que actúa sobre el protón.

$$F_M = q\upsilon B \text{ sen } \theta = (1.6 \times 10^{-19}\text{ C})(2.0 \times 10^7\text{ m/s})(1.5\text{ Wb/m}^2) \text{ sen } 30° = 2.4 \times 10^{-12}\text{ N}$$

30.4 Un haz de rayos catódicos (un electrón del haz; $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg, $q = -e$) se deflecta en un círculo de radio de 2.0 cm por medio de un campo uniforme con $B = 4.5 \times 10^{-3}$ T. ¿Cuál es la rapidez de los electrones?

Para describir un círculo como éste, la partícula debe moverse perpendicularmente a $\vec{\mathbf{B}}$. De la ecuación (*1*) del problema 30.2,

$$v = \frac{rqB}{m} = \frac{(0.020\ \text{m})(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})(4.5 \times 10^{-3}\ \text{T})}{9.1 \times 10^{-31}\ \text{kg}} = 1.58 \times 10^7\ \text{m/s} = 1.6 \times 10^4\ \text{km/s}$$

30.5 Como se muestra en la Fig. 30-6, una partícula de carga q entra en una región del espacio donde existe un campo eléctrico uniforme dirigido hacia abajo. El valor de E es de 80 kV/m. Perpendicular a $\vec{\mathbf{E}}$ y dirigido hacia adentro de la página, se halla un campo magnético $B = 0.4$ T. Si la rapidez de la partícula se escoge aproximadamente, ésta no sufrirá ninguna deflexión a causa de los campos perpendiculares. ¿Qué rapidez debe ser seleccionada en este caso? (Este dispositivo se llama selector de velocidades.)

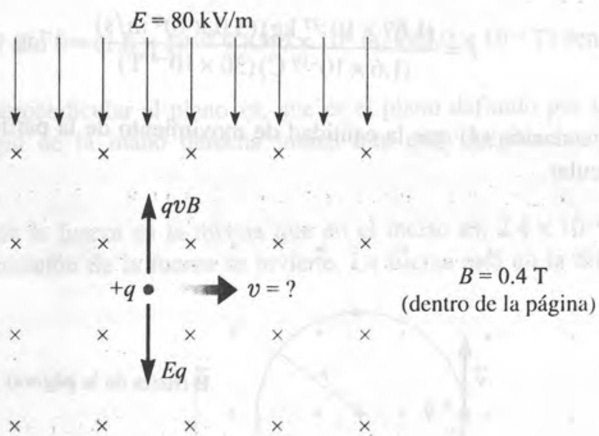


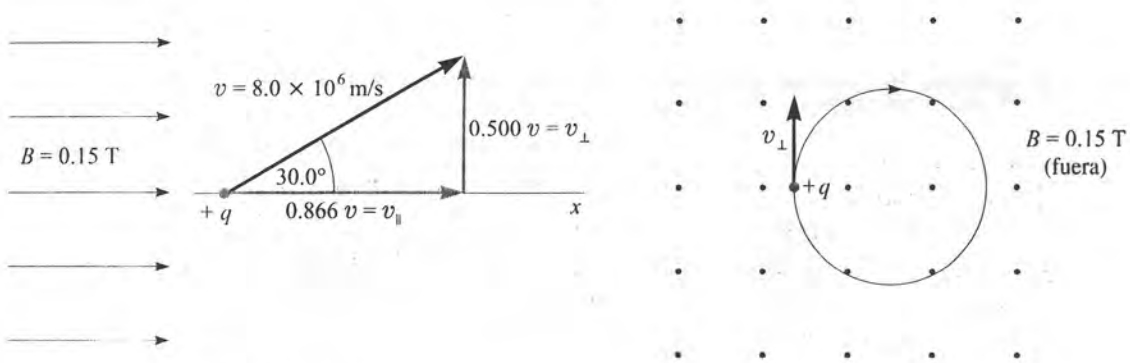
Fig. 30-6

El campo eléctrico origina una fuerza hacia abajo sobre la carga dada por Eq, si ésta es positiva. La regla de la mano derecha nos dice que la fuerza magnética, qvB sen 90°, es hacia arriba si q es positiva. Si ambas fuerzas se balancean, la partícula no se deflectará, entonces

$$Eq = qvB \text{ sen } 90° \quad \text{o} \quad v = \frac{E}{B} = \frac{80 \times 10^3\ \text{V/m}}{0.4\ \text{T}} = 2 \times 10^5\ \text{m/s}$$

Cuando q es negativa, las dos fuerzas son opuestas, así que el resultado de $v = E/B$ aún se cumple.

30.6 En la Fig. 30-7*a*, un protón ($q = +e$, $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) es disparado con una rapidez de 8.0×10^6 m/s formando un ángulo de 30.0° hacia un campo dirigido en la dirección x, con $B = 0.15$ T. Descríbase la trayectoria que sigue el protón.



a) Vista lateral

b) Vista final

Fig. 30-7

La velocidad de la partícula se descompone en dos, una componente paralela al campo magnético y otra perpendicular. La fuerza magnética en la dirección de $v_\parallel$ es cero (sen $\theta = 0$); la fuerza magnética en la dirección de $v_\perp$ no tiene componente en x. Por lo tanto, el movimiento en la dirección x es uniforme, a una rapidez de

$$v_\parallel = (0.866)(8.0 \times 10^6 \text{ m/s}) = 6.93 \times 10^6 \text{ m/s}$$

mientras que el movimiento transversal es circular (véase el problema 30.2), con radio

$$r = \frac{mv_\perp}{qB} = \frac{(1.67 \times 10^{-27}\text{ kg})(0.500 \times 8.0 \times 10^6\text{ m/s})}{(1.6 \times 10^{-19}\text{ C})(0.15\text{ T})} = 0.28\text{ m}$$

El protón describirá una espiral a lo largo del eje x; el radio de la espiral (o hélice) será de 28 cm.

Para determinar el *paso* de la hélice (distancia recorrida en x durante una revolución), nótese que el tiempo que toma en hacer un círculo completo es

$$\text{Periodo} = \frac{2\pi r}{v_\perp} = \frac{2\pi(0.28\text{ m})}{(0.500)(8.0 \times 10^6\text{ m/s})} = 4.4 \times 10^{-7}\text{ s}$$

Durante este tiempo, el protón viajará una distancia en x de

$$\text{Paso} = (v_\parallel)(\text{periodo}) = (6.93 \times 10^6\text{ m/s})(4.4 \times 10^{-7}\text{ s}) = 3.0\text{ m}$$

30.7 Las partículas alfa ($m_\alpha = 6.68 \times 10^{-27}$ kg, $q = +2e$) son aceleradas desde el reposo a través de una c.p. de 1.0 kV. Después entran en un campo magnético $B = 0.20$ T perpendicular a su dirección de movimiento. Calcúlese el radio de su trayectoria.

Su EC final es igual a la energía potencial eléctrica que pierden durante la aceleración, Vq:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = Vq \quad \text{o} \quad v = \sqrt{\frac{2Vq}{m}}$$

Del problema 30.2, se sabe que seguirán una trayectoria circular en la cual

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2Vq}{m}} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2Vm}{q}}$$

$$= \frac{1}{0.20\,\text{T}}\sqrt{\frac{2\,(1000\,\text{V})(6.68\times10^{-27}\,\text{kg})}{3.2\times10^{-19}\,\text{C}}} = 0.032\,\text{m}$$

30.8 En la Fig. 30-8, el campo magnético está hacia afuera de la página y $B = 0.80$ T. El alambre que se muestra lleva una corriente de 30 A. Encuéntrese la fuerza que actúa sobre 5.0 cm de longitud del alambre.

Se sabe que

$$\Delta F_M = I(\Delta L)B \text{ sen } \theta = (30\text{ A})(0.050\text{ m})(0.80\text{ T})(1) = 1.2\text{ N}$$

Por la regla de la mano derecha, la fuerza es perpendicular al alambre y al campo, y está dirigida hacia el pie de la página.

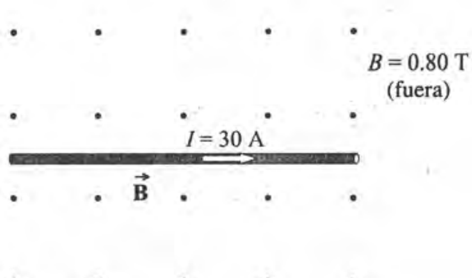


Fig. 30-8

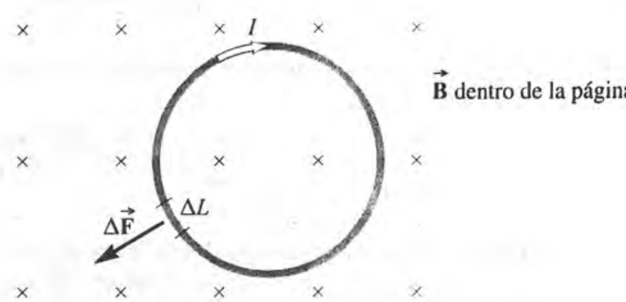


Fig. 30-9

30.9 Como se muestra en la Fig. 30-9, una bobina de alambre lleva una corriente de I y su plano es perpendicular a un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}$. ¿Cuál es la fuerza resultante y la torca sobre la bobina?

Considérese la longitud ΔL que se muestra en la figura. La fuerza $\Delta \vec{\mathbf{F}}$ sobre ésta tiene la dirección indicada. Un punto diametralmente opuesto a ΔL sobre la bobina cuenta con una fuerza igual pero opuesta, actuando sobre él. Por lo tanto, las fuerzas sobre la bobina se cancelan entre sí y la fuerza resultante sobre ella es cero.

En la figura se observa que las $\Delta \vec{\mathbf{F}}$ que actúan sobre la bobina están tratando de expandirla y no de hacerla girar. Por consiguiente, la torca sobre la bobina es cero. O bien, si se hace uso de la ecuación de la torca,

$$\tau = NIAB \text{ sen } \theta$$

donde θ es el ángulo entre las líneas de campo y la normal al plano de la bobina. Se ve que $\theta = 0$. Por lo tanto, sen $\theta = 0$ y la torca es cero.

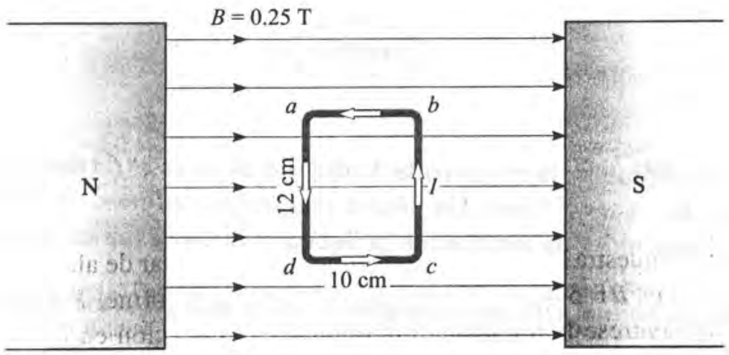


Fig. 30-10

30.10 Por la bobina de 40 vueltas que se ilustra en la Fig. 30-10 circula una corriente de 2.0 A en un campo magnético $B = 0.25$ T. Determínese la torca sobre ella. ¿Cómo girará?

Método 1

$$\tau = NIAB \text{ sen } \theta = (40)(2.0 \text{ A})(0.10 \text{ m} \times 0.12 \text{ m})(0.25 \text{ T})(\text{sen } 90^\circ) = 0.24 \text{ N} \cdot \text{m}$$

(Recuérdese que θ es el ángulo entre las líneas de campo y la normal a la bobina.) Por medio de la regla de la mano derecha, la bobina rotará alrededor de un eje vertical de tal manera que el lado *ad* se moverá hacia afuera de la página.

Método 2

Dado que los lados *dc* y *ab* están alineados con el campo, la fuerza sobre cada uno de ellos es cero, mientras que la fuerza sobre cada alambre vertical es

$$F_M = ILB = (2.0 \text{ A})(0.12 \text{ m})(0.25 \text{ T}) = 0.060 \text{ N}$$

hacia afuera de la página para el lado *ab* y hacia adentro de la página en el lado *bc*. Si se toma la torca considerando el lado *bc* como eje, sólo la fuerza del lado *ad* tiene una torca diferente de cero. Esto es

$$\tau = (40 \times 0.060 \text{ N})(0.10 \text{ m}) = 0.24 \text{ N} \cdot \text{m}$$

y tiende a hacer girar el lado *ad* hacia afuera de la página.

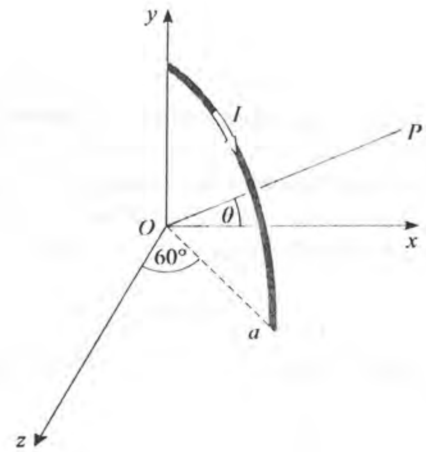


Fig. 30-11

30.11 En la Fig. 30-11 se muestra la cuarta parte de una bobina circular de alambre que lleva una corriente de 14 A. Su radio es $a = 5.0$ cm. Un campo magnético uniforme, $B = 300$ G está dirigido en la dirección $+x$. Encuéntrese la torca sobre la bobina y la dirección en la cual girará.

La normal a la bobina, $\overline{OP}$, hace un ángulo $\theta = 60°$ con la dirección de $+x$, es decir, la dirección del campo. Así pues,

$$\tau = NIAB \operatorname{sen} \theta = (1)(14\ \text{A})(\pi + 25 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)(0.030\ 0\ \text{T}) \operatorname{sen} 60° = 2.9 \times 10^{-3}\ \text{N} \cdot \text{m}$$

Por la regla de la mano derecha se demuestra que la bobina rotará alrededor del eje y, de tal manera que el ángulo 60° tenderá a disminuir.

30.12 Dos electrones, ambos con rapidez de 5.0×10^6 m/s, son disparados dentro de un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}$. El primero se dispara desde el origen a lo largo de eje $+x$, y se mueve en un círculo que intercepta el eje $+z$ en $z = 16$ cm. El segundo es disparado a lo largo del eje $+y$ y se mueve en línea recta. Determínese la magnitud y dirección de $\vec{\mathbf{B}}$.

La situación se muestra en la Fig. 30-12. Ya que una carga no experimenta fuerza cuando se mueve a lo largo de una línea de campo, el campo debe estar en la dirección de $+y$ o $-y$. Utilizando la regla de la mano derecha para el movimiento que se indica en el diagrama y para la carga negativa del electrón, se puede concluir que el campo magnético está dirigido en la dirección $-y$.

Para determinar la magnitud de $\vec{\mathbf{B}}$ se nota que $r = 8$ cm. Igualando la fuerza centrípeta mv^2/r a la fuerza magnética Bqv se obtiene

$$B = \frac{mv}{qr} = \frac{(9.1 \times 10^{-31}\ \text{kg})(5.0 \times 10^6\ \text{m/s})}{(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})(0.080\ \text{m})} = 3.6 \times 10^{-4}\ \text{T}$$

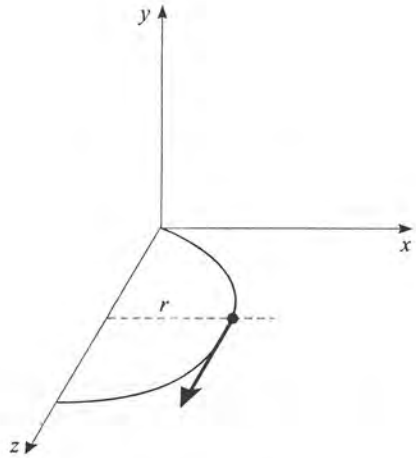


Fig. 30-12

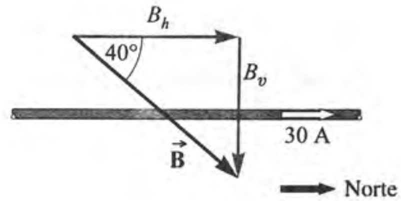


Fig. 30-13

30.13 En un cierto lugar de la Tierra, el campo magnético es de 5.0×10^{-5} T, dirigido 40° por debajo de la horizontal. Determínese la fuerza por metro de longitud sobre un alambre horizontal en el cual circula una corriente de 30 A hacia el Norte.

Generalmente, el campo magnético de la Tierra está dirigido al Norte. (Ésta es la dirección en la cual apuntaría una brújula.) Por lo tanto, la situación se muestra en la Fig. 30-13. La fuerza sobre el alambre es

$$F_M = (30\text{ A})(L)(5.0 \times 10^{-5}\text{ T})\,\text{sen}\,40^\circ \quad \text{así que} \quad \frac{F_M}{L} = 9.6 \times 10^{-4}\text{ N}$$

La regla de la mano derecha indica que la fuerza está hacia adentro de la página, es decir al oeste.

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

30.14 Un ion ($q = +2e$) entra en un campo magnético de 1.2 Wb/m^2 a una velocidad de 2.5×10^5 m/s perpendicularmente al campo. Determínese la fuerza sobre el ion. *Resp.* 9.6×10^{-14} N

30.15 Calcúlese la velocidad de cierto ion que no sufre ninguna deflexión al pasar por campos E y B perpendiculares, donde $E = 7.7$ kV/m y $B = 0.14$ T. *Resp.* 55 km/s

30.16 La partícula que se muestra en la Fig. 30-14 tiene carga positiva en todos los casos. ¿Cuál es la dirección de la fuerza sobre ella debida al campo magnético? Dar su magnitud en términos de B, q y v. *Resp.* *a*) hacia adentro de la página, qvB; *b*) hacia afuera de la página, qvB sen θ; *c*) en el plano de la página haciendo un ángulo $\theta + 90°$, qvB

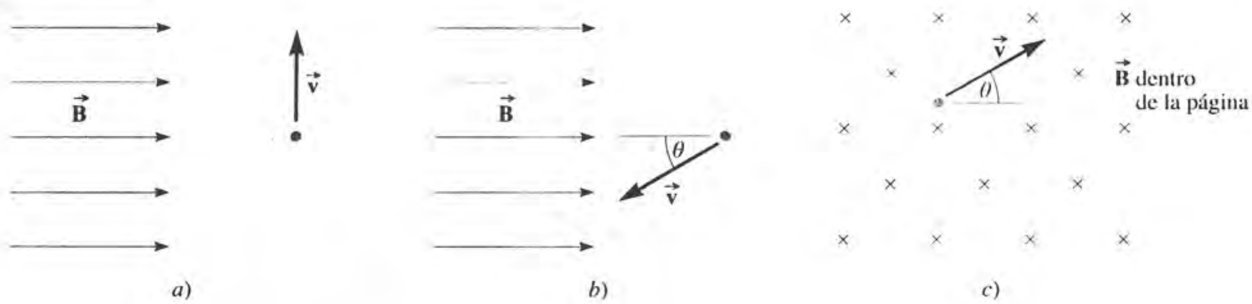


Fig. 30-14

30.17 ¿Cuál podría ser la masa de un ion positivo que se mueve a 1.0×10^7 m/s y se curva dentro de una trayectoria circular de radio 1.55 m debido a un campo magnético de 0.134 Wb/m²? (Existen varias respuestas posibles.) *Resp.* $n(3.3 \times 10^{-27}$ kg), donde ne es la carga del ion

30.18 Un electrón se acelera desde el reposo a través de una diferencia de potencial de 3750 V. Después entra a una región donde $B = 4.0 \times 10^{-3}$ T perpendicular a su velocidad. Calcúlese el radio de la trayectoria que seguirá. *Resp.* 5.2 cm

30.19 Un electrón se dispara desde el origen de coordenadas con una rapidez de 5.0×10^6 m/s. Su velocidad inicial hace un ángulo de 20° con el eje $+x$. Descríbase su movimiento si un campo magnético $B = 2.0$ mT existe en la dirección $+x$. *Resp.* helicoidal, $r = 0.49$ cm, paso = 8.5 cm

30.20 Un haz de electrones pasa sin deflectarse a través de dos campos, uno eléctrico y el otro magnético, mutuamente perpendiculares. Si el campo eléctrico se apaga y el mismo campo magnético se mantiene, los electrones se mueven en el campo magnético en trayectorias circulares de radio 1.14 cm. Determínese la razón de la carga electrónica a la masa del electrón si $E = 8.00$ kV/m y el campo magnético tiene una densidad de flujo de 2.00 mT. *Resp.* $e/m_e = 175$ GC/kg

30.21 Un alambre recto de 15 cm de longitud que lleva una corriente de 6.0 A se encuentra en un campo uniforme de 0.40 T. ¿Cuál es la fuerza sobre este alambre cuando está formando *a*) un ángulo recto con el campo y *b*) un ángulo de 30° con el campo? *Resp.* *a*) 0.36 N; *b*) 0.18 N

30.22 ¿Cuál es la dirección de la fuerza debida al campo magnético terrestre que actúa sobre un alambre que lleva una corriente verticalmente hacia abajo? *Resp.* horizontalmente hacia el este

30.23 Encuéntrese la fuerza sobre cada segmento del alambre que se muestra en la Fig. 30-15, si $B = 0.15$ T. Considérese que la corriente en el alambre es de 5.0 A. *Resp.* En la sección AB y DE, la fuerza es cero; en la sección BC, es de 0.12 N hacia adentro de la página; en la sección CD, es de 0.12 N hacia afuera de la página

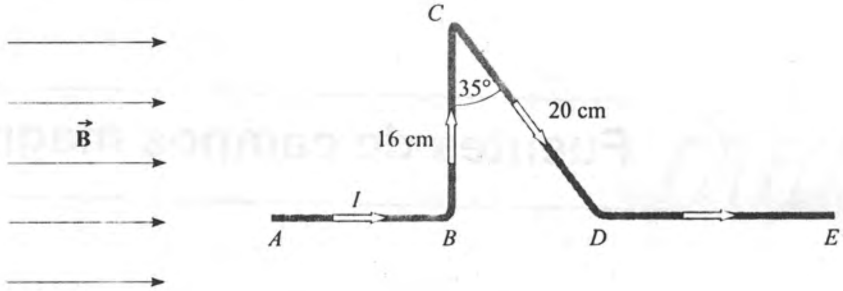


Fig. 30-15

30.24 Una bobina rectangular de 25 vueltas está suspendida en un campo magnético de 0.20 Wb/m^2. El plano de ésta es paralelo a la dirección del campo. Las dimensiones de la bobina son: 15 cm perpendicular a las líneas de campo y 12 cm paralelas a ellas. ¿Cuál es la corriente en la bobina si la torca sobre ella es de 5.4 N · m?
Resp. 60 A

30.25 Un electrón se acelera desde el reposo a través de una diferencia de potencial de 800 V. Después se mueve perpendicularmente a un campo magnético de 30 G. Encuéntrese el radio de su órbita y su frecuencia orbital.
Resp. 3.2 cm, 84 MHz

30.26 Un protón y un deuterón ($m_d \approx 2m_p$, $q_d = e$) se aceleran a través de la misma diferencia de potencial y entran en un campo magnético a lo largo de la misma línea. Si el protón sigue una trayectoria de radio R_p, ¿cuál deberá ser el radio de la trayectoria del deuterón? *Resp.* $R_d = R_p\sqrt{2}$

capítulo 31

Fuentes de campos magnéticos

LOS CAMPOS MAGNÉTICOS SE PRODUCEN por el movimiento de cargas, incluyendo aquéllas de la corriente eléctrica. La Fig. 31-1 muestra la naturaleza de los campos magnéticos originados por diversas configuraciones de corriente. Abajo de cada una de ellas se da el valor de B en el punto de referencia P. La constante $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T · m/A se llama *permeabilidad del espacio libre (vacío)*. Se asume que el material circundante es el vacío o aire.

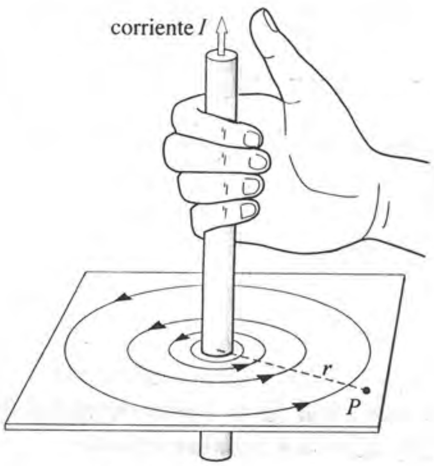
LA DIRECCIÓN DEL CAMPO MAGNÉTICO producido por la corriente que circula por un alambre se puede encontrar utilizando la regla de la mano derecha, ilustrada en la Fig. 31-1*a*:

> Rodee el alambre con la mano derecha y con el pulgar apunte en la dirección de la corriente. Los dedos circundan el alambre en la misma dirección que el campo magnético.

Esta misma regla puede usarse para encontrar la dirección del campo para una espira de corriente como la de la Fig. 31-1*b*.

LOS MATERIALES FERROMAGNÉTICOS, principalmente el hierro y los demás elementos de transición, incrementan fuertemente los campos magnéticos. Otros materiales influyen ligeramente en ellos. Los materiales ferromagnéticos contienen dominios, o regiones de átomos alineados, que actúan como pequeños imanes. Cuando los dominios dentro de un objeto se alinean entre sí, el objeto se convierte en un imán. En un imán permanente no es fácil destruir el alineamiento de los dominios.

EL MOMENTO MAGNÉTICO de una espira plana por la que circula una corriente (corriente $= I$, área $= A$) es IA. El momento magnético es una cantidad vectorial que apunta a lo largo de la perpendicular al plano de la espira. En términos del momento magnético, la torca sobre una bobina plana con N espiras localizada dentro de un campo B es $\tau = N(IA)B$ sen θ, donde θ es el ángulo entre el campo y el vector momento magnético.



a) Alambre largo recto:

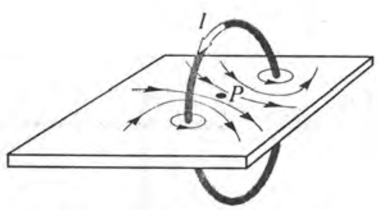
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

r distancia a P desde el eje del alambre

c) Punto interior de un solenoide largo con n vueltas por metro:

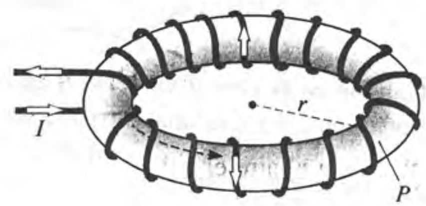
$$B = \mu_0 n I$$

Es constante en el interior



b) Centro de una bobina circular con radio a y N vueltas

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2a}$$



d) Punto interior de un toroide con N vueltas

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

donde r es el radio del círculo donde se enrolla P

Fig. 31-1

CAMPO MAGNÉTICO PRODUCIDO POR UN ELEMENTO DE CORRIENTE: El elemento de corriente de longitud ΔL que se muestra en la Fig. 31-2 contribuye con una cantidad $\Delta\vec{\mathbf{B}}$ al campo en P. La magnitud de $\Delta\vec{\mathbf{B}}$ está dada por la *Ley de Biot-Savart*:

$$\Delta B = \frac{\mu_0 I\,\Delta L}{4\pi r^2}\operatorname{sen}\theta$$

donde r y θ se hallan definidos en la ilustración. La dirección de $\Delta\vec{\mathbf{B}}$ es perpendicular al plano determinado por ΔL y r (el plano de la página). En el caso que se ilustra, la regla de la mano derecha indica que $\Delta\vec{\mathbf{B}}$ apunta hacia afuera de la página.

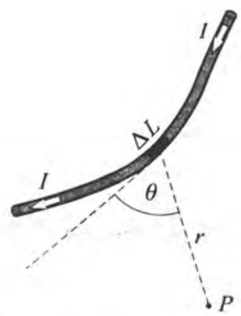


Fig. 31-2

Cuando r está en línea con ΔL, entonces $\theta = 0$ y por lo tanto $\Delta B = 0$. Esto quiere decir que el campo debido a un alambre recto en un punto que se encuentre sobre la línea del alambre es cero.

PROBLEMAS RESUELTOS

31.1 Calcule en el aire el valor de B en un punto que se encuentra a 5 cm de un alambre recto y largo, por el cual circula una corriente de 15 A.

De la Fig. 31-1*a*,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A})(15\ \mathrm{A})}{2\pi(0.05\ \mathrm{m})} = 6 \times 10^{-5}\ \mathrm{T}$$

31.2 Una bobina circular plana con 40 espiras de alambre tiene un diámetro de 32 cm. ¿Qué corriente debe fluir por los alambres para producir en el centro de la bobina un campo de $3.0 \times 10^{-4}\ \mathrm{Wb/m^2}$?

De la Fig. 31-1*b*,

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2r} \quad \text{o bien} \quad 3.0 \times 10^{-4}\ \mathrm{T} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A})(40)(I)}{2(0.16\ \mathrm{m})}$$

de donde $I = 1.9$ A.

31.3 Un solenoide con núcleo de aire y con 2000 espiras tiene una longitud de 60 cm y un diámetro de 2.0 cm. Si una corriente de 5.0 A pasa por él, ¿cuál será la densidad de flujo en su interior?

De la Fig. 31-1*c*,

$$B = \mu_0 nI = (4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A})\left(\frac{2000}{0.60\ \mathrm{m}}\right)(5.0\ \mathrm{A}) = 0.021\ \mathrm{T}$$

31.4 En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, el electrón viaja con una rapidez de 2.2×10^6 m/s en un círculo ($r = 5.3 \times 10^{-11}$ m) alrededor del núcleo. Calcule el valor de B en el núcleo debido al movimiento del electrón.

En el problema 26.17 se encuentra que el electrón en órbita corresponde a una espira de corriente con $I = 1.06$ mA. El campo en el centro de la espira de corriente es

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A})(1.06 \times 10^{-3}\ \mathrm{A})}{2(5.3 \times 10^{-11}\ \mathrm{m})} = 13\ \mathrm{T}$$

31.5 Un alambre recto y largo coincide con el eje x y otro coincide con el eje y. Cada uno lleva una corriente de 5 A en la dirección positiva de los ejes coordenados. (Véase la Fig, 31-3.) ¿En qué punto el campo combinado es igual a cero?

Si se utiliza la regla de la mano derecha se concluye que el campo tiende a cancelarse en el primero y tercer cuadrantes. Una línea a $\theta = 45°$ que pasa por el origen es equidistante de los dos alambres en estos cuadrantes. En consecuencia, los campos se anulan exactamente a lo largo de la línea $x = y$, es decir, la línea 45°.

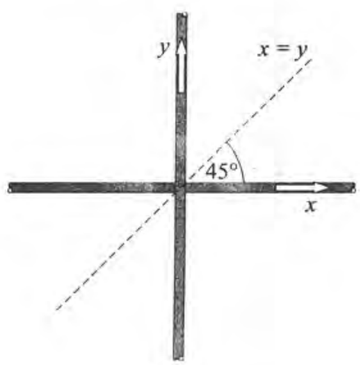


Fig. 31-3

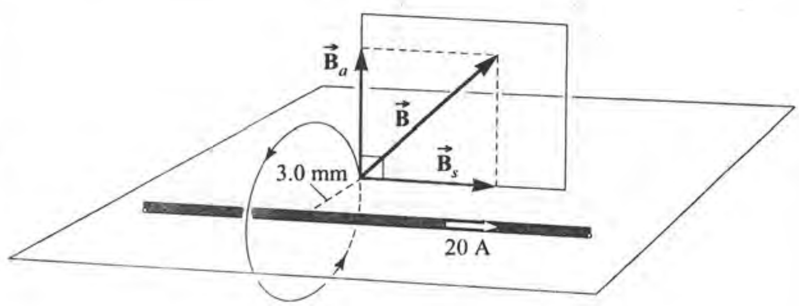


Fig. 31-4

31.6 Un alambre de gran longitud lleva una corriente de 20 A a lo largo del eje de un solenoide de gran longitud. El campo debido al solenoide es de 4.0 mT. Encuentre el campo resultante en un punto a 3.0 mm del eje del solenoide.

La situación se muestra en la Fig. 31-4. El campo del solenoide, $\vec{\mathbf{B}}_s$, es paralelo al alambre. El campo del alambre recto y largo, $\vec{\mathbf{B}}_a$, circunda al alambre y es perpendicular a $\vec{\mathbf{B}}_s$. Tenemos que $B_s = 4.0$ mT y

$$B_a = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A})(20\ \mathrm{A})}{2\pi(3.0 \times 10^{-3}\ \mathrm{m})} = 1.33\ \mathrm{mT}$$

Como $\vec{\mathbf{B}}_s$ y $\vec{\mathbf{B}}_a$ son perpendiculares, su resultado **B** tiene magnitud

$$B = \sqrt{(4.0\ \mathrm{mT})^2 + (1.33\ \mathrm{mT})^2} = 4.2\ \mathrm{mT}$$

31.7 Como se muestra en la Fig. 31-5, dos alambres largos paralelos están separados 10 cm y llevan una corriente de 6.0 y 4.0 A. Calcúlese la fuerza sobre 1.0 m del alambre D si las corrientes son *a*) paralelas y *b*) antiparalelas.

a) Ésta es la situación que se muestra en la Fig. 31-5. El campo en el alambre D debido al alambre C está dirigido hacia adentro de la página y tiene un valor

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A})(6.0\ \mathrm{A})}{2\pi (0.10\ \mathrm{m})} = 1.2 \times 10^{-5}\ \mathrm{T}$$

La fuerza sobre 1 m del alambre D debido a este campo es

$$F_M = ILB \text{ sen } \theta = (4.0\ \mathrm{A})(1.0\ \mathrm{m})(1.2 \times 10^{-5}\ \mathrm{T})(\text{sen } 90°) = 48\ \mu\mathrm{N}$$

Al aplicar la regla de la mano derecha al alambre D se encuentra que la fuerza sobre D está dirigida hacia la izquierda. Los alambres se atraen uno al otro.

b) Si la corriente en D fluye en sentido opuesto, la dirección de la fuerza se invierte. Los alambres se repelen entre sí. La fuerza por metro de longitud sigue siendo 48 μN.

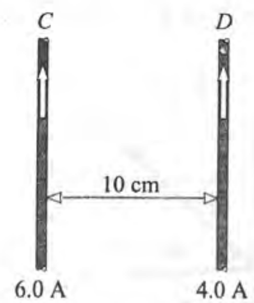


Fig. 31-5

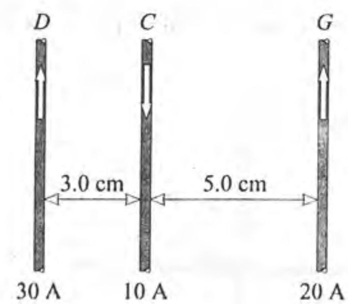


Fig. 31-6

31.8 Considere los tres alambres paralelos, rectos y largos que se observan en la Fig. 31-6. Encuentre la fuerza que experimentan 25 cm de longitud del alambre C.

Los campos debidos a los alambres D y G en el alambre C son

$$B_D = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A})(30\ \mathrm{A})}{2\pi (0.030\ \mathrm{m})} = 2.0 \times 10^{-4}\ \mathrm{T}$$

apunta hacia la página, y

$$B_G = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A})(20\ \mathrm{A})}{2\pi (0.050\ \mathrm{m})} = 0.80 \times 10^{-4}\ \mathrm{T}$$

hacia afuera de la página. Por consiguiente, el campo en la posición del alambre C es

$$B = 2.0 \times 10^{-4} - 0.80 \times 10^{-4} = 1.2 \times 10^{-4}\ \mathrm{T}$$

hacia el interior de la página. La fuerza sobre los 25 cm de longitud de C es

$$F_M = ILB \text{ sen } \theta = (10\ \mathrm{A})(0.25\ \mathrm{m})(1.2 \times 10^{-4}\ \mathrm{T})(\text{sen } 90°) = 0.30\ \mathrm{mN}$$

Usando la regla de la mano derecha en el alambre C se encuentra que la fuerza sobre el alambre C se dirige a la derecha.

31.9 Una bobina circular plana con 10 espiras de alambre tiene un diámetro de 2.0 cm y lleva una corriente de 0.50 A. Ésta se monta dentro de un solenoide que cuenta con 200 espiras en sus 25 cm de longitud. La corriente en el solenoide es de 2.4 A. Calcule la torca que se requiere para mantener la bobina con su eje perpendicular al del solenoide.

Se eligen los subíndices s y c para referirse a la bobina y al solenoide, respectivamente. Entonces

$$\tau = N_c I_c A_c B_s \text{ sen } 90°$$

Pero $B_s = \mu_0 n I_s = \mu_0 (N_s/L_s) I_s$, que da

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{\mu_0 N_c N_s I_c I_s (\pi r_c^2)}{L_s} \\ &= \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A})(10)(200)(0.50\ \mathrm{A})(2.4\ \mathrm{A})\,\pi\,(0.010\ \mathrm{m})^2}{0.25\ \mathrm{m}} \\ &= 3.8 \times 10^{-6}\ \mathrm{N \cdot m}\end{aligned}$$

31.10 El alambre que se muestra en la Fig. 31-7 lleva una corriente de 40 A. Encuentre el campo en el punto P.

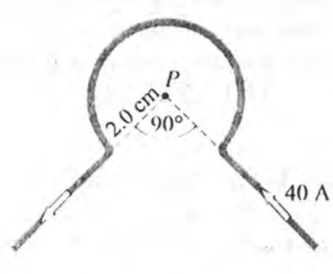


Fig. 31-7

Como P se halla sobre las líneas de los alambres rectos, éstos no contribuyen al campo en P. La espira circular de radio r da un campo $B = \mu_0 I/ 2r$ en el punto central. Ya que solamente tienen tres cuartos de la espira, entonces

$$B \text{ en el punto } P = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{\mu_0 I}{2r}\right) = \frac{(3)(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T} \cdot \text{m/A})(40\ \text{A})}{(4)(2)(0.020\ \text{m})}$$

$$= 9.4 \times 10^{-4}\ \text{T} = 0.94\ \text{mT}$$

El campo apunta hacia afuera de la página.

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

31.11 Calcular la densidad de flujo en el aire en un punto a 6.0 cm de un alambre recto y largo que lleva una corriente de 9.0 A. *Resp.* 30 μT

31.12 Una bobina plana con devanado cerrado y con 25 espiras de alambre tiene un diámetro de 10 cm y lleva una corriente de 4.0 A. Determine el valor de B en su centro. *Resp.* 1.3×10^{-3} Wb/m^2

31.13 Un solenoide con núcleo de aire de 50 cm de longitud cuenta con 4000 espiras enrolladas en él. Calcule B en su interior cuando existe una corriente de 0.25 A en las espiras. *Resp.* 2.5 mT

31.14 Un toroide con núcleo de aire y devanado uniforme tiene 750 espiras. El radio del círculo que pasa por el centro del devanado es de 5 cm. ¿Qué corriente en las espiras producirá un campo de 1.8 mT en el círculo central? *Resp.* 0.6 A

31.15 Dos alambres largos paralelos están separados 4 cm y llevan una corriente de 2 A y 6 A en la misma dirección. Encuentre la fuerza que existe entre los alambres por metro de longitud de alambre. *Resp.* 6×10^{-5} N/m, atracción

31.16 Dos alambres fijos paralelos y largos, A y B, se encuentran separados 10 cm y llevan una corriente de 40 A y 20 A respectivamente, en direcciones opuestas. Determine el campo resultante *a*) en una línea a medio camino entre los alambres y paralela a ellos y *b*) en una línea a 8.0 cm del alambre A y a 18 cm del alambre B. *c*) ¿Cuál es la fuerza por metro sobre un tercer alambre largo, a la mitad del camino entre A y B y en su propio plano, cuando éste lleva una corriente de 5.0 A en la misma dirección que la corriente en A? *Resp.* *a*) 2.4×10^{-4} T; *b*) 7.8×10^{-5} T; *c*) 1.2×10^{-3} N/m, hacia A

31.17 Los alambres rectos y largos de la Fig. 31-3 conducen ambos una corriente de 12 A en la dirección que se indica. Calcule B en el punto *a*) $x = -5.0$ cm, $y = 5.0$ cm y *b*) $x = -7.0$ cm, $y = -6.0$ cm. *Resp.* *a*) 96 μT, hacia afuera; *b*) 5.7 μT, hacia adentro

31.18 Un electromagneto está formado por un solenoide (5.0 cm de longitud con 200 espiras) devanado sobre un núcleo de hierro dulce que intensifica el campo 130 veces. (Se puede decir que la *permeabilidad relativa* del hierro es de 130.) Encontrar B dentro del hierro cuando la corriente en el solenoide es de 0.30 A. *Resp.* 0.20 T

31.19 Un solenoide (50 cm de largo y con 2000 espiras) lleva una corriente de 0.70 A y se encuentra en el vacío. Se dispara un electrón en un ángulo de 10° respecto al eje del solenoide desde un punto sobre el mismo eje. *a*) ¿Cuál debe ser la rapidez máxima del electrón para que no golpee el interior del solenoide de diámetro 1.6 cm? *b*) ¿Cuál será el paso de la trayectoria helicoidal del electrón? *Resp.* *a*) 1.4×10^7 m/s; *b*) 14 cm

capítulo 32

Fem inducida; flujo magnético

EFECTOS MAGNÉTICOS DE LA MATERIA: La mayor parte de los materiales sólo presentan ligeros efectos sobre un campo magnético estacionario. Dichos efectos se describen mejor en un experimento.

Supóngase que se utiliza un solenoide muy largo o un toroide en el vacío. Cuando se establece una corriente en la bobina, la inducción magnética en cierto punto del interior de un solenoide o toroide es B_0, donde el subíndice $_0$ significa que se trata del vacío. Si ahora el núcleo del solenoide o toroide se llena con un material, el campo en ese punto cambia a un nuevo valor B. Se define como:

$$\text{Permeabilidad relativa de un material} = k_M = \frac{B}{B_0}$$

$$\text{Permeabilidad de un material} = \mu = k_M \mu_0$$

Recuérdese que μ_0 es la permeabilidad del vacío, $4\pi \times 10^{-7}\ \text{T} \cdot \text{m/A}$.

Materiales diamagnéticos son aquellos que tienen valores para k_M ligeramente menores que la unidad (por ejemplo, 0.999 984 para el plomo sólido). Éstos hacen disminuir ligeramente el valor de B en el solenoide o toroide.

Materiales paramagnéticos son los que tienen valores para k_M, ligeramente mayores que la unidad (por ejemplo, 1.000 021 para el aluminio sólido). Estos materiales incrementan ligeramente el valor de B en el solenoide o toroide.

Materiales ferromagnéticos, como el hierro y sus aleaciones, cuentan con valores para k_M, de alrededor de 50 o mayores y, por lo tanto, aumentan considerablemente el valor del campo B en un solenoide o toroide.

LÍNEAS DE FLUJO MAGNÉTICO: Un campo magnético puede representarse por líneas de campo en las cuales $\vec{\mathbf{B}}$ siempre es tangente. Si, además de ello, estas líneas están construidas de tal modo que el número de líneas que inciden en una unidad de área perpendicular a ellas es igual al valor local de B.

EL FLUJO MAGNÉTICO (Φ_M)a través de un área A se define como el producto de $B_\perp$ y A donde $B_\perp$ es la componente de $\vec{\mathbf{B}}$ perpendicular a la superficie de área A, entonces

$$\Phi_M = B_\perp A = BA \cos\theta$$

en donde θ es el ángulo entre la dirección del campo magnético y la perpendicular al área. El flujo se expresa en *webers* (Wb).

UNA FEM INDUCIDA existe en una espira cualquiera, siempre que ocurra un cambio en el flujo a través del área de la espira. La fem inducida sólo existe durante el tiempo en que está cambiando el flujo a través del área.

LEY DE FARADAY PARA LA FEM INDUCIDA: Supóngase que una bobina con N vueltas se somete a un cambio en el flujo magnético a través de la bobina. Si ocurre una modificación en el flujo $\Delta\Phi_M$ en un tiempo Δt, entonces la fem promedio inducida entre las dos terminales de la bobina está dada por

$$\mathscr{E} = -N\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta t}$$

La fem $\mathscr{E}$ está en volts si $\Delta\Phi/\Delta t$ está en Wb/s. El signo menos indica que la fem inducida se opone al cambio que la produce, como está establecido en la *Ley de Lenz*.

LEY DE LENZ: Una fem inducida está siempre en una dirección que se opone al cambio de flujo que la produce. Por ejemplo, si el flujo a través de la bobina se incrementa, la corriente producida por la fem inducida generará un flujo tal que tenderá a cancelar el incremento en el flujo. O bien, si el flujo a través de la bobina disminuye, la corriente producirá un flujo que tiende a restituir la disminución del flujo. La Ley de Lenz es una consecuencia de la conservación de la energía. Si éste no fuera el caso, las corrientes inducidas acrecentarían el cambio de flujo que hace que se inicien y el proceso se llevaría a cabo indefinidamente.

FEM GENERADA POR MOVIMIENTO: Cuando un conductor se mueve a través de un campo magnético de tal manera que corta las líneas de flujo, existirá una fem en él, de acuerdo con la Ley de Faraday. En este caso,

$$|\mathscr{E}| = \frac{\Delta\Phi_M}{\Delta t}$$

El símbolo $|\mathscr{E}|$ significa que aquí sólo se considera la magnitud de la fem promedio inducida; su dirección se tomará en cuenta más adelante.

La fem inducida en un conductor recto de longitud L moviéndose con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ perpendicular al campo $\vec{\mathbf{B}}$ está dada por

$$|\mathscr{E}| = BLv$$

donde $\vec{\mathbf{B}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ y el alambre son perpendiculares entre sí.

En este caso, la Ley de Lenz implica que la fem inducida se opondrá al proceso. Pero ahora la forma de oposición es por medio de la fuerza ejercida por el campo magnético sobre la corriente inducida en el conductor. La dirección de la corriente es tal que la fuerza se opone al movimiento del conductor. Si se sabe la dirección de la corriente, también se conoce la dirección de $\mathscr{E}$.

PROBLEMAS RESUELTOS

32.1 Un solenoide de 40 cm de largo tiene un área en su sección transversal de 8.0 cm² y fue devanado con 300 vueltas de alambre que lleva una corriente de 1.2 A. La permeabilidad relativa de su núcleo de hierro es de 600. Calcúlese *a*) *B* en un punto interior y *b*) el flujo a través del solenoide.

a) De la Fig. 31-1*c*,

$$B_0 = \frac{\mu_0 NI}{L} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A})(300)(1.2\ \mathrm{A})}{0.40\ \mathrm{m}} = 1.13\ \mathrm{mT}$$

y así

$$B = k_M B_0 = (600)\ (1.13 \times 10^{-3}\ \mathrm{T}) = 0.68\ \mathrm{T}$$

b) Dado que las líneas de campo son perpendiculares a la sección transversal del solenoide,

$$\Phi_M = B_\perp A = BA = (0.68\ \mathrm{T})(8.0 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^2}) = 54\ \mu\mathrm{Wb}$$

32.2 El flujo a través de un cierto toroide cambia de 0.65 mWb a 0.91 mWb cuando su núcleo de aire es reemplazado por otro material. ¿Cuál es la permeabilidad relativa y la permeabilidad del material?

El núcleo de aire es esencialmente el mismo que un núcleo de vacío. Entonces, $k_M = B/B_0$ y $\Phi_M = B_\perp A$,

$$k_M = \frac{0.91\ \mathrm{mWb}}{0.65\ \mathrm{mWb}} = 1.40$$

Ésta es la permeabilidad relativa. La permeabilidad magnética es

$$\mu = k_M \mu_0 = (1.40)(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A}) = 5.6\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A}$$

32.3 La espira de un cuarto de círculo que se muestra en la Fig. 32-1 tiene un área de 15 cm². Existe un campo magnético con $B = 0.16$ T en la dirección de $+x$. Encuéntrese el flujo a través de la espira para cada una de las orientaciones que se muestran.

Se sabe que $\Phi = B_\perp A$

a) $$\Phi_M = B_\perp A = BA = (0.16\ \mathrm{T})(15 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^2}) = 2.4 \times 10^{-4}\ \mathrm{Wb}$$

b) $$\Phi_M = (B \cos 20°)A = (2.4 \times 10^{-4}\ \mathrm{Wb})(\cos 20°) = 2.3 \times 10^{-4}\ \mathrm{Wb}$$

c) $$\Phi_M = (B\ \mathrm{sen}\ 20°)A = (2.4 \times 10^{-4}\ \mathrm{Wb})(\mathrm{sen}\ 20°) = 8.2 \times 10^{-5}\ \mathrm{Wb}$$

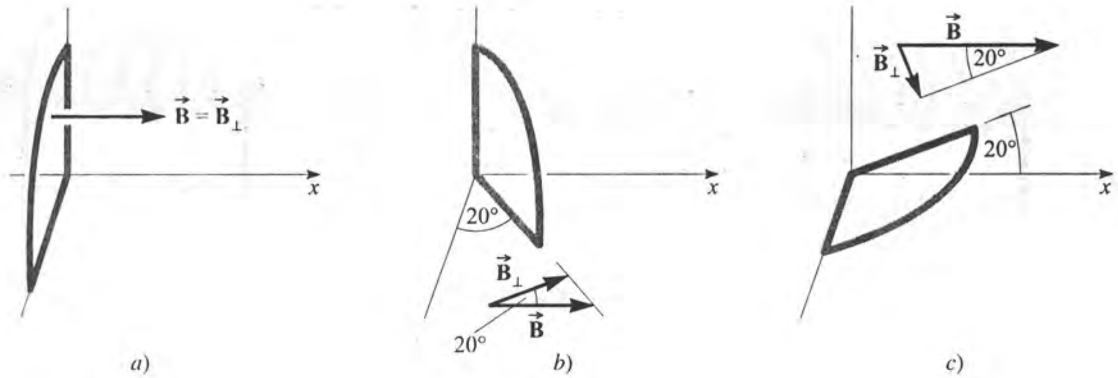


Fig. 32-1

32.4 Una superficie semiesférica de radio R se coloca en un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ como se muestra en la Fig. 32-2. ¿Cuál es el flujo a través de la superficie semiesférica?

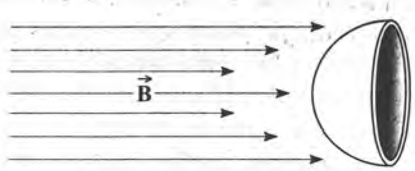


Fig. 32-2

El mismo número de líneas de flujo que atraviesan por la superficie curva pasan a través de la sección transversal sombreada. Entonces,

$$\text{Flujo a través de la superficie curva} = \text{flujo a través de la superficie plana} = B_\perp A$$

donde en este caso $B_\perp = B$ y $A = \pi R^2$. Por lo tanto $\Phi_M = \pi B R^2$.

32.5 Una bobina circular de 50 espiras tiene un radio de 3.0 cm. Está orientada de tal forma que las líneas de campo de un campo magnético son perpendiculares al área de la bobina. Suponga que el campo magnético varía de tal manera que B se incrementa de 0.10 T hasta 0.35 T en un tiempo de 2.0 milisegundos. Encuéntrese la fem promedio inducida en la bobina.

$$\Delta\Phi_M = B_{\text{final}}A - B_{\text{inicial}}A = (0.25\ \text{T})(\pi r^2) = (0.25\ \text{T})\pi(0.030\ \text{m})^2 = 7.1 \times 10^{-4}\ \text{Wb}$$

$$|\mathscr{E}| = N\left|\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta t}\right| = (50)\left(\frac{7.1 \times 10^{-4}\ \text{Wb}}{2 \times 10^{-3}\ \text{s}}\right) = 18\ \text{V}$$

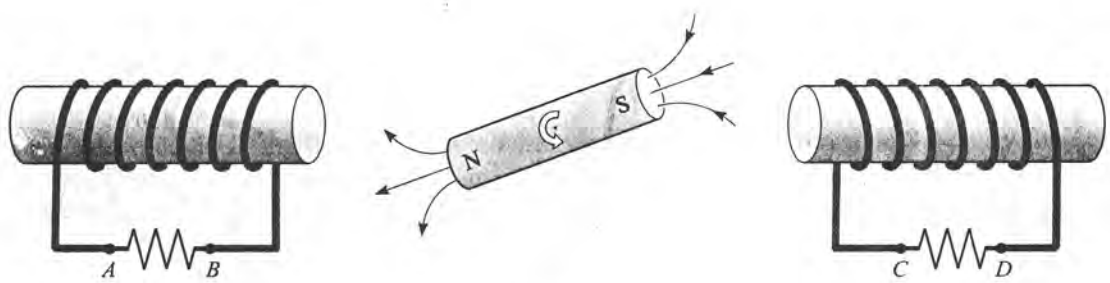


Fig. 32-3

32.6 El imán de la Fig. 32-3 induce una fem en la bobina cuando éste va a la derecha o a la izquierda. Encuéntrese la dirección de la corriente inducida a través del resistor cuando el imán se está moviendo *a*) hacia la derecha y *b*) hacia la izquierda.

a) Considere primero la bobina de la izquierda. Como el imán se mueve hacia la derecha, el flujo a través de la bobina, que se dirige generalmente a la izquierda, disminuye. Para compensar esto, la corriente inducida en la bobina fluirá de tal manera que produzca un flujo hacia la izquierda a través de sí misma. Aplíquese la regla de la mano derecha para la espira de la izquierda. Para que que se produzca un flujo hacia la izquierda adentro de la bobina la corriente debe fluir a través del resistor de B hacia A.

Tome en cuenta ahora la bobina de la derecha. Cuando el imán se mueve hacia la derecha se incrementa el flujo dentro de la bobina, dirigido casi siempre hacia la izquierda. La corriente inducida en la bobina producirá un flujo hacia la derecha para cancelar este incremento de flujo. Al aplicar la regla de la mano derecha a la vuelta del extremo derecho, se observa que si la corriente fluye de C hacia D a través del resistor, se genera un flujo hacia la derecha dentro de sí misma.

b) En este caso, el cambio de flujo causado por el movimiento del imán se opone al que se encontró en el inciso *a*). Si se aplica el mismo tipo de razonamiento, se encuentra que las corrientes fluyen a través de los resistores de A a B y de D a C.

32.7 En la Fig. 32-4*a* hay un campo magnético en la dirección $+x$, con $B = 0.20$ T y una espira de alambre en el plano yz. La espira tiene un área de 5.0 cm^2 y gira alrededor de la línea CD como eje. El punto A gira hacia los valores positivos de x desde la posición indicada. Si la línea AE gira 50° a partir de la posición que se muestra en un tiempo de 0.20 s, *a*) ¿cuál es el cambio en el flujo a través de la espira?, *b*) ¿cuál es la fem promedio inducida?, y *c*) ¿fluirá la corriente inducida de A a C o de C a A en la parte superior de la espira?

a)
$$\text{Flujo inicial} = B_\perp A = BA = (0.20\ \text{T})(5.0\times10^{-4}\ \text{m}^2) = 1.0\times10^{-4}\ \text{Wb}$$

$$\text{Flujo final} = (B\cos 50°)A = (1.0\times10^{-4}\ \text{Wb})(\cos 50°) = 0.64\times10^{-4}\ \text{Wb}$$

$$\Delta\Phi_M = 0.64\times10^{-4}\ \text{Wb} - 1.0\times10^{-4}\ \text{Wb} = -0.36\times10^{-4}\ \text{Wb} = -36\ \mu\text{Wb}$$

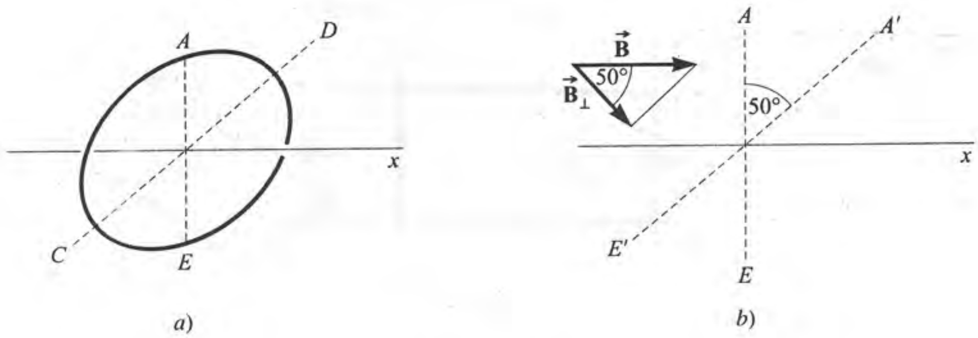


Fig. 32-4

b)
$$|\mathscr{E}| = N\left|\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta t}\right| = (1)\left(\frac{0.36\times10^{-4}\ \text{Wb}}{0.20\ \text{s}}\right) = 1.8\times10^{-4}\ \text{V} = 0.18\ \text{mV}$$

c) El flujo a través de la espira de izquierda a derecha disminuye. La corriente inducida tenderá a establecer un flujo de izquierda a derecha a través de la espira. Por la regla de la mano derecha, la corriente fluirá de A a C. Dicho de otra manera, se establece una torca que tiende a rotar la espira hacia su posición original. La regla de la mano derecha del capítulo 30 indica que la corriente debe fluir de A hacia C.

32.8 Una bobina de 50 vueltas se mueve en 0.020 s entre los polos de un imán desde un punto donde su área intercepta un flujo de 3.1×10^{-4} Wb hasta otro punto en el cual su área atrapa un flujo de 0.10×10^{-4} Wb. Determínese la fem promedio inducida en la bobina.

$$|\mathscr{E}| = N\left|\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta t}\right| = 50\,\frac{(3.1-0.10)\times10^{-4}\ \text{Wb}}{0.020\ \text{s}} = 0.75\ \text{V}$$

32.9 Una barra de cobre de 30 cm de longitud está colocada perpendicularmente a un campo con una densidad de flujo de 0.80 Wb/m^2 y se mueve en ángulo recto respecto al campo con una rapidez de 0.50 m/s. Determínese la fem inducida en la barra.

$$|\mathscr{E}| = Blv = (0.80\ \text{Wb/m}^2)(0.30\ \text{m})(0.50\ \text{m/s}) = 0.12\ \text{V}$$

32.10 Como se muestra en la Fig. 32-5, una varilla de metal hace contacto con una parte de un circuito y lo completa, es decir, lo cierra. El circuito es perpendicular a un campo magnético con $B = 0.15$ T. Si la resistencia es de 3.0 Ω, ¿cuál es la magnitud de la fuerza necesaria para mover la varilla como se indica con una rapidez constante de 2.0 m/s? ¿Con qué rapidez se disipa la energía en el resistor?

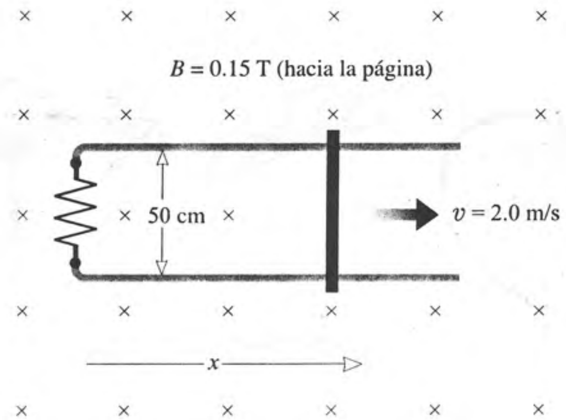


Fig. 32-5

La fem inducida en la varilla origina una corriente en el circuito que fluye en sentido contrario a las manecillas del reloj. Debido a la corriente en la varilla, ésta experimenta una fuerza hacia la izquierda debida al campo magnético. Para mover la varilla hacia la derecha con una rapidez constante, dicha fuerza debe ser balanceada con la de un jalón.

Método 1

La fem inducida en la varilla es

$$|\mathscr{E}| = BLv = (0.15\ \text{T})(0.50\ \text{m})(2.0\ \text{m/s}) = 0.15\ \text{V}$$

y

$$I = \frac{|\mathscr{E}|}{R} = \frac{0.15\ \text{V}}{3.0\ \Omega} = 0.050\ \text{A}$$

de donde

$$F_M = ILB \text{ sen } 90° = (0.050\ \text{A})(0.50\ \text{m})(0.15\ \text{T})(1) = 3.8\ \text{mN}$$

Método 2

La fem inducida en la espira es

$$|\mathscr{E}| = N\left|\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta t}\right| = (1)\frac{B\,\Delta A}{\Delta t} = \frac{B(L\Delta x)}{\Delta t} = BLv$$

como anteriormente. Ahora se procede como en el Método 1.

Para calcular la potencia perdida en el resistor se puede utilizar

$$\text{P} = I^2R = (0.050\ \text{A})^2(3.0\ \Omega) = 7.5\ \text{mW}$$

Alternativamente, es posible emplear

$$\text{P} = Fv = (3.75 \times 10^{-3}\ \text{N})(2.0\ \text{m/s}) = 7.5\ \text{mW}$$

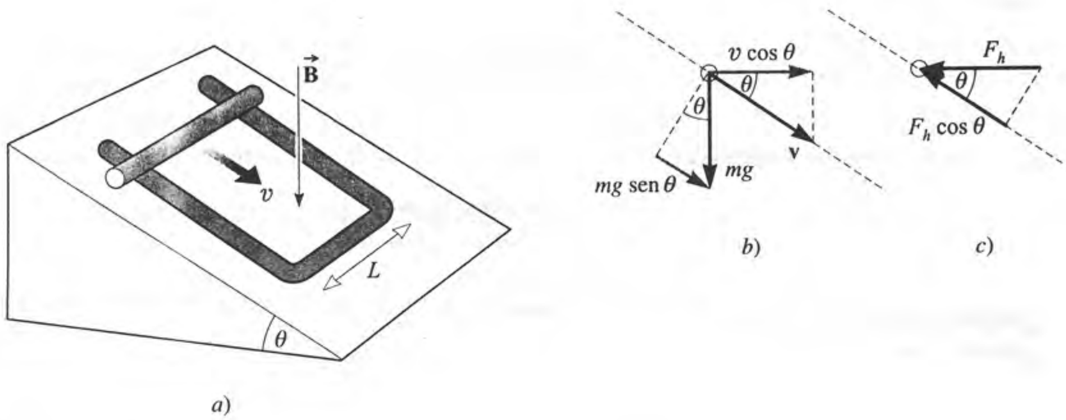


Fig. 32-6

32.11 La barra de metal de longitud L, masa m y resistencia R, que se muestra en la Fig. 32-6*a*, se desliza sin fricción sobre un circuito rectangular compuesto de alambre de resistencia despreciable que se encuentra sobre un plano inclinado. Ahí existe un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ vertical. Encuéntrese la velocidad terminal de la barra (esto es, la velocidad constante que logra obtener).

La gravedad jala la barra hacia abajo como se muestra en la Fig. 32-6*b*. La corriente inducida fluye en la barra interactuando con el campo de tal manera que retarda su movimiento.

Debido al movimiento de la barra en el campo magnético, una fem es inducida en la barra de la siguiente manera:

$$\mathscr{E} = (Blv)_\perp = BL(v\cos\theta)$$

Esto provoca una corriente

$$I = \frac{\text{fem}}{R} = \left(\frac{BLv}{R}\right)\cos\theta$$

en la espira. Un alambre que conduzca una corriente eléctrica en un campo magnético experimenta una fuerza perpendicular al plano definido por el alambre y las líneas del campo magnético. La barra, entonces, experimenta una fuerza horizontal $\vec{\mathbf{F}}_h$ (perpendicular al plano de $\vec{\mathbf{B}}$ y la barra) dada por

$$F_h = BIL = \left(\frac{B^2L^2v}{R}\right)\cos\theta$$

y mostrada en la Fig. 32-6*c*. Sin embargo, se necesita la componente de la fuerza a lo largo del plano, la cual es

$$F_{\text{hacia arriba del plano}} = F_h\cos\theta = \left(\frac{B^2L^2v}{R}\right)\cos^2\theta$$

Cuando la barra ha alcanzado su velocidad terminal, esta fuerza es igual a la fuerza gravitacional hacia abajo del plano. Es decir,

$$\left(\frac{B^2L^2v}{R}\right)\cos^2\theta = mg \operatorname{sen}\theta$$

de donde la velocidad terminal es

$$v = \left(\frac{Rmg}{B^2L^2}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\right)$$

¿Podría demostrar que esta respuesta es razonable en los casos límite $\theta = 0$, $B = 0$ y $\theta = 90°$ y para R muy grandes o muy pequeñas?

32.12 La varilla mostrada en la Fig. 32-7 rota alrededor del punto C que funge como pivote, con una frecuencia constante de 5.0 rev/s. Encuéntrese la diferencia de potencial entre sus dos extremos, los cuales están separados 80 cm, debida al campo magnético $B = 0.30$ T dirigido hacia adentro de la página.

Considere una espira ficticia $CADC$. A medida que transcurre el tiempo, su área y el flujo a través de ella se incrementan. La fem inducida en la espira se igualará a la diferencia de potencial que se busca.

$$|\mathscr{E}| = N\left|\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta t}\right| = (1)\left(\frac{B\,\Delta A}{\Delta t}\right)$$

Se lleva un quinto de segundo en cambiar el área de cero a la de un círculo completo, πr^2, por lo tanto

$$|\mathscr{E}| = B\frac{\Delta A}{\Delta t} = B\frac{\pi r^2}{0.20\,\text{s}} = (0.30\,\text{T})\frac{\pi(0.80\,\text{m})^2}{0.20\,\text{s}} = 3.0\,\text{V}$$

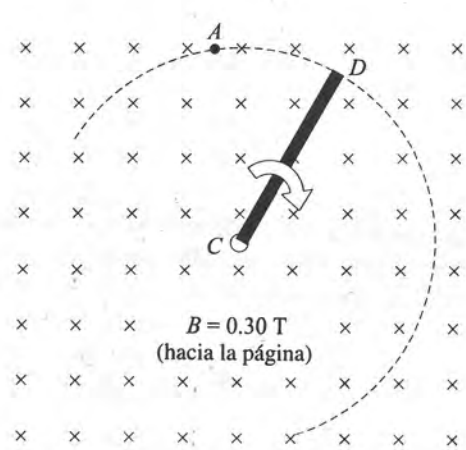


Fig. 32-7

32.13 Una bobina de 5.0 Ω de 100 vueltas y diámetro 6.0 cm, se coloca entre los polos de un imán de tal forma que el flujo es máximo a través de su área. Cuando la bobina súbitamente se retira del campo magnético del imán, una carga de 1.0×10^{-4} C fluye a través de un galvanómetro de 595 Ω conectado a la bobina. Calcúlese B entre los extremos del imán.

Como la bobina es removida, el flujo cambia de BA, donde A es el área de bobina, hasta cero. Por lo tanto,

$$|\mathscr{E}| = N\left|\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta t}\right| = N\frac{BA}{\Delta t}$$

Se tiene que $\Delta q = 1.0 \times 10^{-4}$ C. Pero por la ley de Ohm

$$|\mathscr{E}| = IR = \frac{\Delta q}{\Delta t}R$$

donde $R = 600\ \Omega$, la resistencia total. Si ahora se igualan estas dos expresiones para $|\mathscr{E}|$ y se resuelve para B

$$B = \frac{R\Delta q}{NA} = \frac{(600\,\Omega)(1.0\times10^{-4}\,\text{C})}{(100)(\pi\times9.0\times10^{-4}\,\text{m}^2)} = 0.21\,\text{T}$$

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

32.14 Un flujo de 9.0×10^{-4} Wb se produce en el núcleo de hierro de un solenoide. Cuando el núcleo se quita, un flujo (en el aire) de 5.0×10^{-7} Wb se produce en el mismo solenoide por la misma corriente. ¿Cuál es la permeabilidad relativa del hierro? *Resp.* 1.8×10^3

32.15 En la Fig. 32-8 existe un campo magnético de 0.2 T en la dirección de $+x$. Encuéntrese el flujo magnético a través de una de las caras de la caja mostrada. *Resp.* Cero a través del fondo y los lados anterior y posterior; por la cara superior, 1 mWb; a través del lado izquierdo, 2 mWb; y por el lado derecho, 0.8 mWb

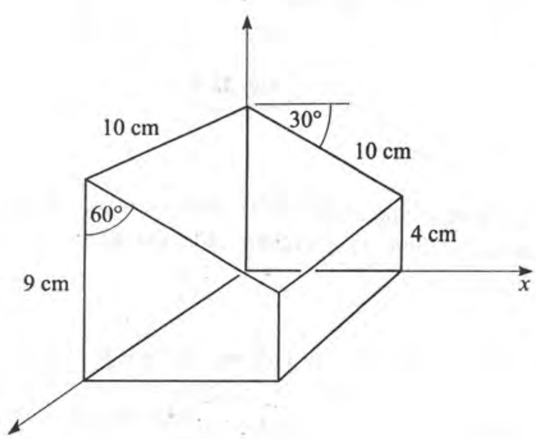


Fig. 32-8

32.16 Un solenoide de 60 cm de longitud tiene 5000 vueltas y está enrollado en una barra de hierro de 0.75 cm de radio. Encuéntrese el flujo a través del solenoide cuando pasa una corriente de 3.0 A. La permeabilidad relativa del hierro es de 300. *Resp.* 1.7 m/Wb

32.17 Una habitación tiene las paredes exactamente alineadas respecto al norte, sur, este y oeste. La pared norte tiene un área de 15 m^2, la pared este tiene un área de 12 m^2 y el área del piso es de 35 m^2. La habitación está situada en un lugar de la Tierra donde el campo magnético tiene un valor de 0.60 G y se encuentra dirigido a 50° bajo la horizontal y 7.0° al noreste. Determínese el flujo a través de la pared norte, de la pared este y del piso. *Resp.* 0.57 mWb, 56 μWb, 1.6 mWb

32.18 El flujo a través del solenoide del problema 32.16 se reduce a un valor de 1.0 mWb en un tiempo de 0.050 s. Determine la fem inducida en el solenoide. *Resp.* 67 V

32.19 Una bobina plana con radio de 8.0 mm tiene 50 vueltas de alambre. Se coloca en un campo magnético $B = 0.30$ T, de tal manera que pase a través de ella el máximo flujo. Más tarde, se hace girar hasta una posición tal que no exista flujo a través de ella, en 0.020 s. Encuentre la fem promedio inducida entre las terminales de la bobina. *Resp.* 0.15 V

32.20 La bobina cuadrada que se muestra en la Fig. 32-9 es de 20 cm por lado y tiene 15 vueltas de alambre. Se mueve hacia la derecha a 3.0 m/s. Determínese la fem inducida (magnitud y dirección) en ella *a*) en el instante mostrado y *b*) cuando la bobina está completamente en la región del campo. El campo magnético es de 0.40 T hacia adentro de la página. *Resp.* *a*) 3.6 V en sentido contrario a las manecillas del reloj; *b*) cero

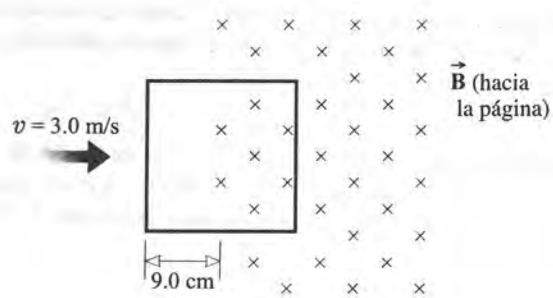


Fig. 32-9

32.21 El imán de la Fig. 32-10 gira, como se muestra, sobre un pivote a través de su centro. En el instante que se muestra, ¿en qué dirección fluye la corriente inducida *a*) en el resistor *AB* y *b*) en el resistor *CD*? *Resp.* *a*) de *B* a *A*; *b*) de *C* a *D*

32.22 Un tren se mueve directamente hacia el sur con una rapidez de 10 m/s. Si la componente vertical hacia abajo del campo magnético de la Tierra es de 0.54 G, calcúlese la magnitud y la dirección de la fem inducida en el eje de 1.2 m de largo de un vagón. *Resp.* 0.65 mV del oeste hacia el este

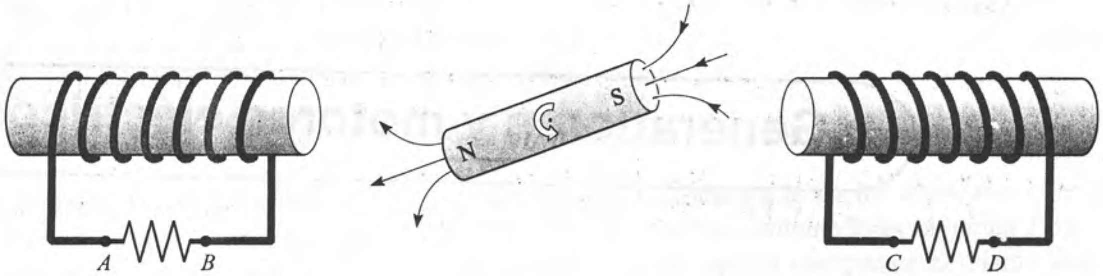


Fig. 32-10

32.23 Un disco de cobre de 10 cm de radio está rotando a 20 rev/s alrededor de su eje y su plano es perpendicular a un campo magnético con $B = 0.60$ T. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre el centro y el perímetro del disco? (*Sugerencia*: tiene similitud con el problema 32.12.) *Resp.* 0.38 V

32.24 ¿Cuánta carga fluirá a través de un galvanómetro de 200 Ω conectado a una bobina circular de 400 Ω y 1000 vueltas enredadas en un palo de madera de 2.0 cm de diámetro, si un campo magnético $B = 0.0113$ T paralelo al eje del palo disminuye súbitamente hasta cero? *Resp.* 5.9 μC

32.25 En la Fig. 32-6 descrita en el problema 32.11, ¿cuál es la aceleración de la varilla cuando su rapidez de bajada en el plano inclinado es v? *Resp.* $g \text{ sen } \theta - (B^2L^2v/Rm) \cos^2 \theta$

capítulo 33

Generadores y motores eléctricos

LOS GENERADORES ELÉCTRICOS son máquinas que convierten la energía mecánica en energía eléctrica. En la Fig. 33-1*a* se muestra un generador simple que produce un voltaje ca. Una fuente de energía externa (como un motor diesel o una turbina de vapor) hace girar a la armadura dentro de un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$. Los alambres de la bobina cortan a las líneas de campo, e inducen una fem

$$\mathscr{E} = 2\pi NABf \cos 2\pi ft$$

entre las terminales de la bobina. En esta relación, N es el número de espiras (cada una con un área A) en la bobina y f es la frecuencia con la que gira. La Fig. 33-1*b* muestra la gráfica de una fem.

A medida que el generador induce una corriente, los alambres de la bobina experimentan una fuerza retardadora debido a la interacción entre la corriente y el campo. El trabajo que se requiere para hacer girar la bobina es la fuente de energía eléctrica que suministra el generador. Para un generador

(energía mecánica consumida) = (energía eléctrica aprovechada) + (fricción y pérdidas por calentamiento)

Generalmente las pérdidas son sólo una pequeña fracción de la energía consumida.

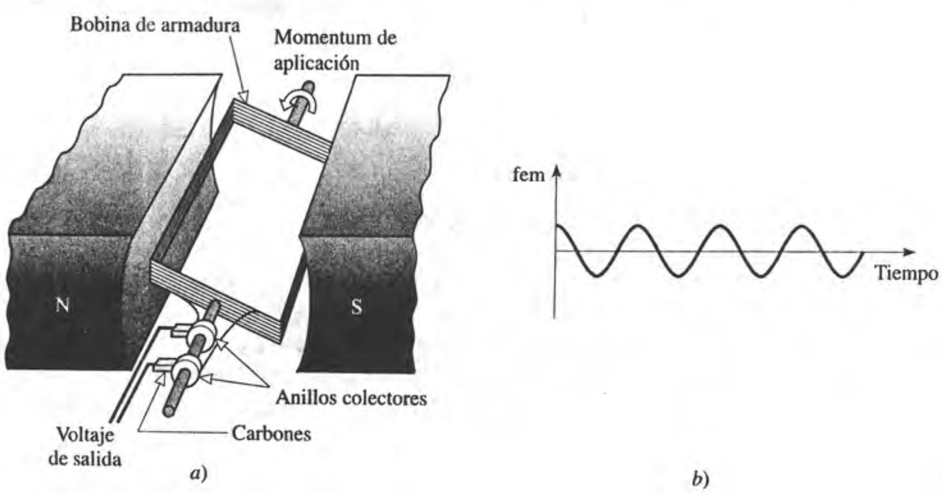


Fig. 33-1

LOS MOTORES ELÉCTRICOS convierten la energía eléctrica en energía mecánica. En la Fig. 33-2 se muestra un motor simple cd (esto es, uno que trabaja a voltaje constante). La corriente que pasa por la armadura interacciona con el campo magnético y produce una torca

$$\tau = NIAB \text{ sen } \theta$$

sobre la bobina (vease el capítulo 30), la cual hace girar a la bobina y a la flecha. Aquí, θ es el ángulo entre las líneas de campo y la normal al plano de la bobina. Los anillos-conmutadores invierten I cada vez que sen θ cambia de signo, asegurando que la torca haga girar a la bobina siempre en el mismo sentido. Para estos motores,

$$\text{Torca promedio} = (\text{constante})\ |NIAB|$$

Ya que la armadura del motor al girar actúa como un generador, se induce en la bobina una *fem de retorno* (u *opuesta*, también llamada fuerza contraelectromotriz). La contra fem se opone al voltaje de la fuente que impulsa al motor. Entonces, la diferencia de potencial que fuerza a la corriente a través de la armadura es

$$\text{d.p. neta a través de la armadura} = (\text{voltaje de la línea}) - (\text{contra fem})$$

y

$$\text{Corriente en la armadura} = \frac{(\text{línea de voltaje}) - (\text{contra fem})}{\text{resistencia de la armadura}}$$

La potencia mecánica P producida dentro de la armadura de un motor es

$$\text{P} = (\text{corriente en la armadura})(\text{contra fem})$$

La potencia mecánica útil cedida por el motor es ligeramente menor, debido a la fricción, a la resistencia del viento y al desgaste del hierro.

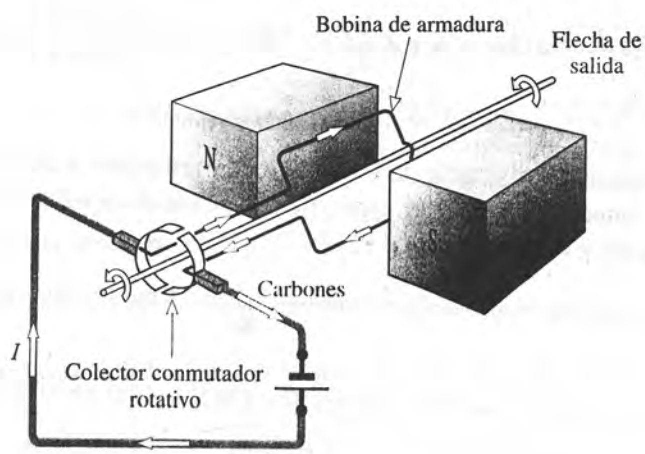


Fig. 33-2

PROBLEMAS RESUELTOS

GENERADORES ELÉCTRICOS

33.1 Un generador ca produce un voltaje de salida $\mathscr{E} = 170$ sen $377t$ V, donde t está en segundos. ¿Cuál es la frecuencia del voltaje ca?

La gráfica de una curva senoidal como función del tiempo no difiere en mucho de una curva cosenoidal, excepto por la posición en $t = 0$. Como $\mathscr{E} = 2\pi NABf \cos 2\pi ft$, tendremos que $377t = 2\pi ft$, de donde se encuentra que la frecuencia es $f = 60$ Hz.

33.2 ¿Qué tan rápido debe girar una bobina de 1000 espiras (cada una de 20 cm² en el área) en el campo magnético de la Tierra (0.70 G) para generar un voltaje que tenga un valor máximo (esto es, una amplitud) de 0.50 V?

Se supone que el eje de la bobina está orientado en el campo de tal forma que da variaciones de flujo máximos cuando gira. Entonces $B = 7.0 \times 10^{-5}$ T en la siguiente expresión

$$\mathscr{E} = 2\pi NABf \cos 2\pi ft$$

Como el valor máximo de cos $2\pi ft$ es la unidad, la amplitud del voltaje es $2\pi NABf$. Por consiguiente,

$$f = \frac{0.50\ \text{V}}{2\pi NAB} = \frac{0.50\ \text{V}}{(2\pi)(1000)(20 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)(7.0 \times 10^{-5}\ \text{T})} = 0.57\ \text{kHz}$$

33.3 Cuando gira a 1500 rev/min, un generador produce 100.0 V. ¿Cuál debe ser su rapidez angular si tiene que producir 120.0 V?

Como la amplitud de la fem es proporcional a la rapidez angular (o frecuencia) f, se tendrán f_1 y f_2 para cada rapidez,

$$\frac{\mathscr{E}_1}{\mathscr{E}_2} = \frac{f_1}{f_2} \quad \text{o bien} \quad f_2 = f_1 \frac{\mathscr{E}_2}{\mathscr{E}_1} = (1500\ \text{rev/min})\left(\frac{120.0\ \text{V}}{100.0\ \text{V}}\right) = 1800\ \text{rev/min}$$

33.4 Un generador tiene una resistencia de 0.080 Ω en la armadura y desarrolla una fem inducida de 120 V cuando se impulsa a la rapidez especificada. ¿Cuál es el voltaje entre las terminales cuando la corriente inducida es de 50.0 A?

El generador actúa como una batería con una fem = 120 V y una resistencia interna $r = 0.080\ \Omega$. Así como en la batería,

$$\text{d.p. en las terminales} = (\text{fem}) - Ir = 120\ \text{V} - (50.0\ \text{A})(0.080\ \Omega) = 116\ \text{V}$$

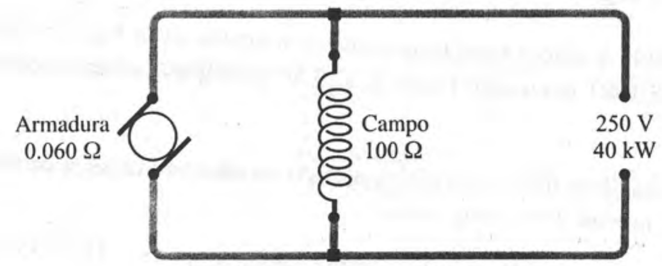


Fig. 33-3

33.5 Un *generador de derivación* utiliza electroimanes en lugar de imanes permanentes, donde el campo de las bobinas del electroimán está activado por un voltaje inducido. La bobina del magneto se encuentra en paralelo con la bobina de la armadura (en derivación con la armadura). Como se muestra en la Fig. 33-3, un generador en derivación tiene en su armadura una resistencia de 0.060 Ω y una resistencia de derivación de 100 Ω. ¿Qué potencia se desarrolla en la armadura cuando entrega a un circuito externo 40 kW a 250 V?

De $P = VI$,

$$\text{Corriente al circuito externo} = I_x = \frac{P}{V} = \frac{40\,000\ \text{W}}{250\ \text{V}} = 160\ \text{A}$$

$$\text{Corriente de campo} = I_f = \frac{V_f}{r_f} = \frac{250\ \text{V}}{100\ \Omega} = 2.5\ \text{A}$$

$$\text{Corriente en la armadura} = I_a = I_x + I_f = 162.5\ \text{A}$$

$$\text{Fem total inducida} = |\mathscr{E}| = (250\ \text{V} + I_a r_a\ \text{caída en armadura})$$

$$= 250\ \text{V} + (162.5\ \text{A})(0.06\ \Omega) = 260\ \text{V}$$

$$\text{Potencia en la armadura} = I_a|\mathscr{E}| = (162.5\ \text{A})(260\ \text{V}) = 42\ \text{kW}$$

Método alterno

$$\text{Potencia perdida en la armadura} = I_a^2 r_a = (162.5\ \text{A})^2\,(0.06\ \Omega) = 1.6\ \text{kW}$$

$$\text{Potencia perdida en el campo} = I_f^2 r_f = (2.5\ \text{A})^2\,(100\ \Omega) = 0.6\ \text{kW}$$

Potencia desarrollada = (potencia entregada) + (potencia perdida en la armadura) + (potencia perdida en el campo)

$$= 40\ \text{kW} + 1.6\ \text{kW} + 0.6\ \text{kW} = 42\ \text{kW}$$

MOTORES ELÉCTRICOS

33.6 La resistencia de la armadura del motor que se muestra en la Fig. 33-2 es de 2.30 Ω. Éste consume una corriente de 1.60 A cuando opera a 120 V. ¿Cuál es la fuerza contraelectromotriz bajo estas circunstancias?

El motor actúa como una contra fem conectada en serie con la caída de potencial IR entre las terminales de su resistencia interna. Por consiguiente,

$$\text{Voltaje de la línea} = \text{contra fem} + Ir$$

o bien

$$\text{Contra fem} = 120\ \text{V} - (1.60\ \text{A})(2.30\ \Omega) = 116\ \text{V}$$

33.7 Un motor de 0.250 hp (como el que se muestra en la Fig. 33-2) tiene una resistencia de 0.500 Ω. *a*) ¿Cuánta corriente puede consumir con 110 V cuando su salida es de 0.250 hp? *b*) ¿Cuál es su contra fem?

a) Suponga que el motor tiene una eficiencia del 100% de tal forma que la potencia aportada sea igual a la potencia VI aprovechada (0.250 hp). Entonces

$$(110\ \text{V})(I) = (0.250\ \text{hp})(746\ \text{W/hp}) \qquad \text{o bien} \qquad I = 1.695\ \text{A}$$

b) $$\text{Contra fem} = (\text{voltaje de la línea}) - Ir = 110\ \text{V} - (1.695\ \text{A})(0.500\ \Omega) = 109\ \text{V}$$

33.8 En un *motor de derivación*, el imán permanente es reemplazado por un electroimán, el cual se activa con una bobina de campo que deriva la armadura. El motor de derivación que se ve en la Fig. 33-4 tiene una resistencia en la armadura de 0.050 Ω y está conectado a una línea de 120 V. *a*) ¿Cuál es la corriente en la armadura en el arranque, esto es, antes de que la fuente desarrolle una contra fem? *b*) ¿Cuál será la resistencia R de arranque de un reóstato conectado en serie con la armadura que limitará la 60 A corriente de arranque? *c*) Sin resistencia de arranque, ¿cuál es la contra fem que se genera cuando la corriente en la armadura es de 20 A? *d*) Si esta máquina estuviera operando como un generador, ¿cuál sería la fem total inducida desarrollada por la armadura cuando ésta entrega 20 A a 120 V a la derivación de campo y al circuito externo?

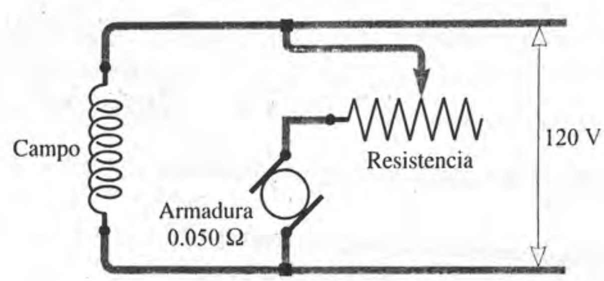


Fig. 33-4

a) $$\text{Corriente en la armadura} = \frac{\text{valor impreso}}{\text{resistencia de la armadura}} = \frac{120\ \text{V}}{0.050\ \Omega} = 2.4\ \text{kA}$$

b) $$\text{Corriente en la armadura} = \frac{\text{voltaje impreso}}{0.050\ \Omega + R} \quad \text{o bien} \quad 60\ \text{A} = \frac{120\ \text{V}}{0.050\ \Omega + R}$$

de donde $R = 2.0\ \Omega$.

c) $$\text{Contra fem} = (\text{voltaje aplicado}) - (\text{caída de voltaje en la resistencia de la armadura})$$
$$= 120\ \text{V} - (20\ \text{A})(0.050\ \Omega) = 119\ \text{V} = 0.12\ \text{kV}$$

d) $$\text{Fem inducida} = (\text{voltaje en las terminales}) + (\text{caída de voltaje en la resistencia de la armadura})$$
$$= 120\ \text{V} + (20\ \text{A})(0.050\ \Omega) = 121\ \text{V} = 0.12\ \text{kV}$$

33.9 El motor en derivación mostrado en la Fig. 33-5 tiene una resistencia en la armadura de 0.25 Ω y una resistencia de campo de 150 Ω. Se conecta a la línea principal de 120 V y genera una fem de retardo de 115 V. Calcular: *a*) la corriente de la armadura I_a, de campo I_c y la corriente total I_t que consume el motor; *b*) la potencia total que consume el motor; *c*) la potencia perdida en forma de calor en la armadura y los circuitos de campo; *d*) la eficiencia eléctrica de la máquina (cuando sólo se consideran pérdidas por calor en la armadura y en los circuitos de campo).

a) $$I_a = \frac{(\text{voltaje impreso}) - (\text{contra fem})}{\text{resistencia de la armadura}} = \frac{(120 - 115)}{0.25\ \Omega} = 20\ \text{A}$$

$$I_c = \frac{\text{voltaje impreso}}{\text{resistencia de campo}} = \frac{120\ \text{V}}{150\ \Omega} = 0.80\ \text{A}$$

$$I_t = I_a + I_c = 20.80\ \text{A} = 21\ \text{A}$$

b) $$\text{Potencia aportada} = (120\ \text{V})(20.80\ \text{A}) = 2.5\ \text{kW}$$

c) $$I_a^2 r_a \text{ perdida en la armadura} = (20\ \text{A})^2(0.25\ \Omega) = 0.10\ \text{kW}$$

$$I_c^2 r_c \text{ perdida en el campo} = (0.80\ \text{A})^2(150\ \Omega) = 96\ \text{W}$$

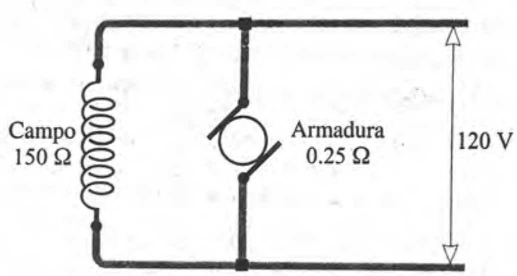


Fig. 33-5

d) Potencia aprovechada = (potencia aportada) − (pérdidas en la potencia) = 2496 − (100 + 96) = 2.3 kW

Alternativamente:

$$\text{Potencia aprovechada} = (\text{corriente en la armadura})(\text{contra fem}) = (20\ \text{A})(115\ \text{V}) = 2.3\ \text{kW}$$

Entonces

$$\text{Eficiencia} = \frac{\text{potencia de salida}}{\text{potencia de entrada}} = \frac{2300\ \text{W}}{2496\ \text{W}} = 0.921 = 92\%$$

33.10 Un motor tiene una contra fem de 110 V y una corriente de armadura de 90 A cuando opera a 1500 rpm. Determine la potencia y la torca desarrollada dentro de la armadura.

$$\text{Potencia} = (\text{corriente en la armadura})(\text{contra fem}) = (90\ \text{A})(110\ \text{V}) = 9.9\ \text{kW}$$

Del capítulo 10, potencia = $\tau\omega$:

$$\text{Torca} = \frac{\text{potencia}}{\text{rapidez angular}} = \frac{9900\ \text{W}}{(2\pi \times 25)\ \text{rad/s}} = 63\ \text{N}\cdot\text{m}$$

33.11 La armadura de un motor origina una torca de 100 N · m cuando consume 40 A de la línea. Encuentre la torca desarrollada si la corriente se incrementa a 70 A y la intensidad de campo magnético se reduce a un 80% de su valor inicial.

La torca desarrollada por la armadura de un motor es proporcional a la corriente en la armadura y a la intensidad del campo (ver capítulo 30):

$$\text{Torca} = (100\ \text{N}\cdot\text{m})\left(\frac{70}{40}\right)(0.80) = 0.14\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

GENERADORES ELÉCTRICOS

33.12 Determine los efectos separados sobre la fem inducida de un generador si *a*) el flujo en cada polo se duplica y *b*) la rapidez de la armadura se duplica. *Resp.* *a*) se duplica; *b*) se duplica

33.13 La fem inducida en la armadura de un generador en derivación es 596 V. La resistencia de la armadura es de 0.100 Ω. *a*) Calcule el voltaje en las terminales cuando la corriente en la armadura es 460 A. *b*) Si la resistencia de campo equivale a 110 Ω, determine la corriente de campo, la potencia y la corriente entregada al circuito externo. *Resp.* *a*) 550 V; *b*) 5 A, 455 A, 250 kW

33.14 Un dínamo (generador) entrega 30.0 A a 120 V a un circuito externo cuando opera a 1200 rpm. ¿Cuál es la torca que se requiere para impulsar el generador a esta rapidez si las pérdidas totales en la potencia son de 400 W? *Resp.* 31.8 N · m

33.15 Un generador en derivación de 75.0 kW y 230 V tiene una fem generadora de 243.5 V. Si la corriente de campo está especificada a 12.5 A, ¿cuál es la resistencia de la armadura? *Resp.* 0.039 9 Ω

33.16 Un generador de 120 V es impulsado por un molino de viento que cuenta con unas aspas de 2.0 m de largo. El viento, que se mueve 12 m/s, disminuye a 7.0 m/s después de pasar por el molino de viento. La densidad del aire es de 1.29 kg/m^3. Si el sistema no tiene pérdida, ¿cuál es la corriente más grande que puede producir el generador? (*Sugerencia:* ¿cuánta energía por segundo pierde el viento?) *Resp.* 77 A

MOTORES ELÉCTRICOS

33.17 Un generador tiene una armadura con 500 espiras, la cual corta un flujo de 8.00 mWb en cada rotación. Calcular la fem de retardo que desarrolla cuando trabaja como un motor a 1500 rpm. *Resp.* 100 V

33.18 La longitud activa de cada conductor de la armadura de un motor es de 30 cm, y los conductores están en un campo de 0.40 Wb/m^2. Cada conductor fluye una corriente de 15 A. Determine la fuerza que actúa sobre cada conductor. *Resp.* 1.8 N

33.19 Un motor de derivación con una resistencia en la armadura de 0.080 Ω está conectado a la línea principal de 120 V. Con 50 A de corriente en la armadura, ¿cuáles son la contra fem y la potencia mecánica desarrollada dentro de la armadura? *Resp.* 0.12 kV, 5.8 kW

33.20 Un motor en derivación se halla conectado a una línea de 110 V. Cuando la armadura genera una contra fem de 104 V, la corriente en la armadura es de 15 A. Calcule la resistencia de la armadura. *Resp.* 0.40 Ω

33.21 Un dínamo en derivación tiene una resistencia de armadura de 0.120 Ω. *a*) Si se conecta a una línea de 220 V y opera como un motor, ¿cuál es la fem (de retardo) inducida cuando la corriente en la armadura es de 50.0 A? *b*) Si esta máquina opera como un generador, ¿cuál es la fem inducida cuando la armadura entrega 50.0 A a 220 V al campo en derivación y al circuito externo? *Resp.* *a*) 214 V; *b*) 226 V

33.22 Un motor en derivación tiene una rapidez de 900 rpm cuando se conecta a una línea de 120 V y entrega 12 hp. Las pérdidas totales son 1048 W. Calcule la potencia aportada, la corriente de la línea y la torca en el motor. *Resp.* 10 kW, 83 A, 93 N · m

33.23 Un motor en derivación cuenta con una resistencia de armadura de 0.20 Ω y una resistencia de campo de 150 Ω; además consume 30 A cuando se conecta a una línea de alimentación de 120 V. Determine la corriente de campo, la corriente en la armadura, la fem de retardo, la potencia mecánica desarrollada dentro de la armadura y la eficiencia eléctrica de la máquina. *Resp.* 0.80 A, 29 A, 0.11 kV, 3.3 kW, 93%

33.24 Un motor en derivación desarrolla una torca de 80 N · m cuando la densidad de flujo en la abertura de aire equivale a 1.0 Wb/m^2 y la corriente en la armadura es de 15 A. ¿Cuál es la torca cuando la densidad de flujo es de 1.3 Wb/m^2 y la corriente en la armadura es de 18 A? *Resp.* 0.13 kN · m

33.25 Un motor en derivación tiene una resistencia de campo de 200 Ω y una resistencia de armadura de 0.50 Ω y está conectado a una línea de 120 V. El motor consume una corriente de 4.6 A cuando opera a su rapidez máxima. ¿Qué corriente se consumirá si la rapidez del motor se reduce al 90% de la rapidez máxima al aplicarle una carga? *Resp.* 28 A

capítulo 34

Inductancia; constantes de tiempo *R-C* y *R-L*

AUTOINDUCTANCIA: Una bobina puede inducir una fem en sí misma. Si la corriente en una bobina cambia, el flujo a través de ella, debido a la corriente, también se modifica. Así, como resultado del cambio de la corriente en la bobina se induce una fem en la misma bobina.

Ya que la fem inducida $\mathscr{E}$ es proporcional a $\Delta\Phi_M/\Delta t$ y puesto que $\Delta\Phi_M$ también es proporcional a Δi, donde i es la corriente que produce el flujo,

$$\mathscr{E} = -(\text{constante})\frac{\Delta i}{\Delta t}$$

Donde i es la corriente a través de la misma bobina en la cual $\mathscr{E}$ es inducida. (Se denotará con i en lugar de I a la corriente que varía con el tiempo.) El signo negativo indica que la fem $\mathscr{E}$ autoinducida es una fem contra $\mathscr{E}$ que se opone al cambio de la corriente.

La constante de proporcionalidad depende de la geometría de la bobina. Se representará por L y se denominará *autoinductancia* de la bobina. Entonces

$$\mathscr{E} = -L\frac{\Delta i}{\Delta t}$$

Para $\mathscr{E}$ en V, i en A y t en s, L está en *henrios* (H).

INDUCTANCIA MUTUA: Cuando el flujo de una bobina penetra a través de una segunda bobina, se puede inducir una fem en cada una por el efecto de la otra. La bobina que tiene la fuente de potencia se llama *bobina primaria.* La otra bobina en la cual se induce la fem debido al cambio de corriente en la primaria se conoce como *bobina secundaria.* La fem inducida en la secundaria $\mathscr{E}_s$ es proporcional a la rapidez de cambio de la corriente en la primaria, $\Delta i_p/\Delta t$:

$$\mathscr{E}_s = M\frac{\Delta i_p}{\Delta t}$$

donde M es *inductancia mutua* del sistema de dos bobinas.

ENERGÍA ALMACENADA EN UN INDUCTOR: Ya que se autoinduce una contra fem, debe desarrollarse un trabajo para incrementar la corriente a través del inductor desde cero hasta I. La energía suministrada a la bobina en el proceso se almacena en ella y puede recuperarse cuando la corriente disminuye nuevamente a cero. Si una corriente I fluye en un inductor de autoinductacia L, entonces la energía almacenada en él es

$$\text{Energía almacenada} = \tfrac{1}{2} LI^2$$

Para L en H e I en A, la energía está en J.

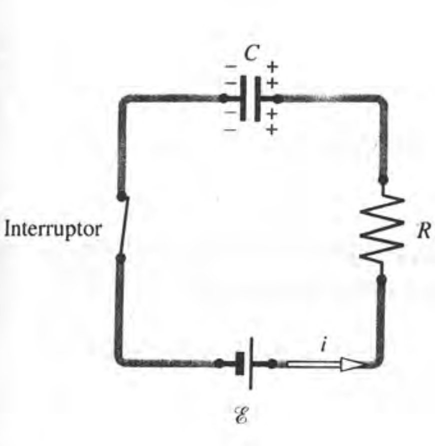
CONSTANTE DE TIEMPO *R-C*: Considérese el circuito R-C que se ve en la Fig. 34-1*a*. El capacitor está descargado inicialmente. Si el interruptor se cierra, la corriente i en el circuito y la carga q en el capacitor varía como se muestra en la Fig. 34-1*b*. Si se llama υ_c a la d.p. en el capacitor, y se expresa la ecuación para la malla de este circuito, se obtiene:

$$-iR - \upsilon_c + \mathscr{E} = 0 \quad \text{o bien} \quad i = \frac{\mathscr{E} - \upsilon_c}{R}$$

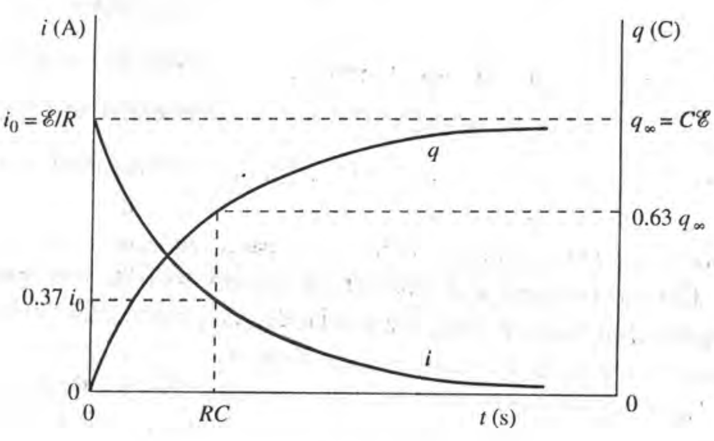
En el primer instante después de que se cerró el interruptor, $\upsilon_c = 0$ e $i = \mathscr{E}/R$. A medida que pasa el tiempo, υ_c se incrementa mientras que i disminuye. El tiempo, en segundos, que toma a la corriente en caer hasta $1/2.718$ o 0.368 de su valor inicial es RC, y se le llama *constante de tiempo* del circuito R-C.

También se muestra en la Fig. 34-1*b* la variación con el tiempo de la carga q, la carga en el capacitor. Para $t = RC$, q ha alcanzado 0.632 de su valor final.

Cuando un capacitor C cargado con una carga inicial q_0 se descarga a través de un resistor R, la corriente de descarga sigue la curva del capacitor cuando es cargado. La carga q en el capacitor sigue una curva similar a la de la corriente cuando el capacitor se carga. Al tiempo RC, $i = 0.368 i_0$ y $q = 0.368 q_0$ durante la descarga.



a)



b)

Fig. 34-1

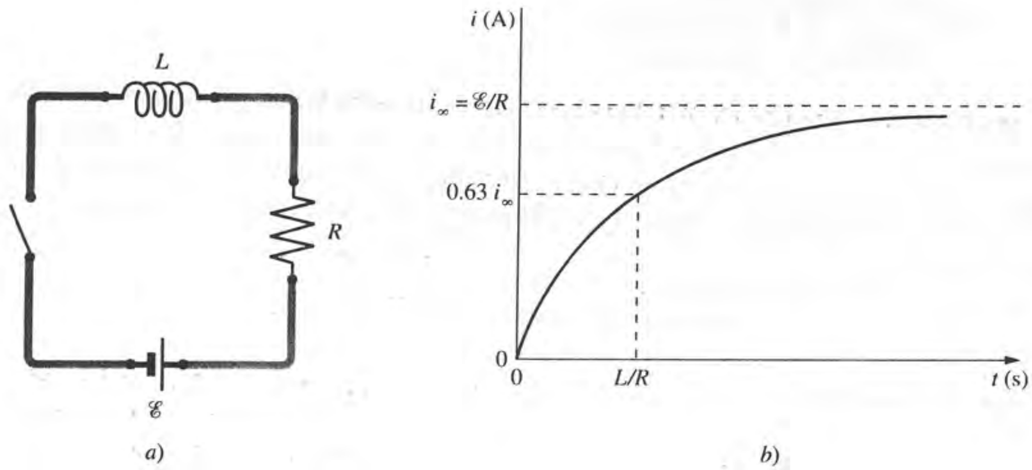


Fig. 34-2

CONSTANTE DE TIEMPO *R-L*: Considérese el circuito de la Fig. 34-2*a*. El símbolo representa una bobina de autoinductancia de L henrios. Cuando el interruptor en el circuito está cerrado, la corriente se eleva como se muestra en la Fig. 34-2*b*. La corriente no salta a su valor final porque el cambio de flujo a través de la bobina induce una contra fem en la misma bobina, la cual se opone a la elevación de la corriente. Después de transcurridos L/R segundos, la corriente se ha elevado a 0.632 de su valor final i_∞. Esta vez $t = L/R$ se llama *constante de tiempo R-L* del circuito. Luego de un tiempo prolongado, la corriente cambia tan lentamente que la contra fem en el inductor, $L(\Delta i/\Delta t)$, es despreciable. Entonces, $i = i_\infty = \mathscr{E}/R$.

LAS FUNCIONES EXPONENCIALES se utilizan en la siguiente forma para describir las curvas de las Figs. 34-1 y 34-2:

$i = i_0\, e^{-t/RC}$	carga y descarga de capacitor
$q = q_\infty(1 - e^{-t/RC})$	carga de capacitor
$q = q_\infty\, e^{-t/RC}$	descarga de capacitor
$i = i_\infty(1 - e^{-t/(L/R)})$	formación de la corriente inductora

donde $e = 2.718$ es la base de los logaritmos naturales.

Cuando t es igual a la constante de tiempo, las relaciones para el capacitor dan: $i = 0.368 i_0$; $q = 0.632 q_\infty$, para la carga; y $q = 0.368 q_\infty$ para la descarga. La ecuación para la corriente en el inductor daría $i = 0.632 i_\infty$ cuando t sea igual a la constante de tiempo.

La ecuación para i en el circuito con capacitor (así como para q en el caso de la descarga del capacitor) tiene la siguiente propiedad: después de que han pasado n constantes de tiempo,

$$i = i_0(0.368)^n \qquad \text{y} \qquad q = q_\infty(0.368)^n$$

Por ejemplo, después de que han pasado cuatro constantes de tiempo,

$$i = i_0(0.368)^4 = 0.018\,3 i_0$$

PROBLEMAS RESUELTOS

34.1 Una corriente constante de 2 A en una bobina de 400 vueltas causa un flujo de 10^{-4} Wb para ligar (pasar a través de) las espiras de la bobina. Calcúlese *a*) la contra fem promedio inducida en la bobina si la corriente se interrumpe en 0.08 s, *b*) la inductancia de la bobina y *c*) la energía almacenada en la bobina.

a)
$$|\mathscr{E}| = N\left|\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta t}\right| = 400\,\frac{(10^{-4}-0)\text{ Wb}}{0.08\text{ s}} = 0.5\text{ V}$$

b)
$$|\mathscr{E}| = L\left|\frac{\Delta i}{\Delta t}\right| \quad \text{o bien} \quad L = \left|\frac{\mathscr{E}\Delta t}{\Delta i}\right| = \frac{(0.5\text{ V})(0.08\text{ s})}{(2-0)\text{ A}} = 0.02\text{ H}$$

c)
$$\text{Energía} = \tfrac{1}{2}LI^2 = \tfrac{1}{2}(0.02\text{ H})(2\text{ A})^2 = 0.04\text{ J}$$

34.2 Un solenoide largo con núcleo de aire tiene un área en su sección transversal A y N vueltas de alambre en su longitud d. *a*) Encuéntrese su autoinductancia. *b*) ¿Cuál es su inductancia si la permeabilidad del material de su núcleo es μ?

a) Se puede escribir

$$|\mathscr{E}| = N\left|\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta t}\right| \quad \text{y} \quad |\mathscr{E}| = L\left|\frac{\Delta i}{\Delta t}\right|$$

Igualando estas dos expresiones para $|\mathscr{E}|$ se obtiene

$$L = N\left|\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta i}\right|$$

Si la corriente varía de cero a I, entonces el flujo cambia de cero a Φ_M. Por lo tanto, $\Delta i = I$ y $\Delta\Phi_M = \Phi_M$ en este caso. La autoinductancia, considerada como una constante para todos los casos, es

$$L = N\frac{\Phi_M}{I} = N\frac{BA}{1}$$

Pero, para un solenoide de núcleo de aire, $B = \mu_0 nI = \mu_0(N/d)I$. Al sustituir da: $L = \mu_0 N^2 A/d$.

b) Si el material del núcleo tiene una permeabilidad μ en lugar de μ_0 entonces B, y por lo tanto L, se incrementarán por un factor μ/μ_0. En este caso, $L = \mu N^2 A/d$. Un solenoide con núcleo de hierro tiene una autoinductancia mucho mayor que la que tiene un solenoide con núcleo de aire.

34.3 Un solenoide de 30 cm de longitud está fabricado con 2000 vueltas de alambre que rodea una barra de hierro con un área en su sección transversal de 1.5 cm². Si la permeabilidad relativa del hierro es de 600, ¿cuál es la autoinductancia del solenoide? ¿Qué fem promedio se induce en el solenoide cuando la corriente en él disminuye de 0.60 A a 0.10 A en un tiempo de 0.030 s?

Del problema 34.2*b*, con $k_M = \mu/\mu_0$,

$$L = \frac{k_m \mu_0 N^2 A}{d} = \frac{(600)(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A})(2000)^2(1.5 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^2})}{0.30\ \mathrm{m}} = 1.51\ \mathrm{H}$$

y

$$|\mathscr{E}| = L\left|\frac{\Delta i}{\Delta t}\right| = (1.51\ \mathrm{H})\frac{0.50\ \mathrm{A}}{0.030\ \mathrm{s}} = 25\ \mathrm{V}$$

34.4 En cierto instante, una bobina con resistencia de 0.40 Ω y una autoinductancia de 200 mH porta una corriente de 0.30 A, la cual se incrementa a razón de 0.50 A/s. *a*) ¿Qué diferencia de potencial existe a través de la bobina en ese instante? *b*) Repítase si la corriente decrece a razón de 0.50 A/s.

Se puede representar una bobina por una resistencia en serie con una fem (la fem inducida), tal como se muestra en la Fig. 34-3.

a) Debido a que la corriente aumenta, $\mathscr{E}$ se opone a la corriente y, por lo tanto, tiene la polaridad que se muestra. Es posible escribir la ecuación de la malla para el circuito:

$$V_{ba} - iR - \mathscr{E} = 0$$

Donde V_{ba} es el voltaje a través de la bobina y, siendo $\mathscr{E} = L|\Delta i/\Delta t|$, se tiene que:

$$V_{\text{bobina}} = iR + \mathscr{E} = (0.30\ \mathrm{A})(0.40\ \Omega) + (0.200\ \mathrm{H})(0.50\ \mathrm{A/s}) = 0.22\ \mathrm{V}$$

b) Cuando i disminuye, la fem inducida debe invertirse en la Fig. 34-3. Esto da: $V_{\text{bobina}} = iR - \mathscr{E} = 0.020$ V.

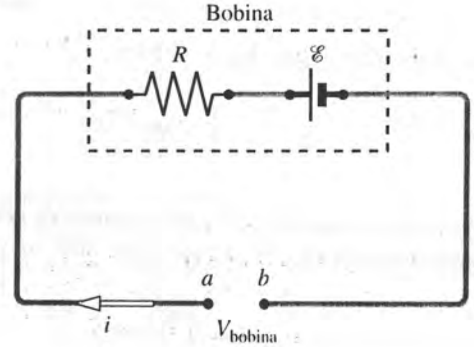


Fig. 34-3

34.5 Una bobina de resistencia 15 Ω y autoinductancia 0.60 H se conecta a una fuente de poder estacionaria de 120 V. ¿Con qué rapidez se elevará la corriente en la bobina *a*) en el momento en que la bobina se conecta a la fuente de poder, y *b*) en el instante en que la corriente alcanza 80% de su valor máximo?

El voltaje motriz efectivo en el circuito son los 120 V de la fuente de poder o de alimentación menos la contra fem inducida, $L(\Delta i/\Delta t)$. Esto debe ser igual a la c.p. a través de la resistencia de la bobina:

$$120\,\text{V} - L\frac{\Delta i}{\Delta t} = iR$$

(Esta misma ecuación se puede obtener escribiendo la ecuación de la malla para el circuito de la Fig. 34-2*a*. Cuando se utilice este procedimiento recuerde que la inductancia actúa como una contra fem de valor $L\,\Delta i/\Delta t$.)

a) En el primer instante, i es esencialmente cero. Entonces

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{120\,\text{V}}{L} = \frac{120\,\text{V}}{0.60\,\text{H}} = 0.20\,\text{mA/s}$$

b) La corriente encuentra su máximo valor de $(120\text{ V})/R$ cuando la corriente finalmente no cambia (es decir, cuando $\Delta i/\Delta t = 0$). En este caso

$$i = (0.80)\left(\frac{120\,\text{V}}{R}\right)$$

Al sustituir este valor para i en la ecuación de la malla da

$$120\,\text{V} - L\frac{\Delta i}{\Delta t} = (0.80)\left(\frac{120\,\text{V}}{R}\right)R$$

de donde

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{(0.20)(120\,\text{V})}{L} = \frac{(0.20)(120\,\text{V})}{0.60\,\text{H}} = 40\,\text{A/s}$$

34.6 Cuando la corriente en una bobina cambia a una rapidez de 3.0 A/s, se encuentra que en otra bobina cercana se induce una fem de 7.0 mV. ¿Cuál es la inducción mutua de la combinación?

$$\mathscr{E}_s = M\frac{\Delta i_p}{\Delta t} \quad \text{o bien} \quad M = \mathscr{E}_s\frac{\Delta t}{\Delta i_p} = (7.0\times 10^{-3}\,\text{V})\frac{1.0\,\text{s}}{3.0\,\text{A}} = 2.3\,\text{mH}$$

34.7 Los devanados de dos bobinas están sobre una misma varilla de hierro, así que el flujo generado por una pasa también por la otra. La bobina o devanado primario tiene vueltas N_p y, cuando fluye una corriente de 2.0 A a través de ella, el flujo es de 2.5×10^{-4} Wb. Determínese la inductancia mutua de las bobinas si la bobina secundaria tiene N_s vueltas.

$$|\mathscr{E}_s| = N_s\left|\frac{\Delta\Phi_{Ms}}{\Delta t}\right| \quad \text{y} \quad |\mathscr{E}_s| = M\left|\frac{\Delta i_p}{\Delta t}\right|$$

se obtiene

$$M = N_s\left|\frac{\Delta\Phi_{Ms}}{\Delta i_p}\right| = N_s\frac{(2.5\times 10^{-4} - 0)\,\text{Wb}}{(2.0-0)\,\text{A}} = (1.3\times 10^{-4}\,N_s)\,\text{H}$$

34.8 Un solenoide de 2000 vueltas está devanado uniformente en una varilla de hierro con longitud d y una sección transversal A. La permeabilidad relativa del hierro es k_M. En la parte superior de éste está enrollada una bobina de 50 vueltas, la cual se utiliza como secundaria. Encuéntrese la inductancia mutua del sistema.

El flujo a través del solenoide es:

$$\Phi_M = BA = (k_M \mu_0 n I_p)A = (k_M \mu_0 I_p A)\left(\frac{2000}{d}\right)$$

Este mismo flujo va a través de la bobina secundaria. De este modo,

$$|\mathscr{E}_s| = N_s \left|\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta t}\right| \quad \text{y} \quad |\mathscr{E}_s| = M\left|\frac{\Delta i_p}{\Delta t}\right|$$

de donde

$$M = N_s\left|\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta i_p}\right| = N_s \frac{\Phi_M - 0}{I_p - 0} = 50\,\frac{k_M \mu_0 I_p A(2000/d)}{I_p} = \frac{10 \times 10^4\, k_M \mu_0 A}{d}$$

34.9 Cierto circuito en serie consta de una batería de 12 V, un interruptor, un resistor de 1.0 MΩ y un capacitor de 2.0 μF, inicialmente descargado. Si el interruptor se cierra, determínese *a*) la corriente inicial en el circuito, *b*) el tiempo para que la corriente caiga hasta 0.37 de su valor inicial, *c*) la carga del condensador en ese instante y *d*) la carga final del condensador.

a) Al aplicar la regla de la malla al circuito de la Fig. 34-1*a* para cualquier instante se tiene

$$12\text{ V} - iR - v_c = 0$$

donde v_c es la d.p. a través del capacitor. En el primer instante, q es esencialmente cero y de este modo $v_c = 0$. Entonces

$$12\text{ V} - iR - 0 = 0 \quad \text{o bien} \quad i = \frac{12\text{ V}}{1.0 \times 10^6\ \Omega} = 12\ \mu\text{A}$$

b) La corriente cae hasta 0.37 de su valor inicial cuando

$$t = RC = (1.0 \times 10^6\ \Omega)(2.0 \times 10^{-6}\text{ F}) = 2.0\text{ s}$$

c) Para $t = 2.0$ s la carga en el capacitor se ha incrementado hasta 0.63 de su valor final. [Véase *d*) abajo.]

d) La carga deja de aumentar cuando $i = 0$ y $v_c = 12$ V. Por lo tanto,

$$q_{\text{final}} = Cv_c = (2.0 \times 10^{-6}\text{ F})(12\text{ V}) = 24\ \mu\text{C}$$

34.10 Un capacitor de 5.0 μF se carga a un potencial de 20 kV. Después de que es desconectada la fuente de poder (o de alimentación), se conecta a través de un resistor de 7.0 MΩ para descargarlo. ¿Cuál es la corriente inicial que descarga y cuánto tiempo tarda el voltaje del capacitor en disminuir al 37% de los 20 kV?

La ecuación de la malla para la descarga de un capacitor es

$$\upsilon_c - iR = 0$$

donde υ_c es la d.p. a través del capacitor. En el primer instante, $\upsilon_c = 20$ kV, así que

$$i = \frac{\upsilon_c}{R} = \frac{20 \times 10^3 \text{ V}}{7.0 \times 10^6 \, \Omega} = 2.9 \text{ mA}$$

La caída de potencial del capacitor, así como la carga en él, se reducirán al 0.37 de su valor inicial en una constante de tiempo. El tiempo requerido es

$$RC = (7.0 \times 10^6 \, \Omega)(5.0 \times 10^{-6} \text{ F}) = 35 \text{ s}$$

34.11 Una bobina tiene una inductancia de 1.5 H y una resistencia de 0.60 Ω. Si la bobina se conecta repentinamente a una batería de 12 V, encuéntrese el tiempo requerido para que la corriente se eleve hasta 0.63 de su valor final. ¿Cuál será la corriente final a través de la bobina?

El tiempo requerido es una constante de tiempo del circuito:

$$\text{Constante de tiempo} = \frac{L}{R} = \frac{1.5 \text{ H}}{0.60 \, \Omega} = 2.5 \text{ s}$$

Después de un tiempo muy grande, la corriente será constante, así que no existirá contra fem en la bobina. En estas condiciones,

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{12 \text{ V}}{0.60 \, \Omega} = 20 \text{ A}$$

34.12 Un capacitor que ha sido cargado a un potencial de 2.0×10^5 V se descarga a través de un resistor. ¿Cuál será el voltaje a través del capacitor después de cinco constantes de tiempo?

Se sabe que después de n constantes de tiempo, $q = q_\infty(0.368)^n$. Ya que υ es proporcional a q (es decir, $\upsilon = q/C$), se puede escribir

$$\upsilon_{n=5} = (2.0 \times 10^5 \text{ V})(0.368)^5 = 1.4 \text{ kV}$$

34.13 Un capacitor de 2.0 μF se carga a través de un resistor de 30 MΩ por una batería de 45 V. Encuéntrese *a*) la carga en el capacitor y *b*) la corriente a través del resistor, ambos después de 83 s de haberse iniciado el proceso de carga.

La constante de tiempo del circuito es $RC = 60$ s. Por otro lado,

$$q_\infty = V_\infty C = (45\text{ V})(2.0\times 10^{-6}\text{ F}) = 9.0\times 10^{-5}\text{ C}$$

a)
$$q = q_\infty(1 - e^{-t/RC}) = (9.0\times 10^{-5}\text{ C})(1 - e^{-83/60})$$

Pero

$$e^{-83/60} = e^{-1.383} = 0.25$$

(Se pueden realizar estos cálculos en cualquier calculadora científica.) Entonces al sustituir se obtiene

$$q = (9.0\times 10^{-5}\text{ C})(1 - 0.25) = 67\ \mu\text{C}$$

b)
$$i = i_0 e^{-t/RC} = \left(\frac{45\text{ V}}{30\times 10^6\ \Omega}\right)(e^{-1.383}) = 0.38\ \mu\text{A}$$

34.14 Si en la Fig. 34-2 $R = 20\ \Omega$, $L = 0.30$ H y $\mathscr{E} = 90$ V, ¿cuál será la corriente en el circuito después de 0.050 s de haber cerrado el interruptor?

La constante de tiempo en este circuito es $L/R = 0.015$ s, e $i_\infty = \mathscr{E}/R = 4.5$ A. Entonces

$$i = i_\infty(1 - e^{-t/(L/R)}) = (4.5\text{ A})(1 - e^{-3.33}) = (4.5\text{ A})(1 - 0.035\,7) = 4.3\text{ A}$$

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

34.15 Una fem de 8.0 V se induce en una bobina cuando la corriente en ella se cambia a razón de 32 A/s. Calcúlese la inductancia de la bobina. *Resp.* 0.25 H

34.16 Una corriente constante de 2.5 A genera un flujo de 1.4×10^{-4} Wb en una bobina de 500 vueltas. ¿Cuál es la inductancia de la bobina? *Resp.* 28 mH

34.17 La inductancia mutua entre el primario y el secundario de un transformador es de 0.30 H. Calcúlese la fem inducida en la bobina secundaria cuando la corriente en la primaria cambia a razón de 4.0 A/s. *Resp.* 1.2 V

34.18 Una bobina de inductancia 0.20 H y resistencia de 1.0 Ω se conecta a una fuente de 90 V. ¿Con qué rapidez aumentará la corriente en la bobina *a*) en el instante en que la bobina se conecta a la fuente *b*) y en el instante en que la corriente alcanza dos terceras partes de su valor máximo? *Resp.* *a*) 0.45 kA/s; *b*) 0.15 kA/s

34.19 Dos bobinas vecinas, A y B, tienen 300 y 600 vueltas, respectivamente. Una corriente de 1.5 A en A origina que 1.2×10^{-4} Wb pasen por A, y 0.90×10^{-4} Wb pasen a través de B. Determínese *a*) la autoinductancia de A, *b*) la inductancia mutua de A y B y *c*) la fem promedio inducida en B cuando la corriente en A es interrumpida en 0.20 s. *Resp.* *a*) 24 mH; *b*) 36 mH; *c*) 0.27 V

34.20 Una bobina de 0.48 H lleva una corriente de 5 A. Calcúlese la energía almacenada en ella. *Resp.* 6 J

34.21 El núcleo de hierro de un solenoide tiene 40 cm de longitud y una sección transversal de 5.0 cm^2 y se ha devanado con 10 vueltas de alambre por centímetro de longitud. Calcúlese la inductancia del solenoide, suponiendo que la permeabilidad relativa del hierro es constante a 500. *Resp.* 0.13 H

34.22 Demuestre que: *a*) $1\ \text{N/A}^2 = 1\ \text{T} \cdot \text{m/A} = 1\ \text{Wb/A} \cdot \text{m} = 1\ \text{H/m}$, y *b*) $1\ \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2 = 1\ \text{F/m}$.

34.23 Un circuito en serie que consta de un capacitor de 2.0 μF inicialmente descargado y de una resistencia de 10 MΩ se conecta a través de una fuente de 100 V. ¿Cuál es la corriente en el circuito y cuál es la carga en el capacitor *a*) después de una constante de tiempo, y *b*) cuando el capacitor tiene el 90% de la carga final? *Resp.* *a*) 3.7 μA, 0.13 mC; *b*) 1.0 μA, 0.18 mC

34.24 Un capacitor cargado se conecta a través de un resistor de 10 kΩ y está en posibilidad de descargarse. La diferencia de potencial en el capacitor cae hasta 0.37 de su valor original después de un tiempo de 7.0 s. ¿Cuál es la capacitancia del capacitor? *Resp.* 0.70 mF

34.25 Cuando un largo solenoide de núcleo de hierro se conecta a través de una batería de 6 V, la corriente se eleva a 0.63 de su valor máximo después de un tiempo de 0.75 s. Más tarde se repite el experimento sin el núcleo de hierro. Ahora, el tiempo requerido para alcanzar 0.63 del máximo es de 0.002 5 s. Calcúlese *a*) la permeabilidad relativa del hierro y *b*) L para el solenoide de núcleo de aire, si la corriente máxima es de 0.5 A. *Resp.* *a*) 0.3×10^3; *b*) 0.03 H

34.26 ¿Qué fracción de la corriente inicial está fluyendo en el circuito de la Fig. 34-1 siete constantes de tiempo después de haber cerrado el interruptor? *Resp.* 0.000 91

34.27 ¿En qué fracción difiere la corriente en la Fig. 34-2 de i_∞ a tres constantes de tiempo después de haber cerrado el interruptor? *Resp.* $(i_\infty - i)/i_\infty = 0.050$

34.28 En la Fig. 34-2, $R = 5.0\ \Omega$, $L = 0.40$ H y $\mathscr{E} = 20$ V. Encuéntrese la corriente en el circuito 0.20 s después de que el interruptor se cierra. *Resp.* 3.7 A

34.29 El capacitor en la Fig. 34-1 está inicialmente descargado cuando el interruptor se cierra. Determínese la corriente en el circuito y la carga en el condensador cinco segundos más tarde. Utilícese $R = 7.00$ MΩ, C = 0.300 μF y $\mathscr{E} = 12.0$ V. *Resp.* 159 nA, 3.27 μC

capítulo 35

Corriente alterna

LA FEM GENERADA POR UNA BOBINA EN ROTACIÓN en un campo magnético tiene una gráfica similar a la que se muestra en la Fig. 35-1. A esta fem se le da el nombre de *voltaje ca* debido a que se tiene una inversión de la polaridad (es decir, el voltaje cambia de signo); los voltajes de ca no necesariamente son sinusoidales. Si la bobina gira con una frecuencia de f revoluciones por segundo, entonces la fem tiene una frecuencia de f en hertz (ciclos por segundo). El voltaje υ que se genera instantáneamente tiene la forma

$$\upsilon = \upsilon_0 \text{ sen } \omega t = \upsilon_0 \text{ sen } 2\pi f t$$

donde υ_0 es la amplitud (valor máximo) del voltaje en volts, $\omega = 2\pi f$ es la velocidad angular en rad/s y f es la frecuencia en hertz. La frecuencia f del voltaje está relacionada con su periodo T por

$$T = \frac{1}{f}$$

donde T se encuentra en segundos.

Las bobinas giratorias no son la única fuente de voltaje ca; los dispositivos electrónicos que generan voltajes ca son muy comunes. Los voltajes alternos producen corrientes alternas.

Una corriente alterna tiene una gráfica muy parecida a la del voltaje que se ve en la Fig. 35-1. Su valor instantáneo es i, y su amplitud i_0. Con frecuencia la corriente y el voltaje no alcanzan su valor máximo al mismo tiempo, aunque ambos tengan idéntica frecuencia.

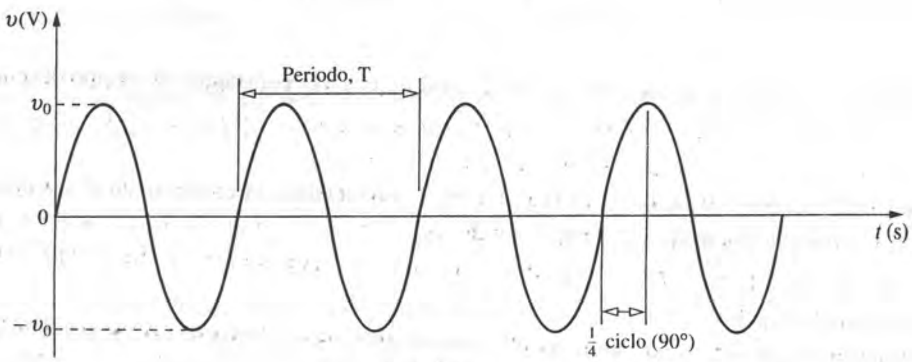


Fig. 35-1

LOS MEDIDORES que se utilizan para tomar lecturas en los circuitos ca miden el valor *efectivo*, o la *raíz cuadrática media* (rcm) de la corriente y del voltaje. Estos valores son siempre positivos y están relacionados con la amplitud de los valores sinusoidales instantáneos, a través de

$$V = V_{\text{rcm}} = \frac{v_0}{\sqrt{2}} = 0.707\, v_0$$

$$I = I_{\text{rcm}} = \frac{i_0}{\sqrt{2}} = 0.707\, i_0$$

Se acostumbra representar las lecturas de los medidores con letras mayúsculas (V, I), mientras que para representar los valores instantáneos se utilizan letras minúsculas (v, i).

EL CALOR GENERADO O LA POTENCIA DISIPADA por una corriente I rcm en una resistencia R está dado por I^2R.

FORMAS DE LA LEY DE OHM: Suponga que una corriente senoidal de frecuencia f y cuyo valor rcm es I fluye a través de una resistencia R, o de un inductor L, o de un capacitor C. Entonces un voltímetro ca, conectado a través de los elementos anteriores, leerá un voltaje rcm V como sigue:

Resistencia: $V = IR$

Inductor: $V = IX_L$

donde $X_L = 2\pi fL$ se le llama *reactancia inductiva.* Sus unidades son los ohms cuando L está en henrios y f en hertz.

Capacitor: $V = IX_C$

donde a $X_C = 1/2\pi fC$ se le llama *reactancia capacitiva.* Sus unidades son ohms cuando C está en farads.

FASE: Cuando un voltaje ca se aplica a una resistencia, el voltaje a través de la resistencia y la corriente que pasa por ella alcanzan sus valores máximos en el mismo instante y su valor cero, también, en el mismo instante; se dice que el voltaje y la corriente están *en fase.*

Cuando un voltaje ca se aplica a una inductancia, el voltaje a través de la inductancia alcanza su valor máximo un cuarto de ciclo adelante de la corriente, es decir, cuando la corriente es cero. La contra fem de la inductancia ocasiona que la corriente se retrase respecto al voltaje un cuarto de ciclo (o 90°), y los dos estarán *fuera de fase* en 90°.

Cuando un voltaje ca se aplica a un capacitor, el voltaje a través de él se retrasa 90° respecto a la corriente que fluye a través del capacitor. La corriente debe fluir antes de que el voltaje, a través del capacitor, se eleve (es decir, de que empiece a cargarse el capacitor).

En situaciones más complicadas en las que se tiene combinaciones de R, L y C, el voltaje y la corriente normalmente están en fase (aunque no siempre). El ángulo con el cual el voltaje se atrasa o adelanta a la corriente se llama *ángulo de fase.*

LA IMPEDANCIA (Z) en un circuito formado por resistencias, inductancias y capacitores conectados en serie está dada por

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

con Z en ohms. Si un voltaje V se aplica a un circuito en serie de este tipo, entonces una forma de la Ley de Ohm que relaciona V con la corriente I a través de él es

$$V = IZ$$

El ángulo de fase ϕ entre V e I está dado por

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} \quad \text{o} \quad \cos\phi = \frac{R}{Z}$$

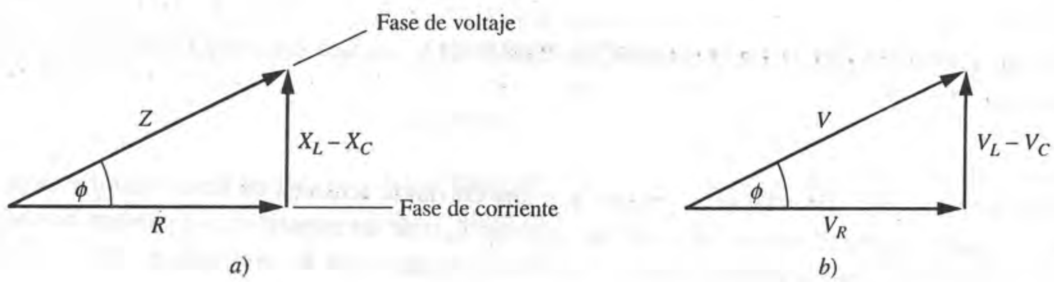


Fig. 35-2

LAS REPRESENTACIONES VECTORIALES en un circuito en serie R-L-C son posibles ya que las anteriores expresiones para la impedancia se pueden relacionar por medio del teorema de Pitágoras para un triángulo rectángulo. Como se muestra en la Fig. 35-2*a*, Z es la hipotenusa del triángulo rectángulo, mientras que R y $(X_L - X_C)$ son los dos lados. El ángulo denotado por ϕ es el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje.

Se aplica una relación similar a los voltajes a través de cada elemento en un circuito en serie. Como se muestra en la Fig. 35-2*b*, esto es

$$V^2 = V_R^2 + (V_L - V_C)^2$$

Como resultado, la lectura en el voltímetro a través de un circuito en serie no es igual a la suma de las lecturas de voltaje individuales de cada elemento. En vez de ello se deben utilizar las relaciones anteriores.

LA RESONANCIA en un circuito en serie R-L-C se presenta cuando $X_L = X_C$. Bajo estas condiciones $Z = R$ es mínima, entonces I es un máximo para un valor dado de V. Igualando X_L a X_C, encontramos para la *frecuencia de resonancia* (o *natural*) del circuito

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

PÉRDIDA DE POTENCIA: Suponga que se aplica un voltaje ca V a través de una impedancia de algún tipo. Esto da origen a una corriente I a través de la impedancia, y el ángulo de fase entre V e I es ϕ. La pérdida de potencia en la impedancia está dada por

$$\text{Pérdida de potencia} = VI \cos \phi$$

La cantidad $\cos \phi$ se llama *factor de potencia.* Para una resistencia su valor es la unidad, pero es cero para un inductor o un capacitor (no hay pérdidas de potencia en los inductores o en los capacitores).

UN TRANSFORMADOR es un dispositivo para elevar o bajar el voltaje en un circuito ca. Está constituido por dos bobinas, una llamada primaria y la otra secundaria, enrolladas sobre el mismo núcleo de hierro. Una corriente alterna en una bobina genera un flujo magnético en el núcleo el cual cambia continuamente. Estos cambios en el flujo inducen una fem en la otra bobina.

En un transformador, normalmente la eficiencia es muy alta. Entonces, por lo general se pueden *despreciar las pérdidas* y escribir

$$\text{Potencia en el primario} = \text{potencia en el secundario}$$
$$V_1 I_1 = V_2 I_2$$

La razón de los voltajes es igual a la razón del número de vueltas; la razón de las corrientes es igual al inverso de la razón del número de vueltas:

$$V^2 = V_R^2 + (V_L - V_C)^2$$

PROBLEMAS RESUELTOS

35.1 En un voltímetro ordinario la lectura de un voltaje ca senoidal de 60.0 Hz es de 120 V. *a)* ¿Cuál es el valor máximo que puede alcanzar el voltaje en un ciclo? *b)* ¿Cuál es la ecuación que describe al voltaje?

a) $$V = \frac{\upsilon_0}{\sqrt{2}} \quad \text{o} \quad \upsilon_0 = \sqrt{2}V = \sqrt{2}(120\text{ V}) = 170\text{ V}$$

b) $$\upsilon = \upsilon_0 \operatorname{sen} 2\pi f t = (170\text{ V}) \operatorname{sen} 120\pi t$$

donde t está en s.

35.2 Un voltaje $\upsilon = (60.0\text{ V}) \operatorname{sen} 120\pi t$ se aplica a una resistencia de 20.0 Ω. ¿Cuál será la lectura en un amperímetro de ca conectado en serie con la resistencia?

El voltaje rcm a través de la resistencia es

$$V = 0.707\,\upsilon_0 = (0.707)(60.0\ \text{V}) = 42.4\ \text{V}$$

Entonces

$$I = \frac{V}{R} = \frac{42.4\ \text{V}}{20.0\ \Omega} = 2.12\ \text{A}$$

35.3 Una fuente de voltaje ca a 120 V se conecta a las terminales de un capacitor de 2.0 μF. Encontrar la corriente que entra al capacitor si la frecuencia de la fuente es *a*) 60 Hz, *b*) 60 kHz. *c*) ¿Cuál es la pérdida de potencia en el capacitor?

a)
$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi(60\ \text{s}^{-1})(2.0\times10^{-6}\ \text{F})} = 1.33\ \text{k}\Omega$$

Entonces

$$I = \frac{V}{X_C} = \frac{120\ \text{V}}{1330\ \Omega} = 0.090\ \text{A}$$

b) Ahora $X_C = 1.33\ \Omega$, entonces $I = 90$ A. Note que la impedancia del capacitor varía inversamente con la frecuencia.

c)
$$\text{Pérdida de potencia} = VI\cos\phi = VI\cos 90° = 0$$

35.4 Una fuente de voltaje ca a 120 V se conecta a las terminales de un inductor de 0.700 H. Calcule la corriente que pasa por el inductor si la frecuencia de la fuente es *a*) 60.0 Hz, *b*) 60.0 kHz. *c*) ¿Cuál es la pérdida de potencia en el inductor?

a)
$$X_L = 2\pi f L = 2\pi(60.0\ \text{s}^{-1})(0.700\ \text{H}) = 264\ \Omega$$

Entonces

$$I = \frac{V}{X_L} = \frac{120\ \text{V}}{264\ \Omega} = 0.455\ \text{A}$$

b) Ahora $X_L = 264 \times 10^3\ \Omega$, de tal forma $I = 0.455 \times 10^{-3}$ A. Adviértase que el efecto de impedancia de un inductor varía directamente con la frecuencia.

c)
$$\text{Pérdida de potencia} = VI\cos\phi = VI\cos 90° = 0$$

35.5 Una bobina que tiene una inductancia de 0.14 H y una resistencia de 12 Ω se conecta de sus terminales a una línea de 110 V, y 25 Hz. Calcule *a*) la corriente en la bobina, *b*) el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje suministrado, *c*) el factor de potencia y *d*) la pérdida de potencia en la bobina.

a)
$$X_L = 2\pi fL = 2\pi(25)(0.14) = 22.0\ \Omega$$

y

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(12)^2 + (22-0)^2} = 25.1\ \Omega$$

así

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{110\ \text{V}}{25.1\ \Omega} = 4.4\ \text{A}$$

b)
$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{22-0}{12} = 1.83 \quad \text{o} \quad \phi = 61.3°$$

El voltaje se adelanta a la corriente en 61°.

c)
$$\text{Factor de potencia} = \cos\phi = \cos 61.3° = 0.48$$

d)
$$\text{Pérdida de potencia} = VI\cos\phi = (110\ \text{V})(4.4\ \text{A})(0.48) = 0.23\ \text{kW}$$

O, como las pérdidas de potencia ocurren debido a la resistencia de la bobina,

$$\text{Pérdidas de potencia} = I^2R = (4.4\ \text{A})^2(12\ \Omega) = 0.23\ \text{kW}$$

35.6 Un capacitor está en serie con una resistencia de 30 Ω y se conecta a una línea de ca de 220 V. La reactancia del capacitor es de 40 Ω. Determine *a*) la corriente en el circuito, *b*) el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje aplicado y *c*) la pérdida de potencia en el circuito.

a)
$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(30)^2 + (0-40)^2} = 50\ \Omega$$

entonces

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{220\ \text{V}}{50\ \Omega} = 4.4\ \text{A}$$

b)
$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{0-40}{30} = -1.33 \quad \text{o} \quad \phi = -53°$$

El signo menos indica que el voltaje se retrasa con respecto a la corriente en 53°. El ángulo ϕ en la Fig. 35-2 estará abajo del eje horizontal.

c) **Método 1**

$$\text{Pérdida de potencia} = VI\cos\phi = (220)(4.4)\cos(-53°) = (220)(4.4)\cos 53° = 0.58\ \text{kW}$$

Método 2

Como la pérdida de potencia ocurre sólo en la resistencia, y no en el capacitor,

$$\text{Pérdida de potencia} = I^2R = (4.4\ \text{A})^2(30\ \Omega) = 0.58\ \text{kW}$$

35.7 Un circuito en serie consiste en una resistencia no inductiva de 100 Ω, en una bobina de 0.10 H de inductancia y resistencia despreciable y en un capacitor de 20 μF. Las terminales del circuito se conectan a una fuente de alimentación de 110 V y 60 Hz. Calcule *a*) la corriente, *b*) la pérdida de potencia, *c*) el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje de la fuente y *d*) la lectura de voltaje a través de los tres elementos.

a) Para todo el circuito, $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$, con

$$R = 100\ \Omega$$

$$X_L = 2\pi f L = 2\pi(60\ \text{s}^{-1})(0.10\ \text{H}) = 37.7\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi(60\,\text{s}^{-1})(20\times10^{-6}\ \text{F})} = 132.7\ \Omega$$

de donde

$$Z = \sqrt{(100)^2 + (38-133)^2} = 138\ \Omega \quad \text{y} \quad I = \frac{V}{Z} = \frac{110\ \text{V}}{138\ \Omega} = 0.79\ \text{A}$$

b) Toda la pérdida de la potencia se localiza en la resistencia, entonces

$$\text{Pérdida de potencia} = I^2R = (0.79\ \text{A})^2(100\ \Omega) = 63\ \text{W}$$

c)
$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{-95\ \Omega}{100\ \Omega} = -0.95 \quad \text{o} \quad \phi = -44°$$

El voltaje se atrasa respecto a la corriente.

d)
$$V_R = IR = (0.79\ \text{A})(100\ \Omega) = 79\ \text{V}$$

$$V_C = IX_C = (0.79\ \text{A})(132.7\ \Omega) = 0.11\ \text{kV}$$

$$V_L = IX_L = (0.79\ \text{A})(37.7\ \Omega) = 30\ \text{V}$$

Note que $V_C + V_L + V_R$ no iguala al voltaje de la fuente. De la Fig. 35-2*b*, la relación correcta es

$$V = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2} = \sqrt{(79)^2 + (-75)^2} = 109\ \text{V}$$

que dentro del error de redondeo coincide con el voltaje de la fuente.

35.8 Una resistencia de 5.00 Ω se conecta en serie con una inductancia de 0.200 H y un capacitor de 40.0 nF. Las terminales de la combinación se conectan a una fuente de alimentación de 30.0 V y 1780 Hz. Encontrar *a*) la corriente en el circuito, *b*) el ángulo de fase entre el voltaje de la fuente y la corriente, *c*) la pérdida de potencia en el circuito y *d*) la lectura de voltaje a través de cada elemento del circuito.

a)
$$X_L = 2\pi f L = 2\pi(1780\ \text{s}^{-1})(0.200\ \text{H}) = 2.24\ \text{k}\Omega$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi(1780\,\mathrm{s}^{-1})(4.00\times10^{-8}\,\mathrm{F})} = 2.24\,\mathrm{k\Omega}$$

y

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R = 5.00\,\Omega$$

Entonces

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{30.0\,\mathrm{V}}{5.00\,\Omega} = 6.00\,\mathrm{A}$$

b)
$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = 0 \quad \text{o} \quad \phi = 0°$$

c)
$$\text{Pérdida de potencia} = VI\cos\phi = (30.0\,\mathrm{V})(6.00\,\mathrm{A})(1) = 180\,\mathrm{W}$$

o bien

$$\text{Pérdida de potencia} = I^2R = (6.00\,\mathrm{A})^2(5.00\,\Omega) = 180\,\mathrm{W}$$

d)
$$V_R = IR = (6.00\,\mathrm{A})(5.00\,\Omega) = 30.00\,\mathrm{V}$$

$$V_C = IX_C = (6.00\,\mathrm{A})(2240\,\Omega) = 13.4\,\mathrm{kV}$$

$$V_L = IX_L = (6.00\,\mathrm{A})(2240\,\Omega) = 13.4\,\mathrm{kV}$$

El circuito se encuentra en resonancia porque $X_C = X_L$. Note la magnitud del voltaje a través del inductor y del capacitor, a pesar de que el voltaje es bajo en la fuente de alimentación.

35.9 Como se muestra en la Fig. 35-3, las terminales de un circuito en serie que se conectan a una línea de 200 V, 60 Hz, consiste en un capacitor con una reactancia capacitiva de 30 Ω, una resistencia no inductiva de 44 Ω y una bobina con una reactancia inductiva de 90 Ω la cual tiene una resistencia de 36 Ω. Determine *a*) la corriente en el circuito, *b*) la diferencia de potencial a través de cada elemento, *c*) el factor de potencia del circuito y *d*) la potencia absorbida por el circuito.

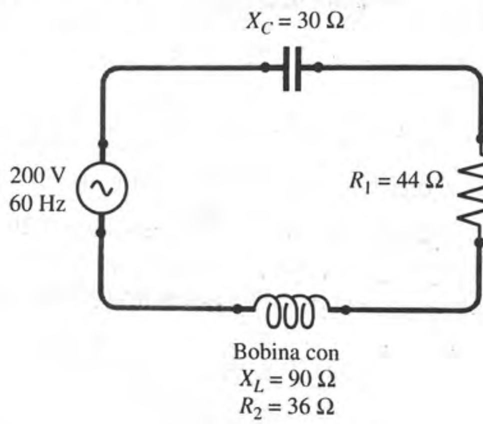


Fig. 35-3

a)
$$Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(44+36)^2 + (90-30)^2} = 0.10\ \text{k}\Omega$$

de modo que

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{200\ \text{V}}{100\ \Omega} = 2.0\ \text{A}$$

b)
$$\text{d.p. a través del capacitor} = IX_C = (2.0\ \text{A})(30\ \Omega) = 60\ \text{V}$$

$$\text{d.p. a través de la resistencia} = IR_1 = (2.0\ \text{A})(44\ \Omega) = 88\ \text{V}$$

$$\text{Impedancia de la bobina} = \sqrt{R_2^2 + X_L^2} = \sqrt{(36)^2 + (90)^2} = 97\ \Omega$$

$$\text{d.p. a través de la bobina} = (2.0\ \text{A})(97\ \Omega) = 0.19\ \text{kV}$$

c)
$$\text{Factor de potencia} = \cos\phi = \frac{R}{Z} = \frac{80}{100} = 0.80$$

d)
$$\text{Potencia absorbida} = VI\cos\phi = (200\ \text{V})(2\ \text{A})(0.80) = 0.32\ \text{kW}$$

o bien

$$\text{Potencia absorbida} = I^2R = (2\ \text{A})^2(80\ \Omega) = 0.32\ \text{kW}$$

35.10 Calcule la frecuencia de resonancia del circuito despreciable que consta de una inductancia de 40.0 mH y de un capacitor de 600 pF.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(40.0\times10^{-3}\ \text{H})(600\times10^{-12}\ \text{F})}} = 32.5\ \text{kHz}$$

35.11 Un transformador elevador se utiliza en una línea de 120 V para aumentar el voltaje a 1800 V. El primario tiene 100 vueltas. ¿Cuántas vueltas hay en el secundario?

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad \text{o} \quad \frac{120\ \text{V}}{1800\ \text{V}} = \frac{100\ \text{vueltas}}{N_2}$$

de donde $N_2 = 1.50 \times 10^3$ vueltas.

35.12 Un transformador utilizado en una línea de 120 V suministra 2.0 A a 900 V. ¿Qué corriente se extrae de la línea? Suponga una eficiencia del 100%.

$$\text{Potencia en el primario} = \text{potencia en el secundario}$$

$$I_1(120\ \text{V}) = (2.0\ \text{A})(900\ \text{V})$$

$$I_1 = 15\ \text{A}$$

35.13 Un transformador reductor opera en una línea de 2.5 kV y alimenta a una carga con 80 A. La razón del enrollado del primario al enrollado del secundario es 20 : 1. Suponga una eficiencia del 100%, determine el voltaje V_2 del secundario, la corriente I_1 del primario y la potencia aprovechada P_2.

$$V_2 = \left(\frac{1}{20}\right)V_1 = 0.13\,\text{kV} \quad I_1 = \left(\frac{1}{20}\right)I_2 = 4.0\,\text{A} \quad P_2 = V_2 I_2 = 10\,\text{kW}$$

La última expresión se considera correcta solamente si se supone que la carga es una resistencia, de tal forma que el factor de potencia sea la unidad.

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

35.14 La lectura en un voltímetro es de 80.0 V cuando éste se conecta a las terminales de una fuente de alimentación sinusoidal con $f = 1000$ Hz. Escribir la ecuación del voltaje instantáneo suministrado por la fuente. *Resp.* $v = (113\text{ V})$ sen $2000\pi t$ para t en segundos

35.15 Una corriente ca en una resistencia de 10 Ω produce calor a razón de 360 W. Determine los valores efectivos de la corriente y del voltaje. *Resp.* 6.0 A, 60 V

35.16 Las terminales de una resistencia de 40.0 Ω se conectan a un generador de funciones de 15.0 V. Calcule la corriente a través de la resistencia cuando la frecuencia es *a*) 100 Hz, *b*) 100 kHz. *Resp.* *a*) 0.375 A; *b*) 0.375 A

35.17 Solucione el problema 35.16 si la resistencia de 40.0 Ω se reemplaza por un inductor de 2.00 mH. *Resp.* *a*) 11.9 A; *b*) 11.9 mA

35.18 Resuelva el problema 35.16 si la resistencia de 40.0 Ω se reemplaza por un capacitor de 0.300 μF. *Resp.* *a*) 2.83 mA; *b*) 2.83 A

35.19 Una bobina tiene una resistencia de 20 Ω y una inductancia de 0.35 H. Calcule la reactancia y la impedancia para una corriente alterna con una frecuencia de 25 ciclos/s. *Resp.* 55 Ω, 59 Ω

35.20 Una corriente de 30 mA entra a un capacitor de 4.0 μF cuyas terminales se conectan a una línea de corriente alterna que tiene una frecuencia de 500 Hz. Calcule la reactancia del capacitor y el voltaje a través de sus terminales. *Resp.* 80 Ω, 2.4 V

35.21 Una bobina tiene una inductancia de 0.100 H y una resistencia de 12.0 Ω. Ésta se conecta a una línea de 110 V y 60.0 Hz. Determine *a*) la reactancia de la bobina, *b*) la impedancia de la bobina, *c*) la corriente que pasa por la bobina, *d*) el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje de la fuente de alimentación, *e*) el factor de potencia del circuito y *f*) la lectura en un wattímetro conectado al circuito. *Resp.* *a*) 37.7 Ω; *b*) 39.6 Ω; *c*) 2.78 A; *d*) el voltaje se adelanta a la corriente en 72.3°; *e*) 0.303; *f*) 92.6 W

35.22 Un capacitor de 10.0 μF está conectado en serie con una resistencia de 40.0 Ω y la combinación se conecta a una línea de 110 V y 60.0 Hz. Calcule *a*) la reactancia capacitiva, *b*) la impedancia del circuito, *c*) la corriente en el circuito, *d*) el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje de la fuente; y *e*) el factor de potencia para el circuito. *Resp.* *a*) 266 Ω; *b*) 269 Ω; *c*) 0.409 A; *d*) el voltaje se retrasa en 81.4°; *e*) 0.149

35.23 Un circuito en serie que consta de una resistencia, una inductancia y una capacitancia está conectado a una línea ca de 110 V. Para el circuito, $R = 9.0\ \Omega$, $X_L = 28\ \Omega$ y $X_C = 16\ \Omega$. Calcule *a*) la impedancia del circuito, *b*) la corriente, *c*) el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje de la fuente y *d*) el factor de potencia del circuito. *Resp.* *a*) 15 Ω; *b*) 7.3 A; *c*) el voltaje se adelanta en 53°; *d*) 0.60

35.24 Un experimentador tiene una bobina de inductancia 3.0 mH y desea construir un circuito cuya frecuencia de resonancia sea de 1.0 MHz. ¿Cuál debe ser el valor del capacitor que utilizará? *Resp.* 8.4 pF

35.25 Un circuito tiene una resistencia de 11 Ω, una bobina con una reactancia inductiva de 120 Ω y un capacitor con una reactancia de 120 Ω; además, todos están conectados en serie a una fuente de alimentación a 110 V y 60 Hz. ¿Cuál es la diferencia de potencial a través de cada elemento del circuito? *Resp.* $V_R = 0.11$ kV, $V_L = V_C = 1.2$ kV

35.26 Una fuente de alimentación de 120 V y 60 Hz se conecta a las terminales de un circuito en serie, que consta de una resistencia no inductiva de 800 Ω y un capacitor de valor desconocido. La caída de potencial a través de la resistencia es de 102 V. *a*) ¿Cuál es la caída de potencial a través del capacitor? *b*) ¿Cuál es la reactancia del capacitor? *Resp.* *a*) 63 V; *b*) 0.50 kΩ

35.27 Una bobina de resistencia despreciable se conecta en serie con una resistencia de 90 Ω a través de una línea de 120 V y 60 Hz. Un voltímetro lee 36 V a través de la resistencia. Encuentre el voltaje a través de la bobina y la inductancia de ésta. *Resp.* 0.11 kV, 0.76 H

35.28 Un transformador reductor se utiliza en una línea de 2.2 kV para suministrar 110 V. ¿Cuántas vueltas hay en el primario si el secundario tiene 25 vueltas? *Resp.* 5.0×10^2

35.29 Un transformador reductor se utiliza en una línea de 1650 V para suministrar 45 A a 110 V. ¿Qué corriente se extrae de la línea? Suponga una eficiencia de 100%. *Resp.* 3.0 A

35.30 Un transformador elevador opera en una línea a 110 V y suministra una carga con una corriente de 2.0 A. La razón del primario al bobinado del secundario es 1 : 25. Determine el voltaje en el secundario, la corriente en el primario y la potencia aprovechada. Suponga una carga resistiva y una eficiencia de 100%. *Resp.* 2.8 kV, 50 A, 5.5 kW

capítulo 36

Reflexión de la luz

NATURALEZA DE LA LUZ: La luz (junto con otras formas de radiación electromagnética) es una entidad fundamental y en física todavía se están haciendo esfuerzos por comprenderla. A un nivel observable, la luz manifiesta dos comportamientos en apariencia contradictorios, representados de manera tosca a través de los modelos ondulatorio y de partículas. Por lo común, la cantidad de energía presente es tan grande que la luz se comporta como si fuera una onda ideal continua, una onda de campo eléctrico y magnético interdependientes. La interacción de la luz con las lentes, los espejos, los prismas, las ranuras, etcétera, se puede comprender de manera satisfactoria mediante el modelo ondulatorio (siempre que no se sondee con demasiada profundidad en lo que está sucediendo a nivel microscópico). Por otra parte, cuando la luz es emitida o absorbida por los átomos de un sistema, estos procesos ocurren como si la energía radiante tuviera la forma de ráfagas diminutas, localizadas y bien dirigidas; es decir, como si la luz fuera una corriente de partículas. Por fortuna, sin preocuparse acerca de la naturaleza precisa de la luz, se puede predecir su comportamiento en un amplio rango de situaciones prácticas.

LEY DE LA REFLEXIÓN: Un rayo es una recta matemática trazada perpendicular a los frentes de onda de una onda luminosa. Muestra la dirección de propagación de la energía electromagnética. En la reflexión *especular* (o *espejo*), el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión, como se muestra en la Fig. 36-1. Además, el rayo incidente, el rayo reflejado y el normal a la superficie se localizan en el mismo plano, llamado *plano de incidencia.*

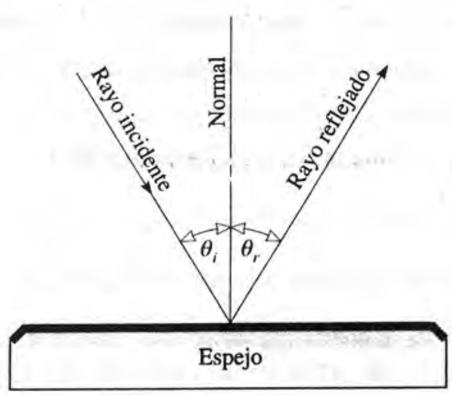


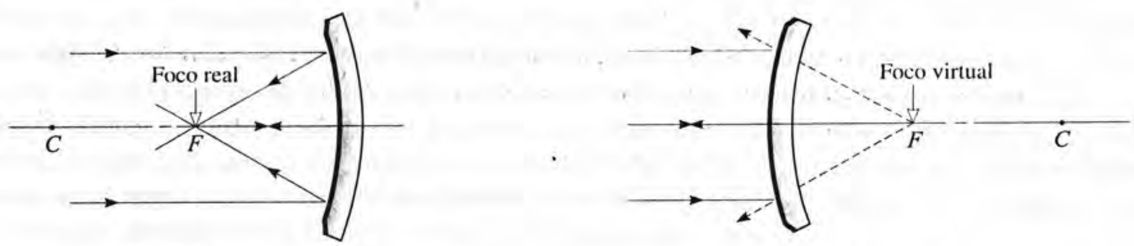
Fig. 36-1

LOS ESPEJOS PLANOS forman imágenes que son derechas, del mismo tamaño que el objeto, atrás de la superficie reflectora y a la misma distancia que se encuentra el objeto de la superficie. A este tipo de imágenes se les llama *virtuales*; es decir, la imagen no se formará en una pantalla que se coloque en la posición de la imagen, ya que la luz no converge en ese lugar.

ESPEJOS ESFÉRICOS: El *foco principal* de un espejo esférico, como los que se muestran en la Fig. 36-2, es un punto F donde se enfocan los rayos paralelos y cercanos al *eje central* o *eje óptico* del espejo. El foco es real para un espejo cóncavo y virtual para un espejo convexo. Este foco se localiza sobre el *eje óptico* y a media distancia entre el centro de curvatura C y el espejo.

Los *espejos cóncavos* forman imágenes reales e invertidas de un objeto que se encuentre atrás del foco principal. Si el objeto se halla entre el foco principal y el espejo, la imagen es virtual, derecha y aumentada.

Los *espejos convexos* sólo producen imágenes virtuales y derechas de un objeto que se encuentra frente a ellos. Las imágenes son disminuidas (más pequeñas que el objeto) en tamaño.



a) Espejo cóncavo

b) Espejo convexo

Fig. 36-2

ECUACIÓN DE LOS ESPEJOS esféricos, tanto cóncavos como convexos, es

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{2}{R}=\frac{1}{f}$$

donde

p = distancia objeto medida desde el espejo
q = distancia imagen medida desde el espejo
R = radio de curvatura del espejo
f = distancia focal del espejo $= R/2$

Además (convención de signos),

- p es positiva cuando el objeto se encuentra frente del espejo.
- q es positiva cuando la imagen es real, es decir, frente al espejo.
- q es negativa cuando la imagen es virtual, o sea atrás del espejo.
- R y f son positivos para un espejo cóncavo y negativos para un espejo convexo.

EL TAMAÑO DE LA IMAGEN formada por un espejo esférico está dada por

$$\text{Amplificación lineal} = \frac{\text{longitud de la imagen}}{\text{longitud del objeto}} = \frac{\text{distancia de la imagen desde el espejo}}{\text{distancia del objeto desde el espejo}} = \frac{q}{p}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

36.1 Dos espejos planos forman un ángulo de 30° entre sí. Localice gráficamente cuatro imágenes de un punto luminoso A colocado entre los dos espejos. (Véase la Fig. 36-3.)

Desde A trace las normales AA' y AB' a los espejos OY y OX, respectivamente, haciendo $\overline{AL} = \overline{LA'}$ y $\overline{AM} = \overline{MB'}$. Entonces A' y B' son las imágenes de A.

A continuación, desde A' y B' trazar las normales a OX y OY, haciendo $\overline{A'N} = \overline{NA''}$ y $\overline{B'P} = \overline{PB''}$. Entonces A'' es la imagen de A' en OX y B'' es la imagen de B' en OY.

Las cuatro imágenes de A son A', B', A'', B''. Adicionalmente existen también imágenes, por ejemplo, de A'' y B''.

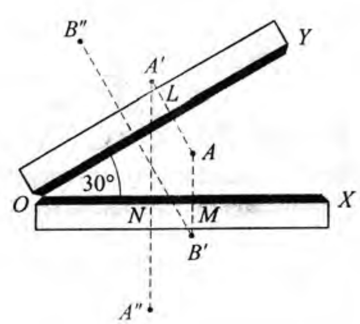


Fig. 36-3

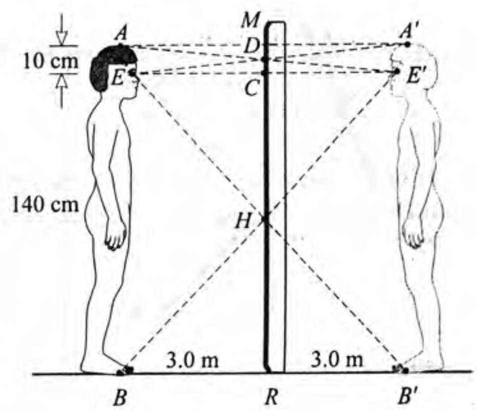


Fig. 36-4

36.2 Un muchacho de 1.50 m de estatura apenas puede ver su imagen en un espejo plano vertical que se encuentra a 3.0 m de distancia. Sus ojos se encuentran a 1.40 m del piso. Determine la altura del espejo y la posición medida desde el piso del espejo más corto en que puede ver completamente su imagen.

En la Fig. 36-4, AB representa al muchacho. Sus ojos se localizan en E. Entonces $A'B'$ es la imagen de AB en el espejo MR, y DH representa al espejo más pequeño que se necesita para que los ojos vean la imagen $A'B'$.

Los triángulos DEC y $DA'M$ son congruentes y por tanto

$$\overline{CD} = \overline{DM} = 5.0\,\text{cm}$$

Los triángulos HRB' y HCE son congruentes y por consiguiente

$$\overline{RH} = \overline{HC} = 70\,\text{cm}$$

La altura del espejo es $\overline{HC} + \overline{CD} = 75\,\text{cm}$ y se localiza a $\overline{RH} = 70\,\text{cm}$ del piso.

36.3 Como se muestra en la Fig. 36-5, un rayo de luz IO incide sobre un espejo plano pequeño. El espejo refleja el rayo sobre una escala recta SC, paralela al espejo MM y se localiza a 1 m de distancia de éste. Cuando el espejo gira un ángulo de 8.0° y toma la posición $M'M'$, ¿qué distancia se desplazará sobre la escala la mancha de luz? (El dispositivo, llamado *nivel óptico*, es muy útil para medir pequeñas deflexiones.)

Cuando el espejo gira un ángulo de 8.0°, la normal también gira ese ángulo de 8.0°, y el rayo incidente formará un ángulo de 8.0° con la normal NO del espejo $M'M'$. Como el rayo incidente IO y el rayo reflejado OR forman ángulos iguales con la normal, el ángulo IOR es el doble del ángulo que giró el espejo, o sea 16°. Entonces

$$\overline{IR} = \overline{IO}\tan 16° = (1.0\,\text{m})(0.287) = 29\ \text{cm}$$

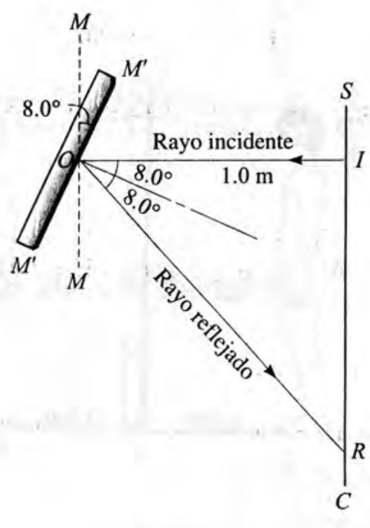


Fig. 36-5

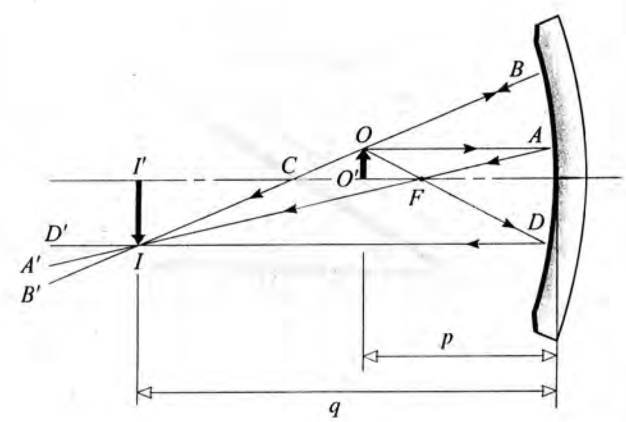


Fig. 36-6

36.4 El espejo esférico cóncavo mostrado en la Fig. 36-6 tiene un radio de curvatura de 4 m. Un objeto OO', de 5 cm de altura, se coloca enfrente de un espejo a 3 m. Por *a*) construcción y *b*) analíticamente, determinar la posición y la altura de la imagen II'.

En la Fig. 36-6, C es el centro de curvatura, localizado frente al espejo a 4 m, y F es el foco principal, localizado a 2 m del frente del espejo.

a) Dos de los tres rayos (rayos principales) que salen de O darán la posición de la imagen.

1) El rayo OA es paralelo al eje principal. Este rayo, como todo rayo paralelo al eje, es reflejado en dirección AFA' y pasa por el foco principal F.

2) El rayo OB se traza pasando por el centro de curvatura C del espejo. Este rayo es perpendicular a la tangente en el punto B, por lo mismo se reflejará sobre sí mismo en la dirección BCB'.

3) El rayo OFD pasa por el foco principal F. Este rayo, como todos los rayos que pasan por el foco principal, se refleja en la dirección DD', la cual es paralela al eje principal del espejo.

El punto de intersección I de dos rayos principales reflejados formarán la imagen de O. Entonces, II' representa la posición y el tamaño de la imagen de OO'. La imagen es real, invertida, amplificada y se encuentra a una distancia mayor de la que se encuentra el objeto del espejo. (*Nota*: Si el objeto se localizará en II', la imagen podría ser OO' y sería real, invertida y más pequeña.)

b) Por la ecuación de los espejos,

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{2}{R} \quad \text{o bien} \quad \frac{1}{3}+\frac{1}{q}=\frac{2}{4} \quad \text{o bien} \quad q=6\text{ m}$$

La imagen es real (por ser q positiva) y se localiza a 6 m del espejo. También,

$$\frac{\text{Altura de la imagen}}{\text{Altura del objeto}}=\frac{q}{p}=\frac{6\text{ m}}{3\text{ m}}=2 \quad \text{o bien} \quad \text{altura de la imagen}=(2)(5\text{ cm})=0.10\text{ m}$$

36.5 Un objeto OO' se encuentra a 25 cm de un espejo esférico cóncavo de radio 80 cm (Fig. 36-7). Determine la posición y el tamaño relativo de la imagen II' *a*) por construcción y *b*) utilizando la ecuación de los espejos.

a) Dos de los tres rayos que emanan de O determinarán la imagen.

1) El rayo OA, que es paralelo al eje principal, se reflejará pasando por el foco F, ubicado a 40 cm del espejo.

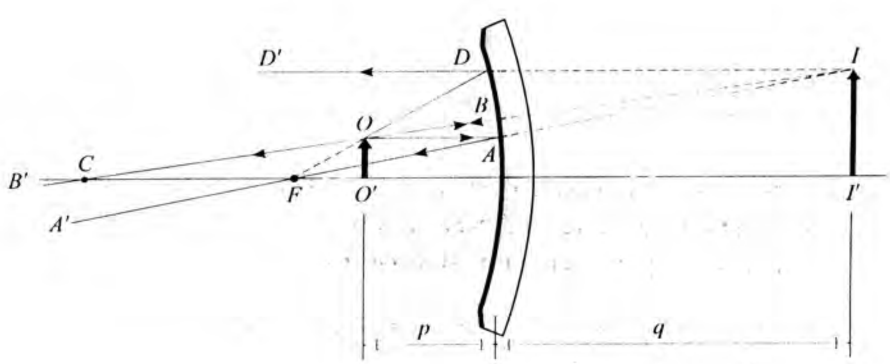


Fig. 36-7

2) El rayo OB se localiza a lo largo del radio COB, y por lo tanto, es perpendicular a la superficie del espejo en el punto B, en consecuencia se reflejará sobre sí mismo, pasando por el centro de curvatura C.

3) El rayo OD que pasa por el punto F se reflejará paralelo al eje del espejo. Debido a la gran curvatura que tiene el espejo entre los puntos A y D, la reflexión de este rayo no será muy precisa como la reflexión de los otros dos.

Los rayos reflejados (AA', BB', y DD') no se intersecan, ya que aparentemente provienen de un punto I atrás del espejo. Entonces II' representa la posición relativa de la imagen de OO'. La imagen virtual se encuentra atrás del espejo, derecha y amplificada.

b)
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{2}{R} \quad \text{o} \quad \frac{1}{25}+\frac{1}{q}=\frac{2}{80} \quad \text{o} \quad q=-67\,\text{cm}$$

La imagen es virtual (por ser q negativa) y se encuentra a 66.7 cm atrás del espejo. También,

$$\text{Amplificación lineal} = \frac{\text{tamaño de la imagen}}{\text{tamaño del objeto}} = \left|\frac{q}{p}\right| = \frac{66.7\,\text{cm}}{25\,\text{cm}} = 2.7\ \text{veces}$$

36.6 Como se muestra en la Fig. 36-8, un objeto de 6 cm de altura se localiza a 30 cm frente a un espejo esférico convexo de radio 40 cm. Determine la posición y la altura de su imagen, *a*) por construcción y *b*) utilizando la ecuación de los espejos.

a) Escoja dos rayos principales que emanen de O:

1) El rayo OA, que viaja paralelo al eje principal, se refleja en la dirección AA' pasando por el foco principal F.

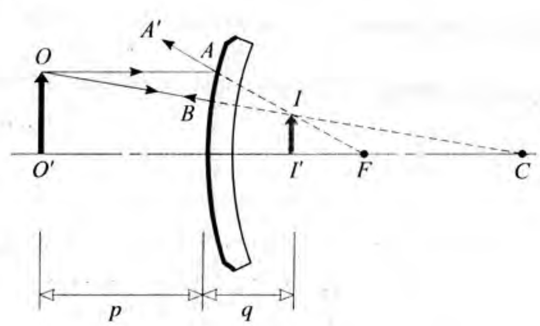


Fig. 36-8

2) El rayo OB, dirigido al centro de curvatura C, es perpendicular a la tangente a la superficie del espejo en el punto B y se refleja regresando sobre la misma trayectoria.

Los rayos reflejados, AA' y BO, nunca se intersecan y aparentemente provienen del punto I que se encuentra atrás del espejo. Entonces II' representa el tamaño y la posición de la imagen del objeto OO'.

Todas las imágenes que forman un espejo convexo son virtuales, derechas y de menor tamaño, siempre y cuando el objeto se encuentre frente al espejo (es decir, un objeto real).

b)
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{2}{R} \quad \text{o} \quad \frac{1}{30}+\frac{1}{q}=-\frac{2}{40} \quad \text{o} \quad q=-12\,\text{cm}$$

La imagen es virtual (por ser q negativa) y se encuentra a 12 cm atrás del espejo. También,

$$\frac{\text{Altura de la imagen}}{\text{Altura del objeto}}=\left|\frac{q}{p}\right|=\frac{12\,\text{cm}}{30\,\text{cm}}=0.40 \quad \text{o} \quad \text{altura de la imagen}=(0.40)(6.0\,\text{cm})=2.4\,\text{cm}$$

36.7 ¿Dónde se debe colocar un objeto respecto a un espejo esférico cóncavo de radio 180 cm para que se forme una imagen real y que tenga la mitad de las dimensiones lineales del objeto?

La amplificación debe ser de $1/2$; entonces $q=p/2$. Por tanto

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{2}{R} \quad \text{o} \quad \frac{1}{p}+\frac{2}{p}=\frac{2}{180} \quad \text{o} \quad p=0.27\,\text{m frente al espejo}$$

36.8 ¿A qué distancia, frente a un espejo esférico cóncavo de radio 120 cm, se debe parar una niña para que la imagen que ve de su cara sea derecha y aumentada cuatro veces su tamaño natural?

La imagen debe ser derecha y virtual; entonces q es negativo, y $q=-4p$. Por consiguiente

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{2}{R} \quad \text{o} \quad \frac{1}{p}-\frac{1}{4p}=\frac{2}{120} \quad \text{o} \quad p=45\,\text{cm frente al espejo}$$

36.9 ¿Qué clase de espejo esférico se debe utilizar y cuál tiene que ser su radio para que forme una imagen derecha de una quinta parte de la altura de un objeto colocado a 15 cm frente a él?

Una imagen derecha producida por un espejo esférico es virtual; entonces $q=-p/5=-15/5=-3$ cm. Para producir una imagen virtual más pequeña que el objeto se requiere de un espejo esférico convexo. Su radio de curvatura está dado por

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{2}{R} \quad \text{o} \quad \frac{1}{15}-\frac{1}{3}=\frac{2}{R} \quad \text{o} \quad R=-7.5\,\text{cm (espejo convexo)}$$

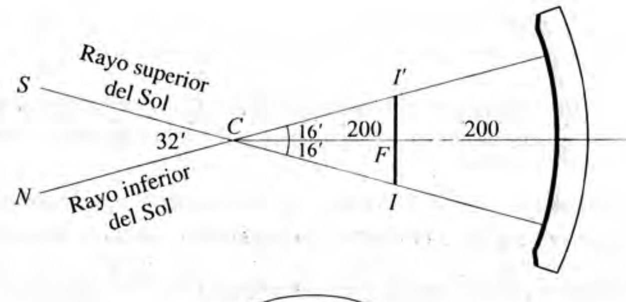


Fig. 36-9

36.10 El diámetro del Sol subtiende un ángulo de aproximadamente 32 minutos (32′) en cualquier punto de la Tierra. Determinar la posición y el diámetro de la imagen solar formada por un espejo esférico convexo de radio 400 cm. Véase la Fig. 36-9.

Como el Sol se encuentra muy lejos, p es muy grande y por lo mismo $1/p$ es prácticamente cero. Entonces

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{2}{R} \quad \text{o} \quad 0+\frac{1}{q}=\frac{2}{400}$$

de donde $q = 200$ cm. La imagen se localiza en el foco principal F, a 200 cm del espejo.

El diámetro del Sol y su imagen II' subtienden ángulos iguales en el centro de curvatura C del espejo. De la figura,

$$\tan 16' = \frac{\overline{II'}/2}{\overline{CF}} \quad \text{o} \quad \overline{II'} = 2\overline{CF}\tan 16' = (2)(2.00\text{ m})(0.004\,65) = 1.9\text{ cm}$$

36.11 Un dentista utiliza un espejo pequeño que da una amplificación de 4.0 cuando se sostiene a 0.60 cm de un diente. ¿Cuál es el radio de curvatura del espejo?

Como $|q/p| = 4$ y $p = 0.60$ cm, la ecuación del espejo se convierte (en cm):

$$\frac{1}{0.60}+\frac{1}{\pm 2.4}=\frac{2}{R} \quad \text{o} \quad 1.667 \pm 0.417 = \frac{2}{R}$$

de donde $R = 0.96$ cm o $R = 1.6$ cm. Las dos soluciones son positivas por lo que se trata de un espejo cóncavo. (Esto concuerda con el hecho de que la imagen formada por un espejo convexo está disminuida, no aumentada.) El signo más (y $R = 0.96$ cm) produce una imagen real, situación que no es conveniente. (¿Por qué?) Entonces el radio del espejo debe ser $R = 1.6$ cm.

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

36.12 Si desea retratarse cuando se encuentre a 3 m de un espejo plano, ¿a qué distancia debe enfocar la cámara que sostiene? *Resp.* 6 m

36.13 Dos espejos planos forman entre sí un ángulo de 90°. Un objeto puntual luminoso se coloca entro ellos. ¿Cuántas imágenes se forman? *Resp.* 3

36.14 Dos espejos planos se colocan paralelos uno con respecto al otro y separados 20 cm. Un punto luminoso es colocado entre ellos a 5.0 cm de uno de los espejos. Determine la distancia de cada espejo de las tres imágenes más cercanas. *Resp.* 5.0, 35, 45 cm; 15, 25, 55 cm

36.15 Dos espejos planos forman entre sí un ángulo de 90°. Un haz de luz se dirige a uno de los espejos, se refleja en éste y en el segundo espejo y sale de los espejos. ¿Cuál es el ángulo entre el haz incidente y el reflejado? *Resp.* 180°

36.16 Un rayo de luz forma un ángulo de 25° con la normal en un espejo plano. Si el espejo se gira un ángulo de 6.0°, haciendo que el ángulo de incidencia sea de 31°, ¿qué ángulo girará el rayo reflejado? *Resp.* 12°

36.17 Describa la imagen de la llama de una vela que se encuentra a 40 cm de un espejo esférico cóncavo de radio 64 cm. *Resp.* La imagen es real, invertida, se localiza a 0.16 m frente al espejo y tiene una amplificación de 4 veces

36.18 Describa la imagen de un objeto que se encuentra a 20 cm de un espejo esférico cóncavo de radio 60 cm. *Resp.* La imagen es virtual, derecha, se localiza a 60 cm atrás del espejo, la amplificación es de 3 veces

36.19 ¿A qué distancia se debe colocar un objeto enfrente de un espejo esférico cóncavo de radio 36 cm para que forme una imagen real y con una amplificación de un noveno? *Resp.* 0.18 m

36.20 Un objeto de 7.0 cm de altura se coloca a 15 cm de un espejo esférico convexo de radio 45 cm. Describa su imagen. *Resp.* La imagen es virtual, derecha, se localiza a 9.0 cm atrás del espejo y tiene una altura de 4.2 cm

36.21 ¿Cuál es la distancia focal de un espejo esférico convexo que forma una imagen de un objeto de un sexto de su tamaño y a 12 cm del espejo? *Resp.* −2.4 cm

36.22 Se desea proyectar la imagen amplificada 5 veces de una lámpara sobre una pared que se encuentra a 12 m de la lámpara. ¿Qué clase de espejo esférico se requiere y cuál será su posición? *Resp.* El espejo debe ser cóncavo, de radio 5.0 m y debe estar a 3.0 m de la lámpara

36.23 Calcule la posición y el diámetro de la imagen de la Luna sobre una esfera pulida de diámetro 20 cm. El diámetro de la Luna es de 3500 km y la distancia a la Tierra es 384 000 km, aproximadamente. *Resp.* La posición es de 5.0 cm dentro de la esfera y el diámetro de 0.46 mm

capítulo 37

Refracción de la luz

LA RAPIDEZ DE LA LUZ varía de un material a otro. La luz viaja (tratada macroscópicamente) más rápido en el vacío, donde su rapidez es $c = 2.998 \times 10^8$ m/s. Su rapidez en el aire es de $c/1.0003$. En el agua es de $c/1.33$ y en un vidrio ordinario es de aproximadamente $c/1.5$. Sin embargo, en un nivel microscópico, la luz se compone de fotones y éstos sólo existen a velocidad c. La pérdida aparente de su rapidez en diversos materiales se debe a la absorción y reemisión de la luz a medida que ésta pasa de un átomo a otro.

ÍNDICE DE REFRACCIÓN (n): El índice *absoluto* de refracción de un material se define como

$$n = \frac{\text{velocidad de la luz en vacío}}{\text{velocidad de la luz en el material}} = \frac{c}{v}$$

Para cualesquiera de dos materiales, el *índice relativo de refracción* del material 1, con respecto al material 2, es

$$\text{índice relativo} = \frac{n_1}{n_2}$$

donde n_1 y n_2 son los índices de refracción absolutos de los dos materiales.

REFRACCIÓN: Cuando un rayo de luz pasa oblicuamente a través de la frontera entre dos materiales de índices de refracción diferentes, el rayo se desvía o quiebra. Este fenómeno, llamado *refracción*, se muestra en la Fig. 37-1. Si $n_t > n_i$, el rayo se refracta, como se ve en la figura; se dobla hacia la normal cuando entra en el material 2. Si $n_t < n_i$, sin embargo, el rayo refractado se aleja de la normal. Esto podría ser la situación en la Fig. 37-1 si la dirección del rayo fuera invertida. En todo caso, el rayo incidente, el rayo refractado y la normal están en el mismo plano. Los ángulos θ_i y θ_t en la Fig. 37-1 se llaman *ángulo de incidencia* y *ángulo de transmisión* (o refracción), respectivamente.

LEY DE SNELL: La forma en la cual se refracta un rayo en la interfaz entre dos materiales cuyos índices de refracción son n_i y n_t está dada por la *Ley de Snell:*

$$n_i \text{ sen } \theta_i = n_t \text{ sen } \theta_t$$

donde θ_i y θ_t son como se muestra en la Fig. 37-1. Debido a que la ecuación se aplica a la luz que se mueve a lo largo del rayo, un rayo de luz sigue la misma trayectoria cuando su dirección es invertida.

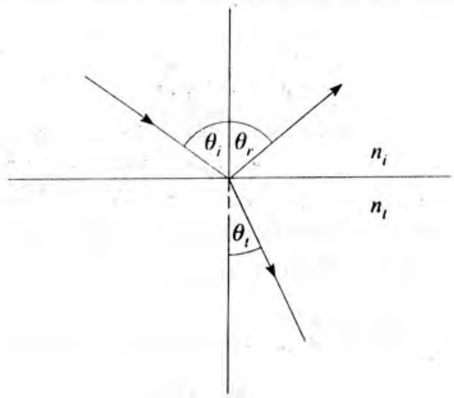


Fig. 37-1

ÁNGULO CRÍTICO PARA LA REFLEXIÓN INTERNA TOTAL: Cuando la luz se refleja en una interfaz, en donde $n_i < n_t$, el proceso se llama *reflexión externa*, cuando $n_i > n_t$, se trata de *reflexión interna*. Supóngase que un rayo de luz pasa de un material con cierto índice de refracción hacia otro de índice más bajo como se muestra en la fig. 37-2. Debido a que θ_t debe ser mayor que θ_i, es posible hacer que este último sea suficientemente grande como para que $\theta_t = 90°$. Este valor de θ_i se conoce como el *ángulo crítico* θ_c. Para los θ_i mayores que éste, no puede existir un rayo refractado; toda la luz se refleja.

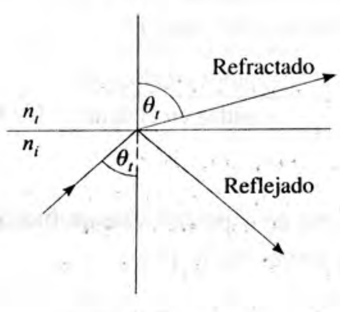


Fig. 37-2

La condición para una reflexión total interna es que θ_i exceda el ángulo crítico θ_c dado por

$$n_i \text{ sen } \theta_c = n_t \text{ sen } 90° \quad \text{o} \quad \text{sen } \theta_c = \frac{n_t}{n_i}$$

Debido a que el seno de un ángulo no puede ser mayor que la unidad, esta relación confirma que la reflexión total interna sólo puede ocurrir si $n_i > n_t$.

UN PRISMA puede ser usado para dispersar la luz dentro de sus colores, como se muestra en la Fig. 37-3. Debido a que el índice de refracción de un material varía con la longitud de onda, los distintos colores de la luz se refractan de diferente manera. En la mayoría de los materiales, el rojo se refracta menos que el azul.

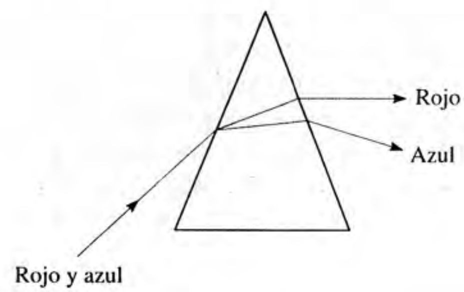


Fig. 37-3

PROBLEMAS RESUELTOS

37.1 La rapidez de la luz en el agua es (3/4)c. ¿Cuál es el efecto sobre la frecuencia y la longitud de onda de la luz cuando pasa del vacío (o del aire, como buena aproximación) al agua? Calcúlese el índice de refracción del agua.

El mismo número de crestas de onda deja el aire cada segundo cuando entra al agua. Por lo tanto, la frecuencia es la misma en los dos materiales. Pero debido a que la longitud de onda = (rapidez)/(frecuencia), la longitud de onda en el agua es tres cuartas partes la del aire.

El índice de refracción (absoluto) del agua es

$$n = \frac{\text{rapidez en el vacío}}{\text{rapidez en el agua}} = \frac{c}{(3/4)c} = \frac{4}{3} = 1.33$$

37.2 Una placa de vidrio de 0.60 cm de espesor tiene un índice de refracción de 1.55. ¿Cuánto tarda una pulsación de luz en pasar a través de la placa?

$$t = \frac{x}{v} = \frac{0.0060 \text{ m}}{(2.998 \times 10^8/1.55) \text{ m/s}} = 3.1 \times 10^{-11} \text{ s}$$

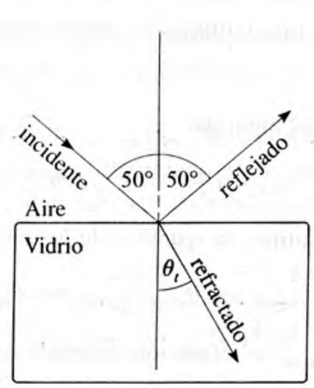


Fig. 37-4

37.3 Como se muestra en la Fig. 37-4, un rayo de luz en el aire choca con una placa de vidrio ($n = 1.50$) con un ángulo incidente de 50°. Determínense los ángulos de los rayos reflejados y refractados.

La ley de reflexión se aplica para el rayo reflejado. Por consiguiente, el ángulo de reflexión es de 50°, como se muestra.

Para el rayo refractado, n_i sen $\theta_i = n_t$ sen θ_t, entonces

$$\text{sen}\,\theta_t = \frac{n_i}{n_t}\,\text{sen}\,\theta_i = \frac{1.0}{1.5}\,\text{sen}\,50° = 0.51$$

de donde $\theta_t = 31°$.

37.4 El índice de refracción del diamante es 2.42. ¿Cuál es el ángulo crítico para la luz que pasa del diamante al aire?

Se utiliza n_i sen $\theta_i = n_t$ sen θ_t para obtener

$$(2.42)\ \text{sen}\,\theta_c = (1)\ \text{sen}\,90.0°$$

de donde sen $\theta_c = 0.413$ y $\theta_c = 24.4°$.

37.5 ¿Cuál es el ángulo crítico para la luz que pasa del vidrio ($n = 1.54$) al agua ($n = 1.33$)?

$$n_i\,\text{sen}\,\theta_i = n_t\,\text{sen}\,\theta_t \qquad \text{se convierte en} \qquad n_i\,\text{sen}\,\theta_c = n_t\,\text{sen}\,90°$$

de donde

$$\text{sen}\,\theta_c = \frac{n_t}{n_i} = \frac{1.33}{1.54} = 0.864 \quad \text{o} \quad \theta_c = 59.7°$$

37.6 Una capa de aceite ($n = 1.45$) flota sobre agua ($n = 1.33$). Un rayo de luz penetra dentro del aceite con un ángulo incidente de 40.0°. Encuéntrese el ángulo que el rayo hace en el agua. (Véase la Fig. 37-5.)

Para la interfaz aire-agua, la ley de Snell da

$$n_{\text{aire}} \text{ sen } 40° = n_{\text{aceite}} \text{ sen } \theta_{\text{aceite}}$$

En la interfaz aceite-agua se tiene (se utiliza la igualdad de los ángulos alternos)

$$n_{\text{aceite}} \text{ sen } \theta_{\text{aceite}} = n_{\text{agua}} \text{ sen } \theta_{\text{agua}}$$

Entonces, n_{aire} sen 40.0° = n_{agua} sen θ_{agua}; la refracción completa ocurre como si la capa de aceite estuviera ausente. Al resolver

$$\text{sen}\,\theta_{\text{agua}} = \frac{n_{\text{aire}} \text{ sen } 40.0°}{n_{\text{agua}}} = \frac{(1)(0.643)}{1.33} \quad \text{o} \quad \theta_{\text{agua}} = 28.9°$$

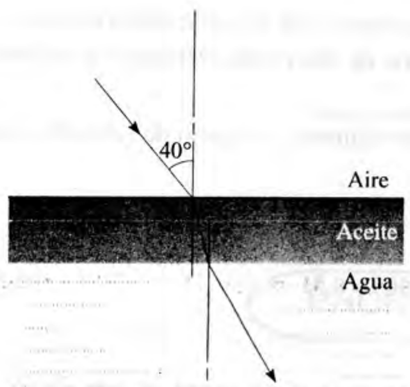


Fig. 37-5

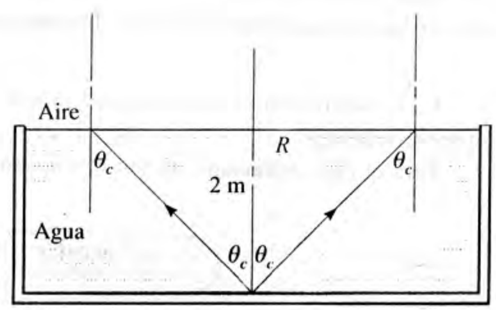


Fig. 37-6

37.7 Como se muestra en la Fig. 37-6, un pequeño cuerpo luminoso se encuentra en el fondo de una alberca ($n = 4/3$) de 2.00 m de profundidad y emite rayos hacia arriba en todas direcciones. Un área circular de luz se forma en la superficie del agua. Determine el radio R del círculo de luz.

El área circular es formada por los rayos refractados en el aire. El ángulo θ_c debe ser el ángulo crítico, para ángulos mayores en reflexión total interna y por lo tanto no hay refracción para estos ángulos. Entonces se tiene

$$\text{sen}\,\theta_c = \frac{n_{aire}}{n_{agua}} = \frac{1}{4/3} \quad \text{o} \quad \theta_c = 48.6°$$

De la figura,

$$R = (2.00 \text{ m}) \tan \theta_c = (2.00 \text{ m})(1.13) = 2.26 \text{ m}$$

37.8 ¿Cuál es el valor mínimo del índice de refracción para un prisma de 45.0° que se utiliza para desviar un rayo de luz en su reflexión interna total a través de su ángulo recto? (Véase la Fig. 37-7.)

El rayo penetra el prisma sin desviarse, ya que choca con el lado *AB* en posición normal. Entonces forma un ángulo incidente de 45.0° con la normal *NN* al lado *AC*. El ángulo crítico del prisma debe ser menor a 45.0° si el rayo es totalmente reflejado por el lado *AC* y de esta manera girado 90°. De n_i sen $\theta_c = n_t$ sen 90° con $n_t = 1.00$,

$$n_i \text{ mínimo} = \frac{1}{\text{sen } 45.0°} = 1.41$$

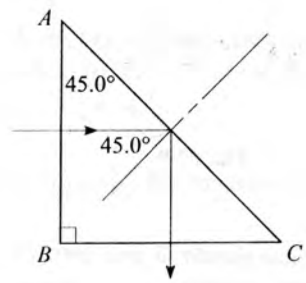


Fig. 37-7

37.9 El prisma de vidrio que se muestra en la Fig. 37-8 tiene un índice de refracción de 1.55. Encuéntrese el ángulo de desviación *D* para el caso mostrado.

No ocurre desviación en la superficie de entrada porque el ángulo de incidencia es cero. En la segunda superficie, $\theta_i = 30°$ (debido a que los lados del prisma son mutuamente perpendiculares a los lados del ángulo del vértice). Entonces la ley de Snell da

$$n_i \text{ sen } \theta_i = n_t \text{ sen } \theta_t \quad \text{o} \quad \text{sen } \theta_t = \frac{1.55}{1} \text{sen } 30°$$

de donde $\theta_t = 50.8°$. Pero $D = \theta_t - \theta_i$ así que $D = 21°$.

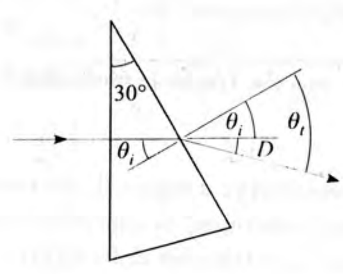


Fig. 37-8

37.10 Como se observa en la Fig. 37-9, un objeto está a una profundidad d abajo de la superficie de un material transparente de índice de refracción n. Cuando se observa desde un punto sobre la superficie, ¿a qué profundidad parece estar el objeto?

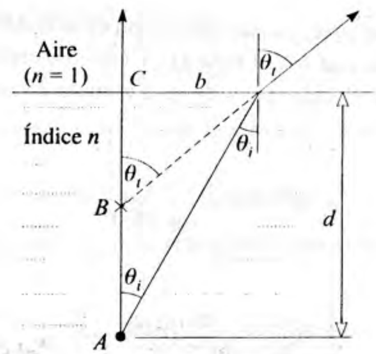


Fig. 37-9

Los rayos de A que se muestran emergiendo al aire parecen venir desde el punto B. Por lo tanto, la profundidad aparente es CB. Se tiene que,

$$\frac{b}{\overline{CB}} = \tan\theta_t \quad \text{y} \quad \frac{b}{\overline{CA}} = \tan\theta_i$$

Si el objeto es observado aproximadamente en línea recta, entonces los ángulos θ_t y θ_i deberán ser pequeños. Para ángulos pequeños, el seno del ángulo y la tangente son aproximadamente iguales. Por lo tanto,

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = \frac{\tan\theta_i}{\tan\theta_t} \approx \frac{\operatorname{sen}\theta_i}{\operatorname{sen}\theta_t}$$

Pero n sen $i = (1)$ sen r, de donde

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_i}{\operatorname{sen}\theta_t} = \frac{1}{n}$$

De aquí que,

$$\text{Profundidad aparente } \overline{CB} = \frac{\text{profundidad real } \overline{CA}}{n}$$

La profundidad aparente es sólo una fracción $1/n$ de la profundidad real d.

37.11 Una placa de vidrio de 4.00 mm se observa a través de un microscopio. Este aparato debe bajarse 2.58 mm para que el operador pueda distinguir la superficie superior de la superficie inferior de la placa de vidrio. ¿Cuál es el índice de refracción del vidrio?

De acuerdo con el resultado del problema 37.10, la profundidad aparente debe ser $1/n$ de la profundidad real que tiene. Por lo tanto,

$$(\text{espesor real})(1/n) = \text{espesor aparente}$$

o

$$(4.00\ \text{mm})(1/n) = 2.58\ \text{mm}$$

Por lo que $n = 1.55$ para el vidrio.

37.12 Como se muestra en la Fig. 37-10, un rayo penetra por la cara lateral de un bloque rectangular de vidrio que tiene un índice de refracción n_2. Demuéstrese que todo rayo que entra pueda ser reflejado totalmente en su interior sólo si $n_2 > 1.414$.

Entre más grande es θ_1, más pequeño es θ_3. Por lo tanto el rayo escapará más fácilmente si $\theta_1 = 90°$. En este caso,

$$n_1 \text{ sen } \theta_1 = n_2 \text{ sen } \theta_2 \qquad \text{se convierte en} \qquad (1)(1) = n_2 \text{ sen } \theta_2$$

Para que el rayo justamente empiece a escapar, $\theta_4 = 90°$. Entonces

$$n_2 \text{ sen } \theta_3 = n_1 \text{ sen } \theta_4 \qquad \text{se convierte en} \qquad n_2 \text{ sen } \theta_3 = (1)(1)$$

Se tienen que satisfacer las dos condiciones: $n_2 \text{ sen } \theta_2 = 1$ y $n_2 \text{ sen } \theta_3 = 1$. La razón de éstas da

$$\frac{\text{sen}\,\theta_2}{\text{sen}\,\theta_3} = 1$$

Pero como se puede ver en la figura, sen $\theta_3 = \cos\theta_2$, donde esto nos da

$$\tan\theta_2 = 1 \qquad \text{o} \qquad \theta_2 = 45.00°$$

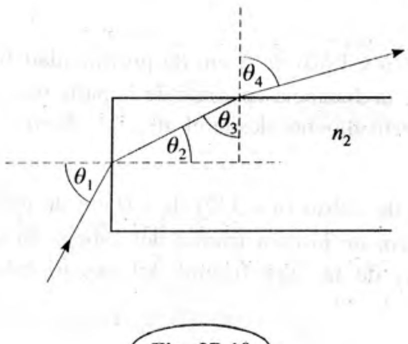


Fig. 37-10

Entonces, debido a que n_2 sen $\theta_2 = 1$, se tiene

$$n_2 = \frac{1}{\text{sen}\,45.00°} = 1.414$$

Éste es el valor más pequeño posible que el índice puede tener para que exista una reflexión total interna de todos los rayos que entran por el lado lateral del bloque. Es posible lograr esta respuesta por inspección. ¿Cómo?

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

37.13 La rapidez de la luz en cierto vidrio es 1.91×10^8 m/s. ¿Cuál es el índice de refracción del vidrio? *Resp.* 1.57

37.14 ¿Cuál es la frecuencia de la luz que tiene una longitud de onda en el aire de 546 nm? ¿Cuál es la frecuencia en el agua ($n = 1.33$)? ¿Su velocidad en el agua? ¿Su longitud de onda en el agua? *Resp.* 549 THz, 549 THz, 2.25×10^8 m/s, 411 nm

37.15 Un haz de luz choca contra una superficie de agua con un ángulo incidente de 60°. Determínese la dirección de los rayos reflejado y refractado. Para el agua $n = 1.33$. *Resp.* 60° reflejado en el aire, 41° refractado en el agua

37.16 El ángulo crítico para la luz que pasa de la sal de roca al aire es de 40.5°. Calcúlese el índice de refracción de la sal de roca. *Resp.* 1.54

37.17 ¿Cuál es el ángulo crítico cuando la luz pasa del vidrio ($n = 1.50$) al aire? *Resp.* 41.8°

37.18 Los índices absolutos de refracción del diamante y del vidrio *crown* son $5/2$ y $3/2$, respectivamente. Calcúlese *a*) el índice de refracción del diamante relativo al vidrio *crown* y *b*) el ángulo crítico entre el diamante y el vidrio *crown*. *Resp.* *a*) 5/3; *b*) 37°

37.19 Una alberca ($n = 4/3$) tiene 60 cm de profundidad. Calcule la profundidad aparente cuando se observa verticalmente desde el aire. *Resp.* 45 cm

37.20 En un vaso una capa de benceno ($n = 1.50$) de 6 cm de profundidad flota sobre una de agua ($n = 1.33$) de 4 cm de profundidad. Determínese la distancia aparente de la parte más baja del vaso a la superficie superior del benceno cuando se observa verticalmente desde el aire. *Resp.* 7 cm

37.21 Un espejo se hace con una placa de vidrio ($n = 3/2$) de 1.0 cm de espesor, plateado por una de sus caras. Un hombre se encuentra a 50.0 cm de la cara frontal del espejo. Si él observa perpendicularmente hacia el espejo, ¿a qué distancia atrás de la cara frontal del espejo estará aparentemente su imagen? *Resp.* 51.3 cm

37.22 Una varilla recta se sumerge parcialmente en agua ($n = 1.33$). Su parte sumergida se ve aparentemente inclinada a 45° con la superficie cuando se observa verticalmente desde el aire. ¿Cuál es la inclinación real de la varilla? *Resp.* arctan 1.33 = 53°

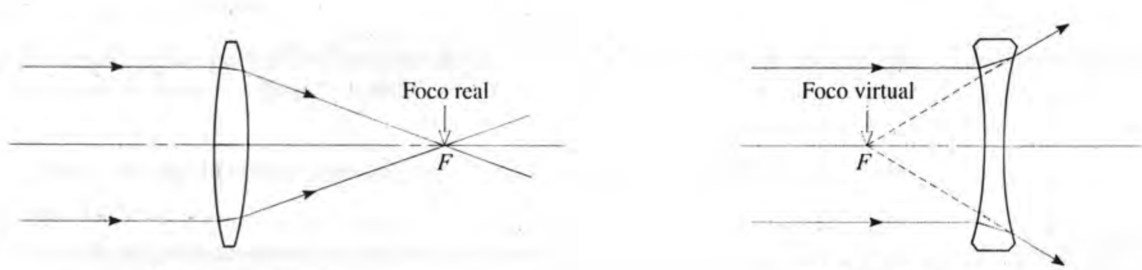
37.23 El índice de refracción de cierto tipo de vidrio es 1.640 para la luz azul y de 1.605 para la luz roja. Cuando un haz de luz blanca (que contiene todos los colores) entra en una placa de este vidrio con un ángulo incidente de 40°, ¿cuál es el ángulo en el vidrio entre las partes azul y roja del rayo refractado? *Resp.* 0.53°

capítulo 38

Lentes delgadas

TIPOS DE LENTES: Como se muestra en la Fig. 38-1, las lentes *convergentes* o *positivas* son más gruesas en su centro que en la periferia; un haz de luz de rayos paralelos que incida sobre una lente positiva convergerá en un punto llamado foco real. Las lentes *divergentes* o *negativas* son más delgadas en su centro que en su periferia; un haz de luz de rayos paralelos que incida sobre una lente negativa divergirá de un punto llamado foco virtual.

El *foco principal* (o *punto focal*) de una lente delgada con caras esféricas es el punto F donde se enfocan los rayos paralelos y próximos al eje óptico; el foco es real para una lente convergente y virtual para una lente divergente. La *distancia focal* f es la distancia que hay del foco principal a la lente. Como cada lente en la Fig. 38-1 se puede invertir sin alterar los rayos, existen dos puntos focales simétricos para cada lente.



a) Lente convergente

b) Lente divergente

Fig. 38-1

RELACIÓN OBJETO-IMAGEN para lentes convergentes y divergentes:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$$

donde p es la distancia objeto medida desde la lente, q es la distancia imagen medida desde la lente y f es la distancia focal medida desde la lente. Se considera que las lentes son delgadas y los rayos de luz *paraxiales* (los más cercanos al eje). Entonces

- p es positiva para un objeto real y negativa para un objeto virtual (véase el capítulo 39).

- q es positiva para una imagen real y negativa para una imagen virtual.
- f es positiva para una lente convergente y negativa para una lente divergente.

También,

$$\text{Amplificación lineal} = \frac{\text{tamaño de la imagen}}{\text{tamaño del objeto}} = \frac{\text{distancia entre la imagen y la lente}}{\text{distancia entre el objeto y la lente}} = \left|\frac{q}{p}\right|$$

Las lentes convergentes forman imágenes invertidas y reales de objetos que se localicen fuera del foco principal. Cuando el objeto se localiza entre el foco principal y la lente, la imagen es virtual (y del mismo lado en que se encuentra el objeto), derecha y montada.

Las lentes divergentes sólo producen imágenes virtuales y derechas, y más pequeñas que el objeto.

ECUACIÓN DEL FABRICANTE DE LENTES:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

donde n es el índice de refracción del material de que está hecha la lente, y r_1, r_2 son los radios de curvatura de las caras de la lente. Esta ecuación se cumple para todo tipo de lentes. Los radios de curvatura, r, se toman como positivos para las caras convexas y negativos para las caras cóncavas.

Si una lente con índice de refracción n_1 se sumerge en material con índice n_2, entonces n, en la ecuación del fabricante de lentes, se debe sustituir por n_1/n_2.

LA POTENCIA DE UNA LENTE en *dioptrías* (m^{-1}) es igual a $1/f$, donde f es la distancia focal expresada en metros.

LENTES EN CONTACTO: Cuando dos lentes delgadas que tienen distancias focales f_1 y f_2 están en contacto, la distancia focal de la combinación está dada por

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

Para lentes en estrecho contacto, la potencia de la combinación es igual a la suma de sus potencias individuales.

PROBLEMAS RESUELTOS

38.1 Un objeto OO' tiene 4.0 cm de altura y se encuentra a 20 cm de una lente convexa de distancia focal +12 cm. Determinar la posición y altura de la imagen II' *a*) por construcción y *b*) analíticamente.

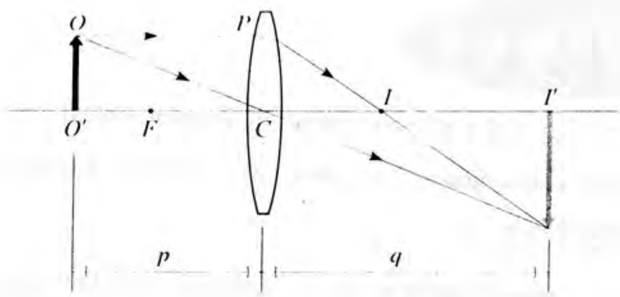


Fig. 38-2

a) Los dos rayos principales que salen de O ubicarán la imagen (véase la Fig. 38-2).

1) El rayo OP, paralelo al eje principal, después de la refracción debe pasar por el foco principal F.

2) La desviación de un rayo que pasa por el centro óptico C de la lente delgada es poco apreciable. Entonces se puede dibujar al rayo OCI como una línea recta.

La intersección I de los dos rayos ubica la imagen de O. Entonces II' representa la posición y el tamaño de la imagen de OO'. La imagen es real, invertida, aumentada y a una distancia de la lente mayor que la del objeto. (Si el objeto se encontrara en II', la imagen en OO' sería real, invertida y más pequeña.)

b)
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f} \quad \text{o} \quad \frac{1}{20\,\text{cm}}+\frac{1}{q}=\frac{1}{12\,\text{cm}} \quad \text{o} \quad q=30\,\text{cm}$$

La imagen es real (por ser q positiva) y se encuentra a 30 cm atrás de la lente.

$$\frac{\text{Altura de la imagen}}{\text{Altura del objeto}}=\left|\frac{q}{p}\right|=\frac{30\,\text{cm}}{20\,\text{cm}}=1.5 \quad \text{o} \quad \text{altura de la imagen}=(1.5)(4.0\,\text{cm})=6.0\,\text{cm}$$

38.2 Un objeto OO' se encuentra a 5.0 cm enfrente de una lente convexa de distancia focal +7.5 cm. Determinar la posición y amplificación de su imagen II' *a*) por construcción y *b*) analíticamente.

a) Escoja dos rayos principales que salgan de O, como los mostrados en la Fig. 38-3.

1) El rayo OP, paralelo al eje principal, se refracta de tal manera que pasa por el foco principal F.

2) El rayo OCN pasa por el centro óptico de la lente y se dibuja como una línea recta.

Estos dos rayos no se interceptan, pero aparentemente se originan en el punto I. Entonces II' representa la posición de la imagen de OO'.

Cuando el objeto se encuentra entre F y C, la imagen es virtual, derecha y aumentada, como se muestra

b)
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f} \quad \text{o} \quad \frac{1}{5.0\ \text{cm}}+\frac{1}{q}=\frac{1}{7.5\,\text{cm}} \quad \text{o} \quad q=-15\,\text{cm}$$

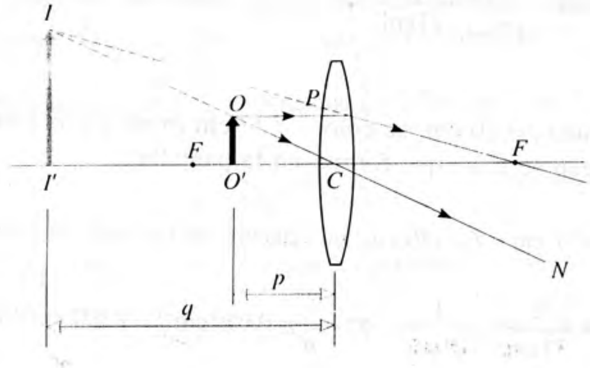


Fig. 38-3

Como q es negativa, la imagen es virtual (se encuentra del mismo lado de la lente que el objeto) y está a 15 cm enfrente de la lente. También

$$\text{Amplificación lineal} = \frac{\text{tamaño de la imagen}}{\text{tamaño del objeto}} = \left|\frac{q}{p}\right| = \frac{15\,\text{cm}}{5.0\,\text{cm}} = 3.0$$

38.3 Un objeto OO', de 9.0 cm de altura, se encuentra a 27 cm enfrente de una lente cóncava de distancia focal -18 cm. Determinar la posición y la altura de su imagen II' *a*) por construcción y *b*) analíticamente.

a) Escoja dos rayos principales que salgan de O, como se muestra en la Fig. 38-4

1) El rayo OP, paralelo al eje principal, se refracta hacia afuera en la dirección D como si saliera del foco principal F.

2) El rayo que pasa por el centro óptico de la lente se dibuja como una línea recta OC.

Entonces II' es la imagen de OO'. Las imágenes formadas por lentes cóncavas o divergentes son virtuales, derechas y pequeñas.

b) $$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad \text{o} \quad \frac{1}{27\,\text{cm}} + \frac{1}{q} = -\frac{1}{18\,\text{cm}} \quad \text{o} \quad q = -10.8\,\text{cm} = -11\,\text{cm}$$

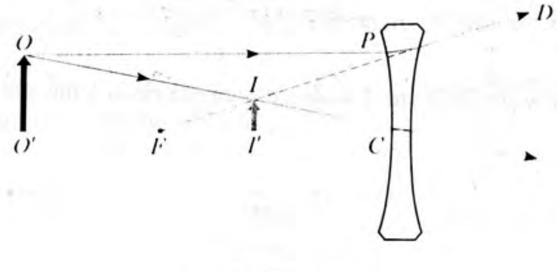


Fig. 38-4

Como q es negativa, la imagen es virtual y se encuentra a 11 cm al frente de la lente.

$$\text{Amplificación lineal} = \left|\frac{q}{p}\right| = \frac{10.8\,\text{cm}}{27\,\text{cm}} = 0.40 \quad \text{o} \quad \text{altura de la imagen} = (0.40)(9.0\,\text{cm}) = 3.6\,\text{cm}$$

38.4 Una lente convergente ($f = 20$ cm) se coloca a 37 cm frente a una pantalla, ¿Dónde se debe situar un objeto si su imagen se tiene que formar en la pantalla?

Se sabe que $q = +37$ cm y $f = +20$ cm. La ecuación de las lentes nos da

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{37\,\text{cm}} = \frac{1}{20\,\text{cm}} \quad \text{y} \quad \frac{1}{p} = 0.050\,\text{cm}^{-1} - 0.027\,\text{cm}^{-1} = 0.023\,\text{cm}^{-1}$$

de donde $p = 43.5$ cm. El objeto se debe colocar a 44 cm de la lente.

38.5 Calcule la posición y distancia focal de la lente convergente que proyectará sobre una pantalla la imagen de una lámpara con una amplificación de 4 veces. La lámpara y la pantalla se encuentran separadas 10.0 m.

De $p + q = 10.0$ y $q = 4p$, se encuentra $p = 2.0$ m y $q = 8.0$ m. Entonces

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2.0\,\text{m}} + \frac{1}{8.0\,\text{m}} = \frac{5}{8.0\,\text{m}} \quad \text{o} \quad f = \frac{8.0\,\text{m}}{5} = +1.6\,\text{m}$$

38.6 ¿Cuáles son las dos posiciones en que una lente convergente de distancia focal +9.00 cm formará las imágenes de un objeto sobre una pantalla colocada a 40.0 cm del objeto?

De $p + q = 40.0$ cm y $f = +9.00$ cm, se tiene

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{40.0\,\text{cm} - p} = \frac{1}{9.0\,\text{cm}} \quad \text{o} \quad p^2 - 40.0p + 360 = 0$$

Al utilizar la solución de las ecuaciones de segundo grado

$$p = \frac{40.0 \pm \sqrt{1600 - 1440}}{2}$$

de donde $p = 13.7$ cm y $p = 26.3$ cm. Las dos posiciones de la lente son 13.7 cm y 26.3 cm medidas desde el objeto.

38.7 Una lente convergente con 50 cm de distancia focal forma una imagen real que es 2.5 veces más grande que el objeto. ¿Qué tan lejos se encuentra el objeto de la imagen?

Como la amplificación es de 2.5, se tiene que $q = 2.5p$. Entonces

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{2.5p} = \frac{1}{50\,\text{cm}} \quad \text{o} \quad p = 70\,\text{cm}$$

Esto nos da $q = (2.5)(70\text{ cm}) = 175$ cm. Así que la distancia requerida es

$$q + p = 70\text{ cm} + 175\text{ cm} = 245\text{ cm} = 2.5\text{ m}$$

38.8 Una lente de distancia focal f proyecta sobre una pantalla la imagen de un objeto luminoso amplificado M veces. Demuestre que la distancia de la lente a la pantalla es $f(M + 1)$.

La imagen es real, ya que ésta se puede ver en una pantalla, y por lo mismo $q > 0$. Entonces tenemos

$$M = \frac{q}{p} = q\left(\frac{1}{p}\right) = q\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{q}\right) = \frac{q}{f} - 1 \quad \text{o} \quad q = f(M+1)$$

38.9 Una lente tiene una cara convexa con un radio de curvatura de 20 cm y la otra cara es cóncava con un radio de curvatura de 40 cm. La lente está hecha de vidrio con índice de refracción 1.54. Calcule la distancia focal de la lente y diga si es una lente convergente o divergente.

En primer lugar, advierta que $r_1 > 0$ y $r_2 > 0$, porque las dos superficies tienen sus centros de curvatura a la derecha. Como consecuencia,

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = (1.54 - 1)\left(\frac{1}{20\,\text{cm}} - \frac{1}{40\,\text{cm}}\right) = \frac{0.54}{40\,\text{cm}} \quad \text{o} \quad f = +74\,\text{cm}$$

Como f tiene signo positivo, la lente es convergente.

38.10 Una lente biconvexa tiene sus caras con radios de curvatura 18 y 20 cm. Cuando el objeto se encuentra a 24 cm de la lente, se forma una imagen a 32 cm de la misma. Determine *a*) la distancia focal de la lente y *b*) el índice de refracción del material de que está hecha la lente.

a) $$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{24\,\text{cm}} + \frac{1}{32\,\text{cm}} = \frac{7}{96\,\text{cm}} \quad \text{o} \quad f = \frac{96\,\text{cm}}{7} = +13.7\,\text{cm} = 14\,\text{cm}$$

b) $$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad \text{o} \quad \frac{1}{13.7} = (n-1)\left(\frac{1}{18\,\text{cm}} - \frac{1}{-20\,\text{cm}}\right) \quad \text{o} \quad n = 1.7$$

38.11 Una lente de vidrio ($n = 1.50$) tiene una distancia focal de +10 cm cuando se encuentra en aire. Calcule la distancia focal si ésta se encuentra en agua ($n = 1.33$).

Se utiliza

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

se obtiene,

$$\textit{Para el aire}: \quad \frac{1}{10} = (1.50 - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\textit{Para el agua}: \quad \frac{1}{f} = \left(\frac{1.50}{1.33} - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Si se divide una ecuación entre la otra obtenemos $f = 5.0/0.128 = 39$ cm.

38.12 Las dos caras de una lente biconvexa tienen radio de curvatura 20.0 cm. El índice de refracción del vidrio es 1.50. Calcule la distancia focal de la lente *a*) cuando se encuentra en aire y *b*) cuando se sumerge en disulfuro de carbono ($n = 1.63$).

Se utiliza

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

a)
$$\frac{1}{f} = (1.50 - 1)\left(\frac{1}{20\,\text{cm}} - \frac{1}{-20\,\text{cm}}\right) \quad \text{o} \quad f = +20.0\,\text{cm}$$

b)
$$\frac{1}{f} = \left(\frac{1.50}{1.63} - 1\right)\left(\frac{1}{20\,\text{cm}} - \frac{1}{-20\,\text{cm}}\right) \quad \text{o} \quad f = -125\,\text{cm}$$

Aquí, la distancia focal es negativa y por lo mismo la lente es divergente.

38.13 Dos lentes delgadas, de distancias focales +9.0 y −6.0 cm, se ponen en contacto. Calcule la distancia focal de la combinación.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{9.0\,\text{cm}} - \frac{1}{6.0\,\text{cm}} = -\frac{1}{18\,\text{cm}} \quad \text{o} \quad f = -18\,\text{cm (divergente)}$$

38.14 Una lente acromática se forma con dos lentes delgadas en contacto, cuyas potencias son +10.0 y −6.0 dioptrías. Determine la potencia y la distancia focal de la combinación.

Como los recíprocos de las distancias focales se suman,

$$\text{Potencia} = +10.0 - 6.0 = +4.0\,\text{dioptrías} \quad \text{y} \quad \text{distancia focal} = \frac{1}{\text{potencia}} = \frac{1}{+4.0\,\text{m}^{-1}} = +25\,\text{cm}$$

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

38.15 Dibuje los diagramas para mostrar cualitativamente la posición, la naturaleza (real o virtual, derecha o invertida) y el tamaño de la imagen formada por una lente convergente de distancia focal f para las siguientes posiciones del objeto: *a*) en infinito, *b*) mayor que $2f$, *c*) igual a $2f$, *d*) entre $2f$ y f, *e*) igual a f, *f*) menor que f.

38.16 Determine la naturaleza (real o virtual, derecha o invertida), posición y amplificación lineal de la imagen formada por una lente delgada convergente de distancia focal +100 cm cuando la distancia del objeto a la lente es *a*) 150 cm, *b*) 75.0 cm. *Resp.* *a*) real, invertida, 300 cm atrás de la lente, 2 : 1; *b*) virtual, derecha, 300 cm delante de la lente, 4 : 1

38.17 ¿Para qué posiciones (dos) del objeto su imagen será amplificada 8.0 veces por una lente de distancia focal +4.0 cm? *Resp.* 4.5 cm de la lente (imagen real e invertida), 3.5 cm de la lente (imagen virtual y derecha)

38.18 ¿Cuál es la naturaleza (convergente o divergente) y la distancia focal de una lente que formará una imagen real que tenga un tercio de las dimensiones de un objeto localizado a 9.0 cm de la lente? *Resp.* convergente, +2.3 cm

38.19 Describa completamente la imagen de un objeto que tiene 10 cm de altura y se encuentra a 28 cm de una lente divergente con distancia focal −7.0 cm. *Resp.* virtual, derecha, más pequeña, a 5.6 cm delante de la lente, 2.0 cm de altura

38.20 Calcule la distancia focal de una lente que producirá una imagen derecha y a 10 cm de la lente cuando la distancia del objeto a la lente es *a*) 200 cm, *b*) muy grande. *Resp.* *a*) −11 cm; *b*) −10 cm

38.21 Un objeto luminoso y una pantalla están separados 12.5 m. ¿Cuál es la posición y la distancia focal de una lente que proyectará sobre la pantalla una imagen del objeto con una amplificación de 24 veces? *Resp.* 0.50 m del objeto, +0.48 m

38.22 Una lente plana cóncava tiene una cara esférica de radio 12 cm y una distancia focal de −22.2 cm. Calcule el índice de refracción del material de la lente. *Resp.* 1.5

38.23 Las caras de una lente convexa-cóncava tienen radios de curvatura 3.0 y 4.0 cm respectivamente, y la lente está hecha con un vidrio de índice de refracción 1.6. Determine *a*) su distancia focal y *b*) la amplificación lineal de la imagen cuando el objeto se encuentra a 28 cm de la lente. *Resp.* *a*) +20 cm; *b*) 2.5 : 1

38.24 Una lente de vidrio biconvexa ($n = 1.50$) tiene radios de curvatura de 8 cm en cada una de sus caras. Calcule su distancia focal cuando se encuentra en aire y cuando se sumerge en agua ($n = 1.33$). *Resp.* +8 cm, + 0.3 m

38.25 Dos lentes delgadas, de distancias focales +12 y −30 cm, están en contacto. Calcule la distancia focal y la potencia de la combinación. *Resp.* +20 cm, +5.0 dioptrías

38.26 ¿Cuál debe ser la distancia focal de una tercera lente delgada que se pone en contacto con dos lentes delgadas de 16 cm y −23 cm de distancia focal para generar una lente con distancia focal de −12 cm? *Resp.* −9.8 cm

capítulo 39

Instrumentos ópticos

COMBINACIÓN DE LENTES DELGADAS: Para localizar la imagen producida por la combinación de dos lentes, 1) calcule la posición de la imagen producida por la primera lente sola, es decir, sin tomar en cuenta la segunda lente; 2) ahora, considere la imagen como objeto para la segunda lente, y localice la imagen producida por la segunda lente sola. Esta última imagen es la imagen requerida.

Si la imagen formada sólo por la primera lente está en la parte posterior de la segunda lente, entonces la imagen es un objeto virtual para la segunda lente y la distancia desde ésta es considerada negativa.

EL OJO se utiliza como una lente de foco variable para formar una imagen sobre la retina en la parte posterior del mismo. El *punto cercano* del ojo, representado por d_n, es la distancia más cercana al ojo con la cual un objeto puede verse con claridad. Para un ojo normal, d_n es de aproximadamente 25 cm. Las personas que padecen *hipermetropía* sólo pueden distinguir objetos que están lejos de su ojo; las personas *miopes* sólo pueden ver objetos que estén cerca de su ojo.

UNA LUPA es una lente convergente utilizada para formar una imagen virtual, recta y amplificada de un objeto colocado dentro de su distancia focal. La amplificación debida a un amplificador con distancia focal f es $(d_n/f) + 1$ si la imagen es emitida en el punto cercano. Alternativamente, si la imagen está en el infinito, la amplificación es d_n/f.

UN MICROSCOPIO que consiste de dos lentes convergentes, una lente objetivo (distancia focal f_o) y una lente ocular (f_e), tiene

$$\text{Amplificación} = \left(\frac{d_n}{f_e} + 1\right)\left(\frac{q_o}{f_o} - 1\right)$$

donde q_o es la distancia desde el objetivo a la imagen que se forma. Usualmente q_o es cercana a los 18 cm.

UN TELESCOPIO que tiene una lente objetivo (o espejo) con distancia focal f_o y una ocular con distancia f_e da una amplificación $M = f_o/f_e$.

PROBLEMAS RESUELTOS

39.1 Cierta persona miope no puede distinguir objetos que estén más allá de 80 cm de su ojo. ¿Cuál es el poder en dioptrías de las lentes de sus anteojos, los cuales le permitirán ver los objetos distantes con claridad?

La imagen debe estar en el mismo lado de la lente en el que se encuentre el objeto distante (por lo que la imagen es virtual y $q = -80$ cm) y más próxima a la lente que el objeto (así es que están indicadas lentes negativas o divergentes). Como el objeto está a una gran distancia, p es muy grande y $1/p$ es prácticamente cero. Entonces

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f} \quad \text{o} \quad 0-\frac{1}{80}=\frac{1}{f} \quad \text{de donde} \quad f=-80 \text{ cm (divergente)}$$

y

$$\text{Poder en dioptrías} = \frac{1}{f \text{ en metros}} = \frac{1}{-0.80 \text{ m}} = -1.3 \text{ dioptrías}$$

39.2 Cierta persona hipermétrope no puede ver con claridad objetos que estén a menos de 75 cm de sus ojos. Determine la potencia de las lentes de sus anteojos que le permitirán leer a una distancia de 25 cm.

La imagen debe estar en el mismo lado de la lente donde está el escrito (por lo que la imagen es virtual y $q = -75$ cm) y más alejada de la lente que el texto (así que se recomiendan lentes convergentes o positivas).

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{25}-\frac{1}{75} \quad \text{o} \quad f=+37.5 \text{ cm}$$

y

$$\text{Potencia} = \frac{1}{0.375 \text{ m}} = 2.7 \text{ dioptrías}$$

39.3 Una lente de proyección, con distancia focal de 30 cm, proyecta la imagen de una diapositiva de $2.0 \text{ cm} \times 3.0 \text{ cm}$ sobre una pantalla localizada a 10 m de la lente. Calcúlense las dimensiones de la imagen.

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{f}-\frac{1}{q}=\frac{1}{0.30}-\frac{1}{10}=3.23 \text{ m}^{-1}$$

así que

$$\text{Amplificación lineal de la imagen} = \left|\frac{q}{p}\right| = \frac{10 \text{ m}}{(1/3.23) \text{ m}} = 32$$

La longitud y el ancho de la transparencia están, cada uno, amplificados 32 veces

$$\text{Tamaño de la imagen} = (32 \times 2.0 \text{ cm}) \times (32 \times 3.0 \text{ cm}) = 64 \text{ cm} \times 96 \text{ cm}$$

39.4 Una cámara da una imagen clara de un paisaje distante cuando la lente está a 8 cm de la película. ¿Qué ajuste se requiere para conseguir una buena fotografía de un mapa colocado a 72 cm de la lente?

Cuando la cámara está enfocada para objetos distantes (para rayos paralelos), la distancia entre la lente y la película es la distancia focal de la lente, 8 cm. Para un objeto a 72 cm de distancia:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} = \frac{1}{8} - \frac{1}{72} \quad \text{o} \quad q = 9\,\text{cm}$$

La lente deberá moverse alejándose de la película una distancia de $(9 - 8)$ cm = 1 cm.

39.5 Con una iluminación dada y una película determinada, la exposición correcta para la lente de una cámara colocada en $f/12$ es $(1/5)$ s. ¿Cuál es el tiempo de exposición adecuado para la lente que trabaja a $f/4$?

Un ajuste de $f/12$ significa que el diámetro del diafragma, u obturación de la lente, es $1/12$ de la distancia focal; $f/4$ significa que es $1/4$ de la distancia focal.

La cantidad de luz que pasa a través del diafragma es proporcional a su área y, por consiguiente, al cuadrado de su diámetro. Como el diámetro de la obturación en $f/4$ es el triple que en $f/12$, $3^2 = 9$ veces más luz pasará a través de lentes en $f/4$ y la exposición correcta en $f/4$ es

$$(1/9)(\text{tiempo de exposición en } f/12) = (1.45)\ \text{s}$$

39.6 Una persona que se dedica a grabar objetos y que tiene vista normal utiliza una lente convergente de distancia focal de 8.0 cm, la cual sostiene muy cerca de sus ojos. ¿A qué distancia del trabajo debe colocarse la lente y cuál es el poder de amplificación de ésta?

Método 1

Cuando se utiliza una lente convergente como vidrio de aumento, el objeto está entre la lente y el plano focal principal. La imagen virtual, derecha y alargada se forma a la distancia de visión precisa, 25 cm del ojo. Tenemos

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad \text{o} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{-25\,\text{cm}} = \frac{1}{8.0\,\text{cm}} \quad \text{o} \quad p = \frac{200}{33} = 6.06\,\text{cm} = 6.1\ \text{cm}$$

y

$$\text{Poder de amplificación} = \left|\frac{q}{p}\right| = \frac{25\,\text{cm}}{6.06\,\text{cm}} = 4.1\,\text{diámetros}$$

Método 2

Por la fórmula,

$$\text{Amplificación} = \frac{d_n}{f} + 1 = \frac{25}{8.0} + 1 = 4.1$$

39.7 Dos lentes positivas tienen distancias focales de +2.0 cm y +5.0 cm y están separadas 14 cm como se muestra en la Fig. 39-1. Un objeto AB se coloca a 3.0 cm frente a la lente de +2.0. Determínese la posición y la amplificación de la imagen final $A''B''$ formada por la combinación de las lentes.

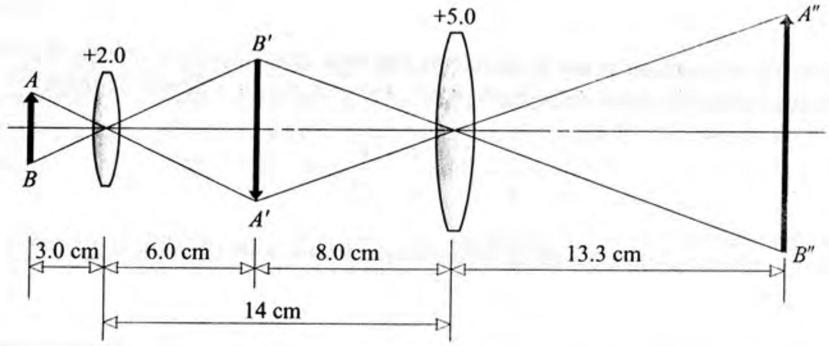


Fig. 39-1

Para localizar la imagen $A'B'$ formada sólo por la lente de +2.0:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} = \frac{1}{2.0} - \frac{1}{3.0} = \frac{1}{6.0} \quad \text{o} \quad q = 6.0\,\text{cm}$$

La imagen $A'B'$ es real e invertida y está a 6.0 cm detrás de la lente de +2.0.

Para localizar la imagen final $A''B''$: la imagen $A'B'$ está a (14 − 6.0) cm = 8.0 cm enfrente de la lente de +5.0 y se toma como un objeto real para esta lente.

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{5.0} - \frac{1}{8.0} \quad \text{o} \quad q = 13.3\,\text{cm}$$

$A''B''$ es real y derecha y se forma a 13 cm desde la lente de +5. Entonces,

$$\text{Amplificación total lineal} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \times \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} = \frac{6.0}{3.0} \times \frac{13.3}{8.0} = 3.3$$

Nótese que la amplificación producida por la combinación de las lentes es el producto de las amplificaciones individuales.

39.8 En un microscopio compuesto, como se muestra en la Fig. 39-2, el objetivo y el ocular tienen distancias focales de +0.80 y +2.5 cm, respectivamente. La imagen real $A'B'$ formada por el objetivo está a 16 cm de éste. Determine la amplificación total si el ojo se mantiene cerca del ocular y se observa la imagen virtual $A''B''$ a una distancia de 25 cm.

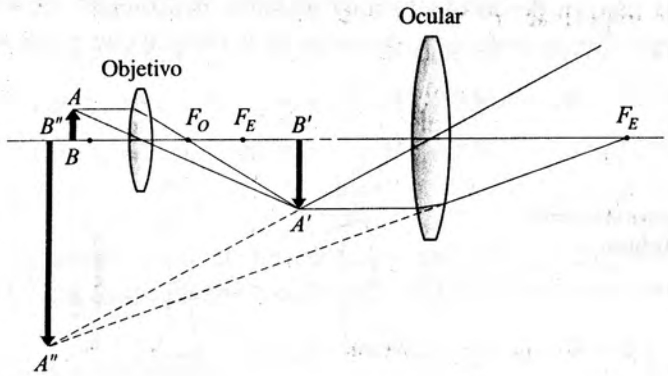


Fig. 39-2

Método 1

Sea p_O = distancia del objeto al objetivo
q_O = distancia de la imagen real al objetivo

$$\frac{1}{p_O} = \frac{1}{f_O} - \frac{1}{q_O} = \frac{1}{0.80} - \frac{1}{16} = \frac{19}{16}\,\text{cm}^{-1}$$

y así el objetivo produce una amplificación lineal de

$$\left|\frac{q_O}{p_O}\right| = (16\,\text{cm})\left(\frac{19}{16}\,\text{cm}^{-1}\right) = 19$$

El poder de amplificación del ocular es

$$\left|\frac{q_E}{p_E}\right| = \left|q_E\left(\frac{1}{f_E} - \frac{1}{q_E}\right)\right| = \left|\frac{q_E}{f_E} - 1\right| = \left|\frac{-25}{+2.5} - 1\right| = 11$$

Por lo tanto, el poder de amplificación del instrumento es $19 \times 11 = 2.1 \times 10^2$ diámetros.

Alternativamente, bajo las condiciones establecidas, el poder de amplificación del ocular puede ser calculado como

$$\frac{25}{f_E} + 1 = \frac{25}{2.5} + 1 = 11$$

Método 2

Por medio de la fórmula, con $q_O = 16$ cm,

$$\text{Amplificación} = \left(\frac{25}{2.5} + 1\right)\left(\frac{16}{0.8} - 1\right) = 2.1 \times 10^2$$

39.9 La lente del telefoto que se muestra en la Fig. 39-3 consiste en una lente convergente de distancia focal +6.0 cm colocada a 4.0 cm frente a una lente divergente de distancia focal de −2.5 cm. *a*) Localice la imagen de un objeto muy distante. *b*) Compare el tamaño de la imagen formada por esta combinación de lentes con el tamaño de la imagen que puede ser producida sólo por la lente convergente.

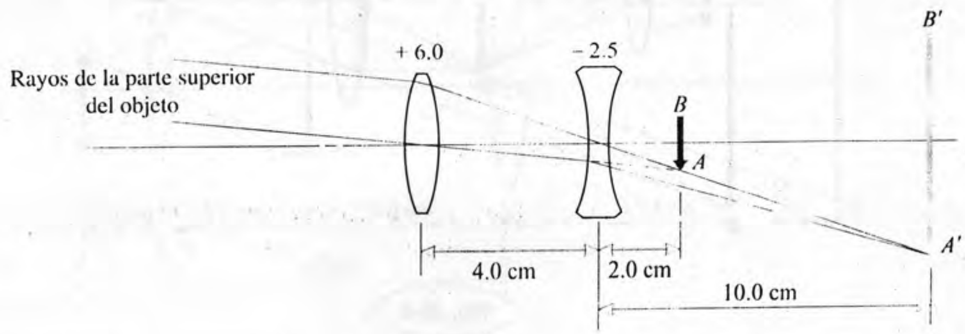


Fig. 39-3

a) Si no se emplea la lente negativa, la imagen AB se formaría en el plano principal de la lente de +6.0, a 6.0 cm de distancia de dicha lente. La lente negativa disminuye la convergencia de los rayos refractados por la lente positiva y hace que se enfoquen en $A'B'$ en lugar de en AB.

La imagen AB (que se habría formado por la lente +6.0 sola) está a 6.0 − 4.0 = 2.0 cm al otro lado de la lente −2.5 y se toma como el objeto (virtual) para esta lente. Entonces, $p = -2.0$ cm (negativa debido a que AB es virtual) y

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} = -\frac{1}{2.5\,\text{cm}} + \frac{1}{2.0\,\text{cm}} = \frac{1}{10\,\text{cm}} \quad \text{o} \quad q = +10\,\text{cm}$$

La imagen final $A'B'$ es real y está a 10 cm del otro lado de la lente negativa.

b)
$$\text{Amplificación lineal de la lente negativa} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \left|\frac{q}{p}\right| = \frac{10\,\text{cm}}{2.0\,\text{cm}} = 5.0$$

así que la lente divergente incrementa la amplificación por un factor de 5.0.

39.10 Cierto microscopio tiene dos lentes objetivo intercambiables (3.0 mm y 7.0 mm) y dos oculares intercambiables (3.0 cm y 5.0 cm). ¿Qué amplificación puede ser obtenida con el microscopio, si la distancia entre el ocular y los objetivos es de 17 cm?

Debido a que la imagen formada por los objetivos queda cerca de los oculares, $q_O = 17$ cm. Entonces de la fórmula para la amplificación en un microscopio, con $d_n = 25$ cm, obtenemos las siguientes posibilidades para M:

Para $f_E = 3$ cm, $f_O = 0.3$ cm: $M = (9.33)(56.6) = 528 = 5.3 \times 10^2$

Para $f_E = 3$ cm, $f_O = 0.7$ cm: $M = (9.33)(24.2) = 226 = 2.3 \times 10^2$

Para $f_E = 5$ cm, $f_O = 0.3$ cm: $M = (5)(56.6) = 283 = 2.8 \times 10^2$

Para $f_E = 5$ cm, $f_O = 0.7$ cm: $M = (5)(24.2) = 121 = 1.2 \times 10^2$

39.11 Calcule el poder de amplificación de un telescopio que tiene un objetivo y un ocular de distancias focales +60 y +3.0 cm, respectivamente, cuando está enfocado para rayos paralelos.

$$\text{Poder de amplificación} = \frac{\text{distancia focal del objetivo}}{\text{distancia focal del ocular}} = \frac{60\,\text{cm}}{3.0\,\text{cm}} = 20\,\text{diámetros}$$

39.12 *Los telescopios de reflexión* se construyen utilizando un espejo cóncavo, en lugar del lente objetivo, para poder enfocar los objetos distantes. ¿Cuál es el poder de amplificación de un telescopio que tiene un espejo con un radio de curvatura de 250 cm y un ocular cuya distancia focal es de 5.0 cm?

Como para un telescopio de refracción (uno con dos lentes), $M = f_O/f_E$, en este caso, $f_O = R/2 = 125$ cm y $f_E = 5.0$ cm. Así que $M = 25$.

39.13 Como se muestra en la Fig. 39-4, un objeto se coloca a 40 cm de una lente convergente que tiene $f = +8.0$ cm. Un espejo plano está 30 cm detrás de la lente. Determine la posición de todas las imágenes formadas en el sistema.

Para la lente

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} = \frac{1}{8.0} - \frac{1}{40} = \frac{4}{40} \quad \text{o} \quad q = 10\,\text{cm}$$

Esta imagen es $A'B'$ en la figura. Es real e invertida.

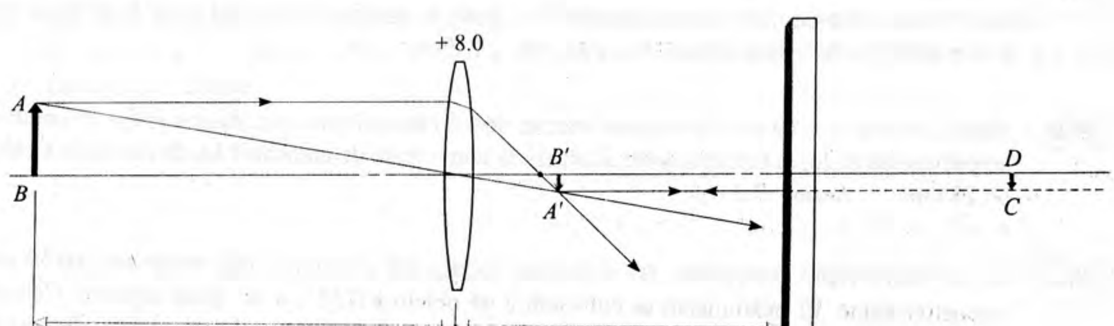


Fig. 39-4

$A'B'$ actúa como objeto para el espejo plano, colocado 20 cm más allá. Una imagen virtual CD se forma 20 cm atrás del espejo.

La luz reflejada por el espejo parece venir de una imagen en CD. La lente utiliza CD como objeto y da una imagen de él a la izquierda de la lente. La distancia q de la lente a esta última imagen se da por

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} = \frac{1}{8} - \frac{1}{50} = 0.105 \quad \text{o} \quad q = 9.5\,\text{cm}$$

Por lo tanto, las imágenes reales están localizadas a 10 cm a la derecha de la lente, y a 9.5 cm a la izquierda de la lente. (Esta última imagen está derecha.) Una imagen virtual invertida se encuentra a 20 cm atrás del espejo.

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

39.14 Cierta persona hipermétrope no puede ver con claridad objetos localizados a menos de 60.0 cm de sus ojos. Determine la distancia focal y el poder de las lentes de sus anteojos para que pueda leer libros a una distancia de 25.0 cm. *Resp.* +42.9 cm, +2.33 dioptrías

39.15 Cierta persona miope no puede ver con claridad objetos localizados más allá de 50 cm de sus ojos. Determine la distancia focal y el poder de los anteojos que le permitan ver objetos distantes con claridad. *Resp.* −50 cm, −2.0 dioptrías

39.16 Una lente de proyección se utiliza para producir imágenes de 2.4 m × 3.2 m de transparencias de 3.0 cm × 4.0 cm sobre una pantalla que se localiza a 25 cm de la lente. Calcule su distancia focal. *Resp.* 31 cm

39.17 Una cámara toma una fotografía tamaño natural de una flor cuando la lente está a 20 cm de la película. ¿Cuál debe ser la distancia entre la lente y la película para fotografiar una bandada de patos que vuelan sobre su cabeza? *Resp.* 10 cm

39.18 ¿Cuál es la máxima velocidad de obturación del lente de una cámara que tiene una lente con distancia focal de +10 cm y un diámetro de 2.0 cm? Si la exposición correcta en $f/6$ es (1/90) s, ¿cuál es la exposición necesaria cuando se cambia el diafragma a $f/9$? *Resp.* $f/5$, (1/40) s

39.19 ¿Cuál es el poder de amplificación de una lente con distancia focal de +2.0 cm cuando se utiliza como vidrio amplificador (lupa, o microscopio simple)? La lente se mantiene cerca del ojo y la imagen virtual se forma a una distancia de visión clara, 25 cm del ojo. *Resp.* 14

39.20 Cuando la distancia de un objeto a una lente es de 5.0 cm, se forma una imagen real a 20 cm de la lente. ¿Qué amplificación se logra con esta lente al utilizarla como lente de aumento? La distancia de visión más clara es de 25 cm. *Resp.* 7.3

39.21 En un microscopio compuesto, las distancias focales del objetivo y del ocular son +0.50 cm y +2.0 cm, respectivamente. El instrumento es enfocado a un objeto a 0.52 cm del lente objetivo. Calcule el poder de amplificación del microscopio si la imagen virtual la observa el ojo a una distancia de 25 cm. *Resp.* 3.4×10^2

39.22 Un telescopio astronómico de refracción tiene un poder de amplificación de 150 cuando se ajusta para un esfuerzo ocular mínimo utilizando un ocular de distancia focal +1.20 cm. *a*) Determine la distancia focal de la lente objetivo. *b*) ¿Qué tan separadas deben estar las dos lentes para que se pueda proyectar una imagen real de un objeto distante sobre una pantalla a 12.0 cm del ocular? *Resp.* *a*) +180 cm; *b*) 181 cm

39.23 El gran telescopio de Monte Palomar tiene como objetivo un espejo cóncavo de diámetro de 5.0 m y radio de curvatura de 46 m. ¿Cuál es el poder de amplificación del instrumento cuando se usa con un ocular de 1.25 cm de distancia focal? *Resp.* 1.8×10^3

39.24 Un telescopio astronómico con un lente objetivo de distancia focal +80 cm está enfocado sobre la Luna. ¿Cuánto debe sacarse el ocular para enfocar un objeto a 40 m de distancia? *Resp.* 1.6 cm

39.25 Una combinación de lentes contiene dos lentes de distancias focales +4.0 cm y +8.0 cm, las cuales están separadas 16 cm. Localice y describa la imagen de un objeto colocado a 12 cm de la lente de +4.0 cm. *Resp.* a 40 cm atrás de la lente de +8.0, real y derecha

39.26 Dos lentes, de distancias focales de +6.0 cm y −10 cm, se colocan espaciadas 1.5 cm una de la otra. Localice y describa la imagen de un objeto que se encuentra a 30 cm frente a la lente de +6.0 cm. *Resp.* 15 cm atrás de la lente negativa, real, invertida, 5/8 lo largo del objeto

39.27 Una lente telefoto consiste en una lente positiva de distancia focal +3.5 cm colocada a 2.0 cm frente de una lente negativa de distancia focal −1.8 cm. *a*) Localice la imagen de un objeto distante. *b*) Calcule la distancia focal de una sola lente que podría formar una imagen igual en tamaño a la que formaría la combinación. *Resp.* *a*) imagen real a 9.0 cm detrás de la lente negativa; *b*) +21 cm

39.28 Unos prismáticos tienen una lente objetivo de distancia focal +3.60 cm y un ocular negativo de distancia focal −1.20 cm. ¿Qué tan separadas deben de estar las dos lentes para que el observador vea un objeto distante a 25.0 cm de su ojo? *Resp.* 2.34 cm

39.29 Repita el problema 39.13 si la distancia entre el espejo plano y la lente es de 8.0 cm. *Resp.* a 6.0 cm (real) y a 24 cm (virtual) a la derecha de la lente

39.30 Resuelva el problema 39.13 si el espejo plano es reemplazado por un espejo cóncavo con 20 cm de radio de curvatura. *Resp.* a 10 cm (real e invertida), 10 cm (real, derecha), −40 cm (real e invertida) a la derecha de la lente

capítulo 40

Interferencia y difracción de la luz

LAS ONDAS COHERENTES son ondas que tienen la misma forma, la misma frecuencia y una diferencia de fase constante (esto es, la distancia entre las crestas de dos ondas, una de ellas adelantada o retrasada respecto a la otra, no cambia en el tiempo).

LA FASE RELATIVA de dos ondas coherentes que viajan a lo largo de la misma línea tienen determinada su posición relativa sobre la línea de propagación. Si la cresta de una onda coincide con la cresta de otra onda, se dice que las ondas están *en fase*. Si la cresta de una onda coincide con el valle de otra, las ondas están 180° (o media longitud de onda) *fuera de fase*.

LOS EFECTOS DE LA INTERFERENCIA se presentan cuando dos o más ondas coherentes se combinan. Si dos ondas coherentes de la misma amplitud se superponen, se presenta la *interferencia destructiva* (se anulan, se cancelan o aparece oscuridad) cuando las ondas están 180° fuera de fase. La *interferencia constructiva* (reforzamiento, brillantez) ocurre cuando las ondas están en fase.

LA DIFRACCIÓN se refiere al doblamiento o dispersión de las ondas alrededor de las orillas de una abertura y de los obstáculos opacos. Esta desviación de la luz de su trayectoria rectilínea da origen a los patrones de difracción, los cuales hacen que las orillas de las sombras se vean borrosas. También limita el tamaño de los detalles que se pueden observar y limita la precisión incluso de las mejores medidas.

DIFRACCIÓN POR UNA RANURA RECTA: Cuando un haz de luz de rayos paralelos de longitud de onda λ inciden normalmente sobre una rejilla de ancho D, atrás de la rejilla se ve un patrón de difracción. Se observa total oscuridad cuando el rayo desviado forma un ángulo $\theta_{n'}$ en la dirección de propagación del haz de luz incidente, y se cumple la relación,

$$n'\lambda = D \text{ sen } \theta_{n'}$$

Donde $n' = 1, 2, 3, \ldots$ es el *número de orden* de la banda de difracción oscura (*mínimo de intensidad*).

LÍMITE DE RESOLUCIÓN de dos objetos debido a la difracción: Si dos objetos se observan a través de un instrumento óptico, el patrón de difracción producido por la apertura del instrumento limita la posibilidad de distinguir un objeto de otro. Para que dos objetos sean distinguibles, el ángulo θ subtendido en la apertura por el objeto debe ser mayor que el valor de un ángulo crítico θ_c, por ser

$$\operatorname{sen}\theta_c = (1.22)\frac{\lambda}{D}$$

donde D es el diámetro de la abertura.

ECUACIÓN DE LA REJILLA DE DIFRACCIÓN: Una *rejilla de difracción* es un arreglo repetitivo de aberturas u obstáculos que altera la amplitud o la fase de una onda. Suele consistir en un número grande de ranuras paralelas igualmente espaciadas; la distancia entre ranuras es el periodo d de la rejilla. Cuando una onda de longitud λ es incidente al plano de una rejilla de periodo d, se observan máximos de intensidad, los cuales forman un ángulo θ_n en la normal, donde

$$n\lambda = d \operatorname{sen} \theta_n$$

Aquí, $n = 1, 2, 3, \ldots$ es el *número de orden* de la imagen difractada.

La misma relación se aplica a los máximos de intensidad en el patrón de interferencia de dos y tres ranuras. En estos casos, los máximos no están tan definidos como en el caso de la rejilla compuesta por cientos de ranuras. Los patrones se pueden hacer complejos si las ranuras son lo suficientemente anchas, de tal forma que el patrón de difracción de cada ranura muestre varios mínimos.

LA DIFRACCIÓN DE RAYOS X de longitud de onda λ por reflexión en una red cristalina está descrita por la *ecuación de Bragg*. Se observa una reflexión fuerte para ángulos rasantes ϕ_n (donde ϕ es el ángulo entre el plano de la red cristalina y el haz reflejado) dado por

$$n\lambda = 2d \operatorname{sen} \phi_n$$

donde d es la separación entre los planos reflejantes dentro de la red cristalina, y $n = 1, 2, 3,\ldots$ es el *orden* de reflexión.

LONGITUD DE CAMINO ÓPTICO EQUIVALENTE: En el mismo tiempo que le toma a un haz de luz recorrer una distancia d dentro de un material de índice de refracción n, el haz recorrería una distancia nd en el aire o en el vacío. Por esta razón, nd se define como la *longitud de camino óptico equivalente* del material.

PROBLEMAS RESUELTOS

40.1 Como se muestra en la Fig. 40-1, una película delgada de un material transparente con espesor d e índice n_f, en donde $n_2 > n_f > n_1$. ¿Por cuáles espesores interferirán los rayos 1 y 2 *a*) constructiva y *b*) destructivamente? Suponga que la longitud de onda de la luz es de 600 nm.

a) El rayo 2 viaja una distancia $2d$ mayor que la recorrida por el rayo 1. Los rayos se reforzarán si esta distancia es 0, λ, 2λ, 3λ,..., $n\lambda$, donde n es un entero. Para reforzar,

$$n\lambda = 2d \qquad \text{o} \qquad d = (\tfrac{1}{2}n)(600 \text{ nm}) = 300n \text{ nm}$$

Los tres valores más pequeños para d son 0, 300 nm y 600 nm.

b) Las ondas se anulan si éstas se encuentran 180° fuera de fase. Esto sucede cuando $2d$ vale $\frac{1}{2}\lambda$, $(\lambda + \frac{1}{2}\lambda)$, $(2\lambda + \frac{1}{2}\lambda)$,..., $(n\lambda + \frac{1}{2}\lambda)$,..., con n un entero. Por lo tanto, para la interferencia constructiva,

$$2d = n\lambda + \tfrac{1}{2}\lambda \qquad \text{o} \qquad d = \tfrac{1}{2}(n + \tfrac{1}{2})\lambda = (n + \tfrac{1}{2})(300)\text{ nm}$$

Los tres valores más pequeños para d son 150 nm, 450 nm y 750 nm.

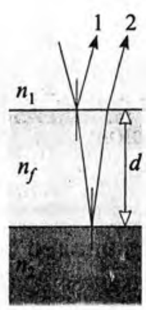


Fig. 40-1

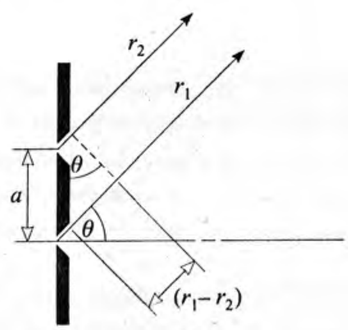


Fig. 40-2

40.2 Dos ranuras angostas paralelas (separadas a una distancia $d = 0.60$ mm) son iluminadas con un haz de luz de 500 nm de longitud de onda como se muestra en la Fig. 40-2. La luz que se difracta con un ángulo θ interfiere constructivamente; para cualquier otro ángulo la interferencia es destructiva. Calcule los tres valores de θ más pequeños para los cuales *a*) existe interferencia constructiva y *b*) hay interferencia destructiva. (Véase la Fig. 40-3.)

La diferencia de camino óptico es $(r_1 - r_2)$. De la figura,

$$\text{sen}\,\theta = \frac{(r_1 - r_2)}{a}$$

a) Para la interferencia constructiva, $(r_1 - r_2) = 0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ La correspondencia de tres valores más pequeños de θ se encuentran con

$$\operatorname{sen}\theta_0 = 0 \qquad \text{o} \qquad \theta_0 = 0$$

$$\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{500 \times 10^{-9}\ \text{m}}{6 \times 10^{-4}\ \text{m}} = 8.33 \times 10^{-4} \qquad \text{o} \qquad \theta_1 = 0.048°$$

$$\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{2(500 \times 10^{-9}\ \text{m})}{6 \times 10^{-4}\ \text{m}} = 16.7 \times 10^{-4} \qquad \text{o} \qquad \theta_2 = 0.095°$$

b) Para la interferencia destructiva, $(r_1 - r_2) = \frac{1}{2}\lambda$, $(\lambda + \frac{1}{2}\lambda)$, $(2\lambda + \frac{1}{2}\lambda), \ldots$ La correspondencia de los tres valores más pequeños de θ se calculan de

$$\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{250\ \text{nm}}{600\,000\ \text{nm}} = 4.17 \times 10^{-4} \qquad \text{o} \qquad \theta_1 = 0.024°$$

$$\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{750\ \text{nm}}{600\,000\ \text{nm}} = 0.001\,25 \qquad \text{o} \qquad \theta_2 = 0.072°$$

$$\operatorname{sen}\theta_3 = \frac{1250\ \text{nm}}{600\,000\ \text{nm}} = 0.002\,08 \qquad \text{o} \qquad \theta_3 = 0.12°$$

40.3 La luz monocromática emitida por una fuente puntual ilumina dos ranuras angostas paralelas y horizontales. Los centros de las dos ranuras están separados $d = 0.80$ mm, como se muestra en la Fig. 40-3. En una pantalla que se encuentra a 50 cm del plano de las ranuras se forma un patrón de interferencia. En el patrón, las franjas brillantes y las oscuras están uniformemente separadas. La distancia y mide 0.304 mm. Calcule la longitud λ de onda.

Note que la Fig. 40-3 no está a escala. Los rayos que salen de las ranuras serán prácticamente paralelos. Por lo mismo, podemos utilizar el resultado del problema 40.2 con $(r_1 - r_2) = n\lambda$ en las máximas (manchas brillantes), donde $n = 0, 1, 2, \ldots$ Entonces,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{(r_1 - r_2)}{d} \quad \text{convierte en} \quad n\lambda = d\operatorname{sen}\theta_n$$

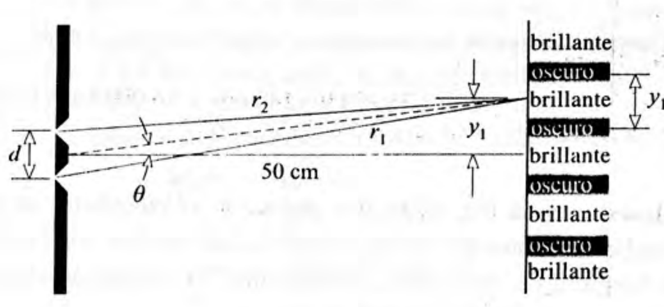


Fig. 40-3

O, alternativamente, es posible usar la ecuación de la rejilla de difracción, ya que una doble ranura es una rejilla con dos líneas. Los dos procedimientos dan $n\lambda = d$ sen θ_n.

De los datos del problema sabemos que la distancia del máximo central al primer máximo en ambos lados es 0.304 mm. Por tanto, de la Fig. 40-3,

$$\text{sen}\,\theta_1 = \frac{0.030\,4\text{ cm}}{50\text{ cm}} = 0.000\,608$$

Entonces, para $n = 1$,

$$n\lambda = d\text{ sen }\theta_n \qquad \text{se convierte en} \qquad (1)\lambda = (0.80\times10^{-3}\text{ m})(6.08\times10^{-4})$$

de donde $\lambda = 486$ nm, o para dos cifras significativas, 0.49×10^3 nm.

40.4 Repita el problema 40.1 para el caso en el cual $n_1 < n_f > n_2$, o bien, $n_1 > n_f < n_2$.

El experimento hace ver que, en esta situación, ocurre la cancelación cuando a está cercana a cero. Esto se debe al hecho de que, a menudo, la luz pasa por un desplazamiento de fase al reflejarse. En general, el proceso es un tanto complicado pero, para ángulos de incidencia menores que alrededor de 30°, es bastante directo. Entonces se tendrá una diferencia neta de fase de 180°, introducida entre los rayos interna y externamente reflejados. De este modo, cuando la película es muy delgada en comparación con λ y $d \approx 0$, habrá una diferencia aparente en las trayectorias para los dos rayos de $\frac{1}{2}\lambda$ y ocurrirá la cancelación. (Ésta no fue la situación del problema 40.1, porque los dos rayos se reflejaron externamente.)

Se presenta interferencia destructiva para $d = 0$, como acabamos de ver. Cuando $d = \frac{1}{2}\lambda$ se tiene una vez más la cancelación. Lo mismo sucede en $d = \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\lambda$. Por lo tanto, se tiene cancelación en $d = 0$, 300 nm y 600 nm.

Se tiene refuerzo cuando $d = \frac{1}{4}\lambda$, porque el rayo 2 actúa aun cuando hubiera recorrido una $\frac{1}{2}\lambda + (2)(\frac{1}{4}\lambda) = \lambda$ adicional. Nuevamente se presenta una interferencia constructiva cuando d se incrementa por $\frac{1}{2}\lambda$ y por λ. En cuanto a la interferencia constructiva, $d = 150$ nm, 450 nm y 750 nm.

40.5 Cuando la longitud de uno de los brazos del interferómetro de Michelson se incrementa ligeramente, 150 franjas oscuras barren el campo de visión. Si la luz utilizada tiene una longitud de onda λ de 480 nm, ¿cuál fue la distancia que recorrió el espejo colocado en dicho brazo?

Se observa un campo oscuro cuando los haces de luz en cada brazo están 180° fuera de fase. Conforme se incrementa $\frac{1}{2}\lambda$ la longitud de un brazo, la longitud del camino óptico (en el viaje de ida y regreso) se incrementa en λ y el campo de visión cambia de oscuro a brillante (claro) y nuevamente a oscuro. Cuando pasan 150 franjas, la longitud del brazo se incrementa en una cantidad

$$(150)(\tfrac{1}{2}\lambda) = (150)(240\text{ nm}) = 36\,000\text{ nm} = 0.036\,0\text{ mm}$$

40.6 Como se muestra en la Fig. 40-4, dos placas de vidrio planas se tocan en uno de sus extremos y están separadas en el otro por un espaciador. Si se ilumina con incidencia normal a la vertical y con una luz de longitud de onda con $\lambda = 589.0$ nm, cinco franjas oscuras resultan de una orilla a otra (D). ¿Cuál es el espesor del espaciador?

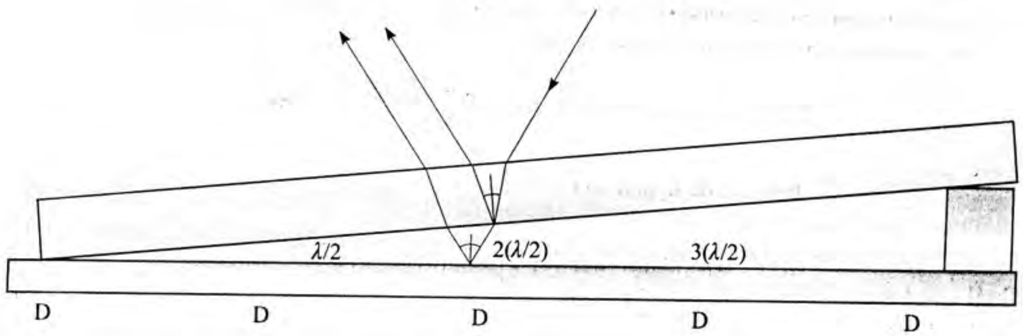


Fig. 40-4

El patrón de interferencia se obtiene por la superposición del haz reflejado en la cara superior de la cuña de aire y el reflejado en la cara inferior de la cuña. Las dos reflexiones son de naturaleza diferente, ya que en la cara superior la reflexión se da en una interfaz de un medio (aire) de bajo índice de refracción, mientras que en la superficie inferior ocurre en la interfaz con un medio (vidrio) de alto índice de refracción. En esta situación, en la reflexión se introduce un cambio en la fase de 180° entre los dos haces reflejados. Esto explica la presencia de una franja oscura en el extremo izquierdo.

Conforme uno se mueve de una franja oscura a otra, el haz que se propaga dentro de la cuña se retrasa a causa de la diferencia de la longitud del camino λ. Como el haz atraviesa dos veces la cuña (de arriba hacia abajo y de regreso), el espesor de la cuña cambia por $\frac{1}{2}\lambda$ conforme uno se desplaza de una franja a otra. Entonces,

$$\text{Grosor del espaciador} = 4(\tfrac{1}{2}\lambda) = 2(589.0 \text{ nm}) = 1178 \text{ nm}$$

40.7 En un experimento utilizado para mostrar los *anillos de Newton*, se coloca una lente plano-convexa sobre una placa de vidrio plana, como se muestra en la Fig. 40-5. (Se ha exagerado la curvatura.) Cuando la lente se ilumina a incidencia normal, un observador que ve desde arriba distinguirá anillos brillantes (claros) y oscuros centrados en el punto de contacto, el cual es oscuro. Calcule el espesor de la película de aire en *a*) el tercer anillo oscuro y *b*) en el segundo anillo brillante. Suponga que la luz utilizada tiene una longitud de onda de 500 nm.

a) El espesor de la película es cero en la mancha central. Éste aumenta en $\frac{1}{2}\lambda$ de un anillo oscuro al siguiente. (¿Por qué $\frac{1}{2}\lambda$?) Por consiguiente, en el tercer anillo oscuro,

$$\text{Espesor de la película} = 3(\tfrac{1}{2}\lambda) = 3(250 \text{ nm}) = 750 \text{ nm}$$

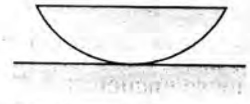


Fig. 40-5

b) El espesor de la película en el primer anillo brillante debe ser lo suficientemente grande para que la longitud de camino óptico aumente en $\frac{1}{2}\lambda$. Como el rayo atraviesa la película dos veces, el espesor en ese punto será $\frac{1}{4}\lambda$. Al ir de un anillo brillante a otro, el espesor de la película se incrementará en $\frac{1}{2}\lambda$. Por lo mismo en el segundo anillo brillante,

$$\text{Espesor de la película} = \tfrac{1}{4}\lambda + \tfrac{1}{2}\lambda = (0.750)(500\text{ nm}) = 375\text{ nm}$$

40.8 ¿Cuál es el espesor mínimo de una película de jabón para que ésta se vea oscura al ser observada con una luz de sodio ($\lambda = 589.3$ nm) la cual refleja normalmente en la película? El índice de refracción de la solución jabonosa es $n = 1.38$.

En la Fig. 40-6 se muestra un diagrama. El rayo *b* recorre una longitud de camino óptico de $2nd = 2.76d$. Además, hay entre los haces reflejados un retardo en la fase de 180° o $\frac{1}{2}\lambda$, causa del proceso de reflexión, como se describe en los problemas 40.4 y 40.6.

La interferencia destructiva (y oscuridad) se presenta si el retardo entre los dos haces es $\frac{1}{2}\lambda$ o $\frac{3}{2}\lambda$ o $\frac{5}{2}\lambda$ y así sucesivamente. Por tanto, para tener oscuridad,

$$2.76d + \tfrac{1}{2}\lambda = n(\tfrac{1}{2}\lambda) \qquad \text{donde} \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$

Cuando $n = 1$, entonces $d = 0$. Para $n = 3$, se tiene

$$d = \frac{\lambda}{2.76} = \frac{589.3\text{ nm}}{2.76} = 214\text{ nm}$$

como la película más delgada posible con espesor diferente de cero.

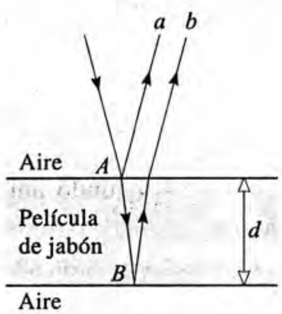


Fig. 40-6

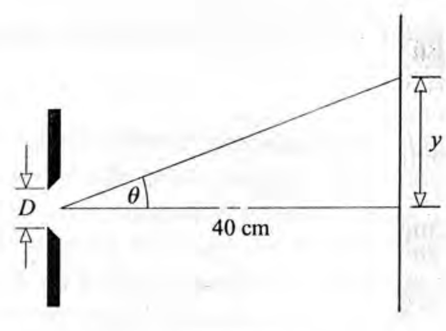


Fig. 40-7

40.9 Una sola ranura de ancho $D = 0.10$ mm se ilumina con una luz de rayos paralelos de longitud de onda 600 nm. En una pantalla que se encuentra a 40 cm de la ranura se observan las franjas de difracción. ¿A qué distancia se encuentra la tercera franja oscura de la franja brillante central? (Véase la Fig. 40-7.)

Para una sola ranura, la posición de las bandas oscuras está dada por la ecuación $n'\lambda = D \text{ sen } \theta_{n'}$. Entonces

$$\text{sen } \theta_3 = \frac{3\lambda}{D} = \frac{3(6.00 \times 10^{-7} \text{ m})}{0.10 \times 10^{-3} \text{ m}} = 0.018 \quad \text{o} \quad \theta = 1.0°$$

De la figura, $\tan \theta = y/40$ cm, y entonces

$$y = (40 \text{ cm})(\tan \theta) = (40 \text{ cm})(0.018) = 0.72 \text{ cm}$$

40.10 Una luz roja incide normalmente sobre una rejilla de difracción de 4000 líneas/cm, y la imagen de segundo orden se difracta 34.0° a partir de la normal. Calcule la longitud de onda de la luz.

De la ecuación de la rejilla de difracción $n\lambda = d \text{ sen } \theta$,

$$\lambda = \frac{d \text{ sen } \theta_2}{2} = \frac{\left(\frac{1}{4000} \text{ cm}\right)(0.559)}{2} = 6.99 \times 10^{-5} \text{ cm} = 699 \text{ nm}$$

40.11 La Fig. 40-8 muestra un montaje de laboratorio para realizar un experimento con una rejilla de difracción. La rejilla de difracción tiene 5000 líneas/cm y se encuentra a 1.00 m de la ranura, la cual se ilumina con una luz de sodio. En ambos lados de la ranura se colocan reglas de un metro de longitud, en un plano paralelo al plano de la rejilla. Un observador ubicado cerca de la rejilla ve imágenes virtuales de la ranura a lo largo de las reglas. Determine la longitud de onda de la luz si cada imagen de primer orden se localiza a 31.0 cm de la ranura.

$$\tan \theta_1 = 31.0/100 \quad \text{o} \quad \theta_1 = 17.2°$$

y entonces

$$\lambda = \frac{d \text{ sen } \theta_1}{1} = \frac{(0.000\,200 \text{ cm})(0.296)}{1} = 592 \times 10^{-7} \text{ cm} = 592 \text{ nm}$$

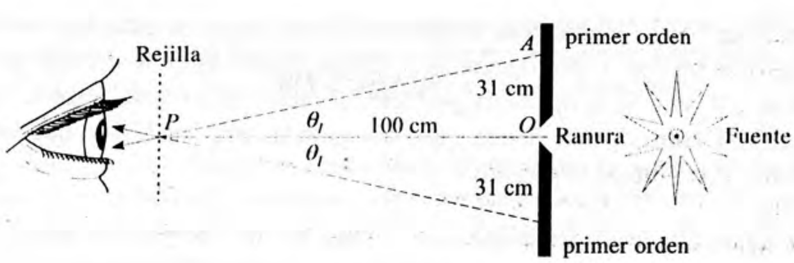


Fig. 40-8

40.12 Una luz verde de 540 nm de longitud de onda se difracta en una rejilla que tiene 2000 líneas/cm. *a*) Calcule la desviación angular de la imagen de tercer orden. *b*) ¿Puede existir una imagen de orden 10?

a) $$\operatorname{sen}\theta_3 = \frac{3\lambda}{d} = \frac{3(5.40\times10^{-5}\text{ cm})}{5.00\times10^{-4}\text{ cm}} = 0.324 \quad \text{o} \quad \theta = 18.9°$$

b) $$\operatorname{sen}\theta_{10} = \frac{10\lambda}{d} = \frac{10(5.40\times10^{-5}\text{ cm})}{5.00\times10^{-4}\text{ cm}} = 1.08 \quad \text{(no es posible)}$$

Ya que el valor de sen θ no puede exceder de 1, no es posible una imagen de orden diez.

40.13 Demuestre que en un espectro de luz blanca obtenido con una rejilla de difracción, el rojo (λ_r = 700 nm) de segundo orden se traslapa con el violeta (λ_v = 400 nm) de tercer orden.

$$\text{Para el rojo:} \quad \operatorname{sen}\theta_2 = \frac{2\lambda_r}{d} = \frac{2(700)}{d} = \frac{1400}{d} \quad (a \text{ en nm})$$

$$\text{Para el violeta:} \quad \operatorname{sen}\theta_3 = \frac{3\lambda_v}{d} = \frac{3(400)}{d} = \frac{1200}{d}$$

Como sen θ_2 > sen θ_3, $\theta_2 > \theta_3$. Entonces el ángulo de difracción para el segundo orden del rojo es mayor que el de tercer orden del violeta.

40.14 Un haz paralelo de rayos X es difractado por un cristal de sal de roca. La reflexión fuerte de primer orden se obtiene cuando el ángulo rasante (el ángulo entre la cara del cristal y el rayo) es de 6°50′. La separación entre los planos reflectores del cristal es 2.8 Å. ¿Cuál es la longitud de onda de los rayos X? (1 angstrom = 1 Å = 0.1 nm.)

Note que la ecuación de Bragg contiene el ángulo rasante, y no el ángulo de incidencia.

$$\lambda = \frac{2d\operatorname{sen}\phi_1}{1} = \frac{(2)(2.8\text{ Å})(0.119)}{1} = 0.67\text{ Å}$$

40.15 Dos fuentes de luz se encuentran separadas 50 cm, como se muestra en la Fig. 40-9. Éstas son observadas por un ojo a una distancia L. La pupila de entrada del ojo del observador tiene un diámetro de 3.0 mm. Si el ojo fuera perfecto, el factor límite para resolver las dos fuentes sería el de difracción. Dentro de este límite, ¿qué tan grande debe ser L para que las fuentes se continúen viendo como dos objetos separados?

En la figura se puede ver que sen $\theta = \theta_c$, donde sen $\theta_c = (1.22)(\lambda/D)$. Pero se ve en la Fig. 40-9 que sen θ_c es aproximadamente igual a s/L, ya que s es muy pequeño comparado con L. Al sustituir estos valores se obtiene

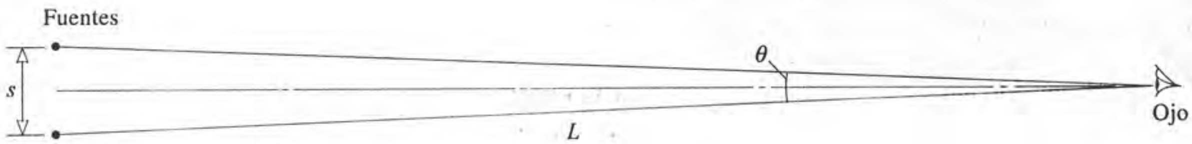


Fig. 40-9

$$L \approx \frac{sD}{1.22\lambda} \approx \frac{(0.50\,\text{m})(3.0\times10^{-3}\,\text{m})}{(1.22)(5.0\times10^{-7}\,\text{m})} = 2.5\,\text{km}$$

donde se ha tomado λ =500 nm, cerca del intervalo visible medio.

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

40.16 Dos fuentes sonoras emiten ondas idénticas de 20 cm de longitud de onda a lo largo del eje $+x$. ¿En qué separación de las fuentes una persona sobre el eje que se encuentra más allá de las fuentes, escuchará *a*) el sonido más fuerte y *b*) el sonido más débil? *Resp.* *a*) n(20 cm), donde $n = 0, 1, 2, \ldots$; *b*) 10 cm + n(20 cm)

40.17 En un experimento como el descrito en el problema 40.1, se observa una interferencia constructiva para los siguientes anchos de la película: 2.90×10^{-7} m, 5.80×10^{-7} m y 8.70×10^{-7} m. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda de la luz utilizada? *b*) ¿Para qué espesor de la película se observará interferencia destructiva? *Resp.* *a*) 580 nm; *b*) $145(1 + 2n)$ nm

40.18 Se realiza un experimento de doble ranura, con una luz de 480 nm y una separación de ranuras de 0.050 cm. ¿Para qué ángulo formado por la dirección de propagación incidente y el haz difractado se observará *a*) un máximo de tercer orden y *b*) el segundo mínimo a partir del máximo central? *Resp.* *a*) 0.17°; *b*) 0.083°

40.19 En el problema 40.18, si la distancia de la pantalla a la ranura es 200 cm, ¿qué tan lejos del máximo central estarán *a*) la mancha brillante de tercer orden y *b*) el segundo mínimo? *Resp.* *a*) 0.58 cm; *b*) 0.29 cm

40.20 Una luz roja de 644 nm, emitida por una fuente puntual, pasa por dos ranuras paralelas separadas 1.00 mm. Determine la distancia entre el máximo central y el tercer mínimo de interferencia que se forma sobre una pantalla paralela al plano de las ranuras y localizada a 1.00 m de las ranuras. *Resp.* 1.61 mm

40.21 Dos placas planas de vidrio forman una cuña donde el espaciador es una tira de papel aluminio. La película de aire contenida en la cuña se examina con la luz amarilla del sodio (589 nm) la cual se refleja normalmente en las dos superficies y se observan 42 mínimos de interferencia. Calcule el espesor de la tira de papel aluminio. *Resp.* 12.4 μm

40.22 Una mezcla de luz amarilla con longitud de onda 580 nm y luz azul con longitud de onda 450 nm incide normalmente sobre una película de aire de 290 nm de color. ¿Cuál es el color de la luz reflejada? *Resp.* azul

40.23 Repita el problema 40.1 si la película de aire se sustituye por una de fluido que tiene un índice de refracción de 1.40 y la onda de vacío de la incidencia de luz es de 600 nm. *Resp.* *a*) 0, 214 nm, 429 nm; *b*) 107 nm, 321 nm, 536 nm

40.24 Repita el problema 40.6 si el aire de la cuña se sustituye por un fluido que tiene un índice de refracción de 1.50. *Resp.* 785 nm

40.25 Una sola ranura de ancho 0.140 mm se ilumina con luz monocromática, observándose un patrón de difracción sobre una pantalla que se encuentra a 2.00 m de distancia. Si el segundo mínimo se encuentra a 16.0 mm del máximo central, ¿cuál es la longitud de onda de la luz? *Resp.* 560 nm

40.26 Una luz verde de 500 nm de longitud de onda incide normalmente sobre una rejilla de difracción y la imagen del segundo orden difractado forma un ángulo de 32.0° con la normal. ¿Cuántas líneas/cm tiene marcadas la rejilla? *Resp.* 5.30×10^3 líneas/cm

40.27 Un haz angosto de luz amarilla con longitud de onda de 600 nm incide en forma normal sobre una rejilla de difracción de 2000 líneas/cm, y las imágenes se forman sobre una pantalla paralela al plano de la rejilla y localizada a 1.00 m de distancia. Calcule la distancia sobre la pantalla de las líneas de primer orden medida desde el máximo central. *Resp.* 12.1 cm

40.28 Una rejilla de difracción de 5000 líneas/cm difracta una luz azul de longitud de onda 4.7×10^{-7} m. *a*) Calcule la desviación angular de la imagen de segundo orden. *b*) Teóricamente, ¿cuál es la imagen de mayor orden que se puede difractar con esta longitud de onda y la rejilla? *Resp.* *a*) 28°; *b*) cuarto orden

40.29 Determine la razón de las longitudes de onda de dos líneas espectrales si la imagen de segundo orden de una línea coincide con la imagen de tercer orden de otra línea, ambas líneas se examinan con la misma rejilla. *Resp.* 3 : 2

40.30 Se obtiene un espectro de luz blanca con una rejilla grabada de 2500 líneas/cm. Calcule la separación angular entre el violeta ($\lambda_v = 400$ nm) y el rojo ($\lambda_r = 700$ nm) en *a*) el primer orden y *b*) el segundo orden. *c*) ¿El tercer orden del amarillo ($\lambda_y = 600$ nm) cubre al cuarto orden del violeta? *Resp.* *a*) 4°20′; *b*) 8°57′; *c*) sí

40.31 El espectro de la radiación solar en el infrarrojo se produce con una rejilla. ¿Cuál es la longitud de onda estudiada, si la línea del infrarrojo en el primer orden ocurre a un ángulo de 25.0° con lo normal, y la imagen de cuarto orden de la línea del hidrógeno de longitud de onda 656.3 nm ocurre a 30.0°? *Resp.* 2.22×10^{-6} m

40.32 ¿Qué tan separados están los planos difractores en un cristal de NaCl para los cuales los rayos X de longitud de onda 1.54 Å forman un ángulo rasante de 15°54′ en el primer orden? *Resp.* 2.81 Å

capítulo 41

Relatividad

UN SISTEMA DE REFERENCIA es un sistema coordenado relativo al cual se toman medidas físicas. Un sistema de referencia inercial es aquel que se mueve a velocidad constante, es decir, que no está acelerado.

LA TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD fue propuesta por Albert Einstein (1905) y se ocupa del estudio del movimiento de los cuerpos a velocidad constante. Los dos postulados de Einstein fueron:

1) Las leyes de la física son las mismas para todo sistema inercial. Por lo tanto, todo movimiento es relativo. La velocidad de los objetos sólo puede darse en relación a otros cuerpos. Es imposible determinar la velocidad absoluta de un objeto.

2) La rapidez de la luz en el vacío, c, tiene el mismo valor para cualquier observador, independiente del movimiento de la fuente o del movimiento del observador.

Estos postulados conducen a predecir lo siguiente.

EL MOMENTO LINEAL RELATIVISTA de un cuerpo de masa m y velocidad υ es

$$\vec{\mathbf{p}} = \frac{m\vec{\mathbf{v}}}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} = \gamma m\vec{\mathbf{v}}$$

en donde $\gamma = 1/\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}$ y $\gamma > 1$. Algunos físicos prefieren asociar la γ con la masa e introducir la masa relativista $m_R = \gamma m$. Esto permite escribir el momento lineal como $p = m_R\upsilon$, pero entonces m_R depende de la velocidad. En este texto, sólo se usará una masa, m, que es independiente de su volocidad, precisamente como las otras dos propiedades fundamentales de las partículas de materia: carga y espín.

RAPIDEZ LÍMITE: Cuando $\upsilon = c$, la masa del objeto se vuelve infinita. Por lo que se concluye que ningún objeto puede acelerarse hasta la velocidad de la luz c, y así c es el límite superior para la rapidez.

ENERGÍA RELATIVISTA: La energía total de un cuerpo de masa m se expresa por

$$E = \gamma mc^2$$

en donde

$$\text{energía total} = \text{energía cinética} + \text{energía en reposo}$$

o bien

$$E = EC + E_0$$

Cuando un cuerpo está en reposo, $\gamma = 1$, $EC = 0$ y la *energía en reposo* (E_0) se expresa por

$$E_0 = mc^2$$

La energía en reposo incluye todas las formas de energía interna al sistema.

La *energía cinética* de un cuerpo de masa m es

$$EC = \gamma mc^2 - mc^2$$

Si la velocidad del objeto no es demasiado grande, esto se reduce a la expresión usual

$$EC = \tfrac{1}{2}mv^2 \quad (v \ll c)$$

Si se usa la expresión $p = \gamma mv$, la energía total de un cuerpo se puede escribir como

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$$

DILATACIÓN DEL TIEMPO: *El tiempo es relativo*, fluye con rapideces diferentes para observadores que se mueven de manera diferente. Supóngase que una nave espacial y un planeta se están moviendo uno con respecto al otro a una velocidad relativa v y que cada uno lleva un reloj idéntico. El piloto de la nave verá que pasa un intervalo de tiempo Δt_S en su reloj, con respecto al cual se encuentra *estacionario*. Un observador que esté sobre el suelo también verá que pasa un intervalo de tiempo en el reloj de la nave, la cual se está *moviendo* con respecto a él. Sin embargo, él verá que el intervalo toma un tiempo (medido en su reloj) de Δt_M, en donde $\Delta t_M \neq \Delta t_S$. El observador sobre el suelo verá que el tiempo transcurrre con mayor lentitud a bordo de la nave:

$$\Delta t_M = \gamma \Delta t_S$$

De manera análoga, el piloto verá que el tiempo transcurre con mayor lentitud sobre el suelo.

El tiempo requerido para que un evento ocurra, según lo registra un observador estacionario en el sitio del evento, se llama *tiempo propio*, Δt_S. Todos los observadores que se mueven pasando por el sitio registran un tiempo más largo para que el evento ocurra. De donde, el tiempo propio para la duración de un evento es el tiempo medido más pequeño para ese evento.

SIMULTANEIDAD: Supóngase que para un observador dos eventos ocurren en *diferentes localidades*, pero al mismo tiempo. Los eventos son simultáneos para este observador, sin embargo, en general, éstos no son simultáneos para un segundo observador en movimiento relativo al primero.

CONTRACCIÓN DE LA LONGITUD: Supóngase que se mide un objeto que tiene una longitud L_S, de componente x, cuando está en reposo (L_S se llama *longitud propia*). Entonces al objeto se le da una velocidad υ en la dirección x, de modo que esté en movimiento respecto a un observador. Ese observador verá que el objeto se ha acortado en la dirección x (pero no en las direcciones y y z). Su longitud x, según la mide el observador con respecto al cual se está moviendo (L_M) entonces será

$$L_M = L_S\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}$$

en donde $L_S > L_M$.

FÓRMULA DE ADICIÓN DE LAS VELOCIDADES: En la figura 41-1 se muestra un sistema de coordenadas S' en movimiento a una velocidad $\upsilon_{O'O}$ con respecto a un sistema de coordenadas S. Considérese ahora un objeto en un punto P en movimiento en la dirección x a una velocidad $\upsilon_{PO'}$ con relación al punto O'. La velocidad del objeto con respecto a O no es el valor clásico de $\upsilon_{PO'} + \upsilon_{O'O}$ sino, en lugar de eso, es

$$\upsilon_{PO} = \frac{\upsilon_{PO'} + \upsilon_{O'O}}{1 + \dfrac{\upsilon_{PO'}\upsilon_{O'O}}{c^2}}$$

Advierta que incluso cuando $\upsilon_{PO'} = \upsilon_{O'O} = c$, el valor de $\upsilon_{PO} = c$.

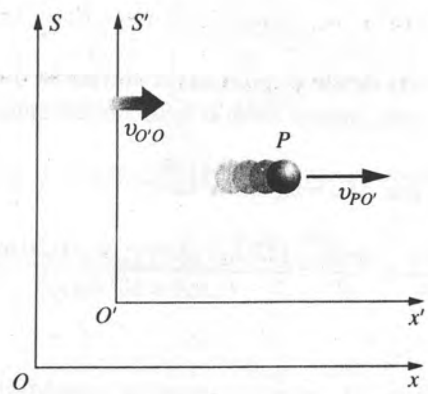


Fig. 41-1

PROBLEMAS RESUELTOS

41.1 ¿Con qué rapidez debe moverse un objeto si su valor correspondiente de γ debe ser 1.0% mayor que γ cuando ese objeto está en reposo? Dé su respuesta en dos cifras significativas.

Use la definición $\gamma = 1/\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}$ para hallar que con $\upsilon = 0$, $\gamma = 1.0$. De donde, el nuevo valor de $\gamma = 1.01(1.0)$ y, por consiguiente

$$1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2 = \left(\frac{1}{1.01}\right)^2 = 0.980$$

Si se resuelve, da $\upsilon = 0.14c = 4.2 \times 10^7$ m/s.

41.2 Calcule el valor de γ para una partícula que viaja a la mitad de la velocidad de la luz. Dé su respuesta en tres cifras significativas.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0.500)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.750}} = \frac{1}{0.866} = 1.15$$

41.3 Si 1.00 g de material pudiera convertirse íntegramente en energía, ¿cuál debería ser el valor de la energía producida, si el costo por kW · h es de 10.0 centavos?

Se utiliza $\Delta E_0 = (\Delta m)c^2$ para determinar

$$\text{Energía ganada} = (\text{masa perdida})c^2 = (1.00 \times 10^{-3}\ \text{kg})(2.998 \times 10^8\ \text{m/s})^2 = 8.99 \times 10^{13}\ \text{J}$$

$$\text{Valor de energía} = (8.99 \times 10^{13}\ \text{J})\left(\frac{1\ \text{kW}\cdot\text{h}}{3.600 \times 10^6\ \text{J}}\right)\left(\frac{\$0.10}{\text{kW}\cdot\text{h}}\right) = \$2.50 \times 10^6$$

41.4 Un objeto de 2.0 kg se levanta desde el piso hasta una mesa que está a 30 cm sobre éste. ¿En qué cantidad se incrementa la masa objeto debido a su incremento en su EP_G?

Se utiliza $\Delta E_0 = (\Delta m)c^2$, con $\Delta E_0 = mgh$. Por tanto,

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2} = \frac{mgh}{c^2} = \frac{(2.0\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2)(0.30\ \text{m})}{(2.998 \times 10^8\ \text{m/s})^2} = 6.5 \times 10^{-17}\ \text{kg}$$

41.5 Un electrón es acelerado desde el reposo a través de una diferencia de potencial de 1.5 MV y, en consecuencia, adquiere una energía de 1.5 MeV. Determine su rapidez y su masa aparente.

Si se usa $EC = \gamma mc^2 - mc^2$ y el hecho de que $EC = \Delta EP_E$, tenemos

$$EC = (1.5 \times 10^6 \text{ eV})(1.6 \times 10^{-19} \text{ J/eV}) = 2.4 \times 10^{-13} \text{ J}$$

Entonces

$$(\gamma m - m) = \frac{EC}{c^2} = \frac{2.4 \times 10^{-13} \text{ J}}{(2.998 \times 10^8 \text{ m/s})^2} = 2.67 \times 10^{-30} \text{ kg}$$

Pero $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg y la $\gamma m = 3.58 \times 10^{-30}$ kg.

Para calcular la rapidez, se empleará $\gamma = 1/\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}$, lo cual nos da

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2 = \left(\frac{m}{\gamma m}\right)^2 = \left(\frac{0.91}{3.58}\right)^2 = 0.064\,6$$

de donde

$$\upsilon = c\sqrt{1 - 0.064\,6} = 0.967c = 2.9 \times 10^8 \text{ m/s}$$

41.6 Determine la energía requerida para dar a un electrón una rapidez de 0.90 la de la luz, partiendo del reposo.

$$EC = (\gamma m - m)c^2 = \left[\frac{m}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} - m\right]c^2 = mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} - 1\right]$$

$$= (9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(2.998 \times 10^8 \text{ m/s})^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-(0.90)^2}} - 1\right] = 1.06 \times 10^{-13} \text{ J} = 0.66 \text{ MeV}$$

41.7 Demuestre que $EC = (\gamma m - m)c^2$ se reduce a $EC = \frac{1}{2}m\upsilon^2$ cuando υ es mucho menor que c.

$$EC = (\gamma m - m)c^2 = \left[\frac{m}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} - m\right]c^2 = mc^2\left[\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1\right]$$

Se hace que $b = -\upsilon^2/c^2$ y se expande $(1+b)^{-1/2}$ por el teorema binomial:

$$(1+b)^{-1/2} = 1 + (-1/2)b + \frac{(-1/2)(-3/2)}{2!}b^2 + \cdots = 1 + \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{\upsilon^4}{c^4} + \cdots$$

Entonces

$$EC = mc^2\left[\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{\upsilon^4}{c^4} + \cdots\right) - 1\right] = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{3}{8}m\upsilon^2\frac{\upsilon^2}{c^2} + \cdots$$

Si υ es muy pequeña comparada con c, entonces los términos después de $\frac{1}{2}m\upsilon^2$ son despreciables por pequeños.

41.8 Un electrón se mueve con rapidez relativista perpendicularmente a un campo magnético de 0.20 T. Su trayectoria es circular, con radio de 15 m. Determine *a*) el momento, *b*) la rapidez y *c*) la energía cinética del electrón. Recuerde que, en situaciones no relativistas, la fuerza magnética qvB contrarresta la fuerza centrípeta mv^2/r. Se igualan estos dos valores y se determina el momento $p = mv$ como

$$p = qBr$$

Esta relación se debe tomar cuando los efectos relativistas son importantes.

En primer lugar, encuentre el momento lineal al usar $p = qBr$

a)
$$p = (1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(0.20\ \text{T})(15\ \text{m}) = 4.8 \times 10^{-19}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

b) Debido a $p = mv/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$ con $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg, nosotros tenemos

$$4.8 \times 10^{-19}\ \text{kg} \cdot \text{m/s} = \frac{(mc)(v/c)}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

Elevando al cuadrado ambos lados y resolviendo para $(v/c)^2$ se obtiene

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{1 + 3.23 \times 10^{-7}} \quad \text{o} \quad \frac{v}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 + 3.23 \times 10^{-7}}}$$

La mayoría de las calculadoras no manejan esto. Sin embargo, recuérdese que $1/\sqrt{1+x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ para $x \ll 1$. Entonces

$$v/c \approx 1 - 1.61 \times 10^{-7} = 0.999\,999\,84$$

c)
$$\text{EC} = (\gamma m - m)c^2 = mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} - 1\right]$$

Pero ya se ha calculado que $(v/c)^2 = 1/(1 + 3.23 \times 10^{-7})$. Si se utiliza la aproximación $1/(1+x) \approx 1 - x$ para $x \ll 1$, tenemos $(v/c)^2 \approx 1 - 3.23 \times 10^{-7}$. Entonces

$$\text{EC} = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{3.23 \times 10^{-7}}} - 1\right) = (mc^2)(1.76 \times 10^3)$$

Al evaluar esto sobre la expresión se obtiene

$$\text{EC} = 1.4 \times 10^{-10}\ \text{J} = 9.0 \times 10^8\ \text{eV}$$

Un método alternativo de solución podría ser el de utilizar $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ y recordar que EC = E − mc^2.

41.9 El Sol irradia energía uniformemente en todas direcciones. En la posición de la Tierra ($r = 1.50 \times 10^{11}$ m), la radiación del Sol es de 1.4 kW/m^2. ¿Qué cantidad de masa pierde el Sol por día debido a la radiación?

El área de una esfera centrada sobre el Sol y que pasa a través de la Tierra es:

$$\text{Área} = 4\pi r^2 = 4\pi(1.50 \times 10^{11}\ \text{m})^2 = 2.83 \times 10^{23}\ \text{m}^2$$

A través de cada metro cuadrado de esta área, la energía que el Sol irradia por segundo es de 1.4 kW/m^2. Por lo tanto la radiación total del Sol por segundo es:

$$\text{Energía/s} = (\text{área})(1400\ \text{W/m}^2) = 3.96 \times 10^{26}\ \text{W}$$

La energía irradiada en un día (86 400 s) es

$$\text{Energía/día} = (3.96 \times 10^{26}\ \text{W})(86\,400\ \text{s/día}) = 3.42 \times 10^{31}\ \text{J/día}$$

Debido a que la masa y la energía están relacionadas a través de $\Delta E_0 = \Delta mc^2$, la masa perdida por día es

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2} = \frac{3.42 \times 10^{31}\ \text{J}}{(2.998 \times 10^8\ \text{m/s})^2} = 3.8 \times 10^{14}\ \text{kg}$$

Para comparación, la masa del Sol es 2×10^{30} kg.

41.10 Se mide un haz de partículas radiactivas cuando se dispara en un laboratorio. Se encuentra que, en promedio, cada partícula "vive" durante un tiempo de 2.0×10^{-8} s; después de este tiempo, la partícula cambia a una nueva forma. Cuando las mismas partículas estaban en reposo en el laboratorio, "vivían" en promedio 0.75×10^{-8} s. ¿Qué tan rápido se mueven las partículas del haz?

Algún tipo de mecanismo temporizador que se encuentra dentro de la partícula determina cuánto "vive". Este reloj interno, que le da la vida apropiada, debe obedecer la relación de la dilatación del tiempo. Tenemos $\Delta t_M = \gamma\,\Delta t_S$, en donde el observador con respecto al cual la partícula (reloj) se está moviendo ve un intervalo de tiempo de $\Delta t_M = 2.0 \times 10^{-8}$ s. De donde

$$2.0 \times 10^{-8}\ \text{s} = \gamma(0.75 \times 10^{-8}\ \text{s}) \quad \text{o bien} \quad 0.75 \times 10^{-8} = (2.0 \times 10^{-8})\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}$$

Si se elevan al cuadrado ambos miembros y se resuelve para υ, da $\upsilon = 0.927c = 2.8 \times 10^8$ m/s.

41.11 Dos gemelas tienen 25.0 años de edad; entonces una de ellas sale en un viaje por el espacio a una velocidad aproximadamente constante. La gemela que va en el cohete espacial mide el tiempo con un reloj exacto. Cuando regresa a la Tierra, su reloj le indica que tiene 31.0 años, mientras que su gemela, que se quedó en la Tierra tiene 43.0 años. ¿Cuál fue la velocidad del cohete espacial?

El reloj de la nave espacial, según lo ve la gemela que va en la nave, da la lectura del tiempo de viaje como Δt_S, el cual es 6.0 años más largo. La gemela que se queda en la Tierra ve que la edad de su hermana ha aumentado en 6.0 años, pero su reloj le indica que, en realidad, ha transcurrido un tiempo $\Delta t_M = 18.0$ años. De donde, $\Delta t_M = \gamma \Delta t_S$ queda

$$6 = 18\sqrt{1-(v/c)^2}$$

de donde

$$(v/c)^2 = 1 - 0.111 \qquad \text{o} \qquad v = 0.943c = 2.83 \times 10^8 \text{ m/s}$$

41.12 **Dos células que se dividen en la Tierra cada 10.0 s inician desde la Tierra un viaje hasta el Sol (1.50×10^{11} m de camino) en una nave espacial que se mueve a 0.850c. ¿Cuántas células deberían existir cuando la nave espacial se estrelle con el Sol?**

Según los observadores de la Tierra, con respecto a los cuales se están moviendo las células, el tiempo requerido para realizar el viaje hasta el Sol es la distancia recorrida (x) sobre la velocidad (v),

$$\Delta t_M = \frac{x}{v} = \frac{1.50 \times 10^{11}\text{ m}}{(0.850)(2.998 \times 10^8 \text{ m/s})} = 588\text{ s}$$

Debido a que el reloj de la nave se mueve con respecto al planeta, desde la Tierra parece que corre más lentamente. La lectura del tiempo que dan estos relojes es

$$\Delta t_S = \Delta t_M/\gamma = \Delta t_M\sqrt{1-(v/c)^2}$$

y, por consiguiente,

$$\Delta t_S = 310\text{ s}$$

Las células se dividen de acuerdo al reloj de la nave espacial, que es el reloj que está en reposo respecto a ellas. Por lo tanto, realizan 31 divisiones en ese tiempo, ya que se dividen cada 10.0 s. Así, el número total de células presentes al estrellarse es

$$(2)^{31} = 2.1 \times 10^9 \text{ células}$$

41.13 **En una nave espacial, una persona sostiene una regla de medir cuando se dispara y pasa por la Tierra con una rapidez v paralela a la superficie del planeta. ¿Qué notará la persona que va en la nave cuando la regla se gira de la posición paralela a la posición perpendicular, con respecto al movimiento de la nave?**

Para la persona en la nave la regla permanece constante; no aparece cambio en su longitud porque no tiene movimiento traslacional respecto al observador. Sin embargo, alguien que observa en la Tierra diría que la regla mide $(1\text{ m})\sqrt{1-(v/c)^2}$ cuando está paralela al movimiento de la nave, y de 1 m cuando está perpendicular al movimiento de ésta.

(41.14) Una nave que se mueve a 0.95c viaja desde la Tierra hasta la estrella Alfa Centauro, la cual está a 4.5 años luz. ¿Qué tan largo será el viaje para *a*) un reloj en la Tierra y *b*) para un reloj en la nave? *c*) ¿Qué tan lejos está la Tierra de la estrella de acuerdo con los ocupantes de la nave? *d*) ¿Cuál es su cálculo de rapidez que llevan?

Un año luz es la distancia que recorre la luz en 1 año, es decir

$$1 \text{ año luz} = (2.998 \times 10^8 \text{ m/s})(3.16 \times 10^7 \text{ s}) = 9.47 \times 10^{15} \text{ m}$$

Por consiguiente la distancia a la estrella (de acuerdo con los terrícolas) es

$$d_e = (4.5)(9.47 \times 10^{15} \text{ m}) = 4.3 \times 10^{16} \text{ m}$$

a)
$$\Delta t_e = \frac{d_e}{\upsilon} = \frac{4.3 \times 10^{16} \text{ m}}{(0.95)(2.998 \times 10^8 \text{ m/s})} = 1.5 \times 10^8 \text{ s}$$

b) Debido a que los relojes en la nave corren lentamente,

$$\Delta t_{\text{nave}} = \Delta t_e \sqrt{1 - (\upsilon/\text{c})^2} = (1.51 \times 10^8 \text{ s})(0.312) = 4.7 \times 10^7 \text{ s}$$

c) Para los ocupantes de la nave, la distancia Tierra-Estrella está moviéndose frente a ellos con una rapidez de 0.95c. Por lo tanto, la distancia se acorta para los tripulantes, quienes determinan que es de

$$d_{\text{nave}} = (4.3 \times 10^{16} \text{ m})\sqrt{1 - (0.95)^2} = 1.3 \times 10^{16} \text{ m}$$

d) Para los ocupantes de la nave, su rapidez relativa es

$$\upsilon = \frac{d_{\text{nave}}}{\Delta t_{\text{nave}}} = \frac{1.34 \times 10^{16} \text{ m}}{4.71 \times 10^7 \text{ s}} = 2.8 \times 10^8 \text{ m/s}$$

la cual es 0.95c. Para ambos observadores en la Tierra o en la nave la rapidez relativa es la misma.

(41.15) Cuando un cohete pasa en su órbita por la Tierra con rapidez υ, manda un pulso de luz por delante de él. ¿Qué tan rápidamente se moverá el pulso de luz de acuerdo con una persona que se encuentre sobre la Tierra?

Método 1

Con rapidez c (por el segundo postulado por la Teoría Especial de la Relatividad).

Método 2

En este caso, $\upsilon_{O'O} = \upsilon$ y $\upsilon_{PO'} = \text{c}$. Según la fórmula de adición de las velocidades, la velocidad observada será (puesto que, en este caso, $u = \text{c}$)

$$\upsilon_{PO} = \frac{\upsilon_{PO'} + \upsilon_{O'O}}{1 + \frac{\upsilon_{PO'}\upsilon_{O'O}}{\text{c}^2}} = \frac{\upsilon + \text{c}}{1 + (\upsilon/\text{c})} = \frac{(\upsilon + \text{c})\text{c}}{\text{c} + \upsilon} = \text{c}$$

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

41.16 ¿A qué rapidez se debe mover una partícula para que γ sea 2.0? *Resp.* 2.6×10^8 m/s

41.17 Una partícula está viajando con una rapidez v tal que $v/c = 0.99$. Determine γ para la partícula. *Resp.* 7.1

41.18 Calcule la *energía en reposo* de un electrón, es decir, la energía equivalente a su masa en reposo, 9.11×10^{-31} kg. *Resp.* 0.512 MeV = 820 pJ

41.19 Determine la rapidez de un electrón que tiene una energía cinética de 1.0×10^5 eV (o equivalente a 1.6×10^{-14} J). *Resp.* 1.6×10^8 m/s

41.20 Un protón ($m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) es acelerado hasta una energía cinética de 200 MeV. ¿Cuál es su rapidez a esta energía? *Resp.* 1.70×10^8 m/s

41.21 Utilizando la definición de momento lineal y la relación entre masa y energía, pruebe que $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$. Utilice esta relación para demostrar que la EC traslacional de una partícula es $\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} - mc^2$.

41.22 Una cierta especie de bacterias duplican su número cada 20 días. Dos de estas bacterias son colocadas en una nave espacial y enviadas a viajar desde la Tierra por 1000 días terrestres. Durante este tiempo, la velocidad de la nave es de 0.9950c. ¿Cuántas bacterias estarán a bordo de la nave cuando aterrice sobre la Tierra? *Resp.* 64

41.23 Cierta fuente de luz envía 2×10^{15} pulsos cada segundo. Cuando una nave espacial viaja paralela a la superficie de la Tierra con una rapidez de 0.90c, se utiliza esta fuente para enviar pulsos a la Tierra. Los pulsos son enviados perpendicularmente a la trayectoria de la nave. ¿Cuántos pulsos son registrados por segundo? *Resp.* 8.7×10^{14} pulsos/s

41.24 La insignia pintada sobre el lado de una nave espacial es un círculo con una línea atravesada a 45° con la vertical. Cuando la nave se dispara y pasa a otra nave en el espacio con una rapidez relativa de 0.95c, la segunda nave observa la insignia. ¿Qué ángulo forma con la vertical la línea observada? *Resp.* $\tan \theta = 0.31$ y $\theta = 17°$

41.25 Una nave espacial está moviéndose a 0.92c cuando la ve un observador sobre la Tierra. Esta persona y los ocupantes de la nave ponen a funcionar la alarma de sus relojes idénticos para que suenen después de que hayan pasado 6.0 h. De acuerdo con los observadores de la Tierra, ¿cuánto marcará el reloj de la Tierra cuando suene la alarma del reloj de la nave? *Resp.* 15 h

41.26 Determine la rapidez y el momento de un protón ($m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) que ha sido acelerado a través de una diferencia de potencial de 2000 MV. (A esto se le llama protón 2 GeV.) Dé sus resultados en tres cifras significativas. *Resp.* 0.948c, 1.49×10^{-18} kg · m/s

capítulo 42

Física cuántica y mecánica ondulatoria

CUANTOS DE RADIACIÓN: Todas las ondas electromagnéticas, incluyendo la luz, tienen una naturaleza dual. Cuando viajan por el espacio, actúan como ondas y dan origen a efectos de interferencia y de difracción. Cuando la radiación electromagnética interactúa con los átomos y las moléculas, el haz se comporta como flujo de corpúsculos energéticos llamados *fotones* o *cuantos de luz*.

La energía (E) de cada fotón depende de su frecuencia f (o de la longitud de onda λ) de la radiación en el haz:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

donde $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J · s es una constante de naturaleza conocida como *constante de Planck*.

EFECTO FOTOELÉCTRICO: Cuando la radiación electromagnética incide sobre la superficie de ciertos metales, pueden expulsarse electrones. Un fotón de energía hf penetra en el material y es absorbido por un electrón. Si se cuenta con energía suficiente, el electrón será llevado hasta la superficie y expulsado con cierta energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$. Dependiendo de cuán profundos se encuentren en el material, se emitirán electrones que tienen un rango de valores de la EC. Sea ϕ la energía requerida para que un electrón se desprenda de la superficie, la llamada *función de trabajo*. Para empezar con los electrones cercanos a la superficie, se dispondrá de una cantidad de energía $(hf - \phi)$ y ésta es la energía cinética máxima que se puede impartir a cualquier electrón.

En consecuencia, la *ecuación fotoeléctrica de Einstein* es

$$\frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2 = hf - \phi$$

La energía del electrón emitido se puede calcular determinando la diferencia de potencial V que se necesita aplicar para detener el movimiento; entonces $\frac{1}{2}mv^2 = V_se$. Para el electrón más energético,

$$hf - \phi = V_se$$

donde V_s es el *potencial de frenado*.

Para cualquier superficie, la longitud de onda de la luz debe ser lo suficientemente pequeña para que la energía del fotón hf sea lo suficientemente grande para desprender al electrón. En la *longitud de onda umbral* (o *frecuencia*), la energía del fotón es casi igual a la función de trabajo. Para un metal ordinario la longitud de onda umbral cae en el rango del visible o del ultavioleta. Los rayos X desprenden fotoelectrones; los fotones del infrarrojo o caloríficos nunca desprenderán electrones.

MOMENTO LINEAL DE UN FOTÓN: Debido a que $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$, cuando $m = 0$, $E = pc$. De donde, puesto que $E = hf$,

$$E = pc = hf \quad \text{y} \quad p = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

El momento lineal de un fotón es $p = h/\lambda$.

EFECTO COMPTON: Un fotón puede chocar con una partícula cuya masa de reposo no es cero, por ejemplo con un electrón. Cuando esto sucede su energía e ímpetu pueden cambiar debido a la colisión. Es factible que el fotón también se deflecte en el proceso. Si un fotón con longitud de onda inicial λ_i choca con una partícula libre en reposo de masa m_e y se deflecta un ángulo θ, entonces su longitud de onda cambia a λ_s, donde

$$\lambda_s = \lambda_i + \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

El cambio fraccional en la longitud de onda es muy pequeño, excepto en el caso de radiación altamente energética como los rayos X y los rayos γ.

ONDAS DE DE BROGLIE: Una partícula de masa m que se mueve con ímpetu p tiene asociada una *longitud de onda de De Broglie*

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

Un haz de partículas se puede difractar e interferir. Estas propiedades de comportamiento ondulatorio de las partículas se pueden calcular suponiendo que las partículas actúan como ondas (*ondas De Broglie*) con longitud de onda de De Broglie.

RESONANCIA DE LAS ONDAS DE DE BROGLIE: Una partícula confinada en una región finita del espacio se dice que es una partícula *ligada*. Ejemplos típicos de sistemas de partículas son las moléculas de un gas en un recipiente cerrado, un electrón en un átomo. La onda de De Broglie que representa a una partícula ligada entrará en resonancia dentro de la región del espacio donde está confinada si la longitud de onda cabe en esa región. A cada forma posible de resonancia se le llama *estado* (estacionario) del sistema. Es más probable encontrar a la partícula en la posición de los antinodos de la onda resonante; nunca se encuentra en la posición de los nodos.

LAS ENERGÍAS CUANTIZADAS de las partículas ligadas se deben a que cada estado de resonancia tiene una energía discreta asociada con ella. Ya que es más probable encontrar a la partícula sólo en estado de resonancia, las energías observadas son discretas (*cuantizadas*). Únicamente en sistemas de partículas atómicas (o más pequeñas) se dan las diferencias de energías entre los estados de resonancia lo suficientemente grandes para ser observadas.

PROBLEMAS RESUELTOS

42.1 Demuestre que un fotón de una luz infrarroja de 1240 nm tiene una energía de 1.00 eV.

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63\times10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(2.998\times10^{8}\ \text{m/s})}{1240\times10^{-9}\ \text{m}} = 1.602\times10^{-19}\ \text{J} = 1.00\,\text{eV}$$

42.2 Calcule la energía de un fotón de luz azul de longitud de onda 450 nm.

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63\times10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(2.998\times10^{8}\ \text{m/s})}{450\times10^{-9}\ \text{m}} = 4.42\times10^{-19}\ \text{J} = 2.76\,\text{eV}$$

42.3 Para romper el ligamento químico en una molécula de piel humana y por lo tanto causar una quemadura de Sol, se requiere un fotón con una energía de aproximadamente 3.5 eV. ¿A qué longitud de onda corresponde esta energía?

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{(6.63\times10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(2.998\times10^{8}\ \text{m/s})}{(3.50\,\text{eV})(1.602\times10^{-19}\ \text{J/eV})} = 354\,\text{nm}$$

La luz ultavioleta causa las quemaduras por el Sol.

42.4 La función de trabajo de metal de sodio es 2.3 eV. ¿Cuál es la longitud de onda más grande de la luz que puede producir emisión de fotoelectrones en el sodio?

En el umbral, la energía del fotón es exactamente igual a la energía que se requiere para desprender a un electrón del metal, ésta es la función de trabajo ϕ:

$$\phi = \frac{hc}{\lambda}$$

$$(2.3\,\text{eV})\left(\frac{1.602\times10^{-19}\ \text{J}}{1.00\,\text{eV}}\right) = \frac{(6.63\times10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(2.998\times10^{8}\ \text{m/s})}{\lambda}$$

$$\lambda = 5.4\times10^{-7}\ \text{m}$$

42.5 ¿Qué diferencia de potencial se debe aplicar para detener al fotoelectrón más rápido emitido por una superficie de níquel bajo la acción de luz ultravioleta de longitud de onda 200 nm? La función de trabajo para el níquel es 5.01 eV.

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s})(2.998\times10^{8}\ \mathrm{m/s})}{2000\times10^{-10}\ \mathrm{m}} = 9.95\times10^{-19}\ \mathrm{J} = 6.21\ \mathrm{eV}$$

Entonces, de la ecuación del efecto fotoeléctrico, la energía del electrón emitido con mayor rapidez es

$$6.21\ \mathrm{eV} - 5.01\ \mathrm{eV} = 1.20\ \mathrm{eV}$$

Entonces se requiere un potencial retardador negativo de 1.20 V. Éste es el potencial de frenado.

42.6 ¿Emitirá fotoelectrones una superficie de cobre, con una función de trabajo de 4.4 eV, cuando se ilumina con luz visible?

Igual que en el problema 42.4,

$$\text{Umbral } \lambda = \frac{hc}{\phi} = \frac{(6.63\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s})(2.998\times10^{8}\ \mathrm{m/s})}{4.4(1.602\times10^{-19})\ \mathrm{J}} = 282\ \mathrm{nm}$$

Por lo tanto, la luz visible (400 nm a 700 nm) no puede desprender electrones del cobre.

42.7 Un haz láser ($\lambda = 633$ nm) del tipo diseñado para que lo usen los estudiantes tiene una intensidad de 3.0 mW. ¿Cuántos fotones pasan por un punto dado en cada segundo?

La energía transportada que pasa por un punto en cada segundo es 0.0030 J/s. Como la energía por fotón es hc/λ, que resulta ser 3.14×10^{-19} J, el número de fotones que pasan por cierto punto es

$$\text{Cantidad/s} = \frac{0.0030\ \mathrm{J/s}}{3.14\times10^{-19}\ \mathrm{J/fotones}} = 9.5\times10^{15}\ \text{fotones/s}$$

42.8 En un proceso llamado *producción de pares*, un fotón se transforma en un electrón y en un positrón. Este último tiene la misma masa que un electrón, pero su carga es $+e$. ¿Cuál es la mínima energía que debe tener un fotón si ocurre este proceso? ¿Cuál es la correspondiente longitud de onda?

El fotón tendrá una energía equivalente a la de la masa en la cual se transforma, que es

$$mc^2 = (2)(9.11\times10^{-31}\ \mathrm{kg})(2.998\times10^{8}\ \mathrm{m/s})^2 = 1.64\times10^{-13}\ \mathrm{J} = 1.02\ \mathrm{MeV}$$

Entonces, como esta energía debe ser igual a hc/λ,

$$\lambda = \frac{hc}{1.64 \times 10^{-13}\ \text{J}} = 1.21 \times 10^{-12}\ \text{m}$$

Esta longitud de onda está en la región de los rayos X muy cortos, la región de los rayos γ.

42.9 ¿Qué longitud de onda debe tener la radiación electromagnética para que un fotón en un haz tenga el mismo ímpetu que el de un electrón que se mueve con una rapidez de 2.00×10^5 m/s?

Se requiere que $(m\upsilon)_{\text{electrón}} = (h/\lambda)_{\text{fotón}}$. De ello,

$$\lambda = \frac{h}{m\upsilon} = \frac{6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(2.00 \times 10^5\ \text{m/s})} = 3.64\ \text{nm}$$

Esta longitud de onda está en la región de los rayos X.

42.10 Suponga que un fotón con longitud de onda de 3.64 nm que se mueve en la dirección $+x$ choca frontalmente con un electrón cuya rapidez es 2×10^5 m/s y se mueve en la dirección $-x$. Si la colisión es perfectamente elástica, encontrar la rapidez del electrón y la longitud de onda del fotón después de la colisión.

De la ley de la conservación del ímpetu,

$$\text{ímpetu antes} = \text{ímpetu después}$$

$$\frac{h}{\lambda_0} - m\upsilon_0 = \frac{h}{\lambda} - m\upsilon$$

Del problema 42.9, $h/\lambda_0 = m\upsilon_0$ en este caso. De aquí, $h/\lambda = m\upsilon$. Entonces, para una colisión perfectamente elástica,

$$\text{EC antes} = \text{EC después}$$

$$\frac{hc}{\lambda_0} + \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \frac{hc}{\lambda} + \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

Si se asume el hecho de que $h/\lambda_0 = m\upsilon_0$ y $h/\lambda = m\upsilon$, vemos que

$$\upsilon_0(c + \tfrac{1}{2}\upsilon_0) = \upsilon(c + \tfrac{1}{2}\upsilon)$$

Por lo tanto $\upsilon = \upsilon_0$ y el electrón se mueve en la dirección $+x$ con la misma rapidez que tenía antes de la colisión. Como $h/\lambda = m\upsilon = m\upsilon_0$, el fotón rebota y conserva su longitud de onda.

42.11 Un fotón ($\lambda = 0.400$ nm) choca con un electrón que se encuentra en reposo y rebota con un ángulo de 150° en la dirección que tenía antes del choque. Determine la rapidez y longitud de onda del fotón después de la colisión.

La rapidez del fotón siempre es igual a la rapidez de la luz en el vacío, c. Para obtener la longitud de onda después de la colisión, utilizamos la ecuación del efecto Compton:

$$\lambda_s = \lambda_i + \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

$$\lambda_s = 4.00 \times 10^{-10}\text{ m} + \frac{6.63 \times 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s}}{(9.11 \times 10^{-31}\text{ kg})(2.998 \times 10^{8}\text{ m/s})}(1 - \cos 150°)$$

$$\lambda_s = 4.00 \times 10^{-10}\text{ m} + (2.43 \times 10^{-12}\text{ m})(1 + 0.866) = 0.405\text{ nm}$$

42.12 ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie para una partícula que se mueve con una rapidez de 2.0×10^6 m/s si la partícula es *a*) un electrón, *b*) un protón y *c*) una pelota de 0.20 kg?

Si se emplea la definición de la longitud de onda de De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.63 \times 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s}}{m(2.0 \times 10^{6}\text{ m/s})} = \frac{3.31 \times 10^{-40}\text{ m}\cdot\text{kg}}{m}$$

Si se sustituyen los valores de m, se encuentra que la longitud de onda es 3.6×10^{-10} m para el electrón, 2.0×10^{-13} m para el protón y 1.7×10^{-39} m para la pelota de 0.20 kg.

42.13 Un electrón en reposo se pone en una diferencia de potencial de 100 V. ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie?

Su rapidez sigue siendo menor que c, por lo que se pueden ignorar los efectos relativistas. La EC ganada, $\frac{1}{2}mv^2$, iguala a la EP eléctrica perdida, Vq. Entonces,

$$v = \sqrt{\frac{2Vq}{m}} = \sqrt{\frac{2(100\text{ V})(1.60 \times 10^{-19}\text{ C})}{9.11 \times 10^{-31}\text{ kg}}} = 5.927 \times 10^{6}\text{ m/s}$$

y

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.626 \times 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s}}{(9.11 \times 10^{-31}\text{ kg})(5.927 \times 10^{6}\text{ m/s})} = 0.123\text{ nm}$$

42.14 ¿Cuál es la diferencia de potencial para que un microscopio electrónico le proporcione a un electrón una longitud de onda de 0.500 Å?

$$\text{EC del electrón} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{h}{m\lambda}\right)^2 = \frac{h^2}{2m\lambda^2}$$

donde se ha utilizado la relación de De Broglie, $\lambda = h/mv$. Si se sustituyen los valores conocidos se obtiene EC como 9.66×10^{-17} J. Entonces, EC $= Vq$, y por eso

$$V = \frac{\text{EC}}{q} = \frac{9.66 \times 10^{-17}\ \text{J}}{1.60 \times 10^{-19}\ \text{C}} = 600\ \text{V}$$

42.15 ¿Cuál es la EC y la longitud de onda de un neutrón térmico?

Por definición, un neutrón térmico es un neutrón libre en un gas de neutrones aproximadamente a 20 °C (293 K). Del capítulo 17, la energía térmica de un gas molecular es $3kT/2$, donde k es la constante de Boltzmann (1.38×10^{-23} J/K). Entonces

$$\text{EC} = \tfrac{3}{2}kT = 6.07 \times 10^{-21}\ \text{J}$$

Éste es un caso no relativista por lo que podemos escribir

$$\text{EC} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} \quad \text{o} \quad p^2 = (2m)(\text{EC})$$

Entonces

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{(2m)(\text{EC})}} = \frac{6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{\sqrt{(2)(1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg})(6.07 \times 10^{-21}\ \text{J})}} = 0.147\ \text{nm}$$

42.16 Encuentre la presión que ejerce sobre una superficie el haz de fotones del problema 42.7 si el área de la sección transversal del haz es 3.0 mm². Suponga que la reflexión a la incidencia normal es perfecta.

Cada fotón tiene un ímpetu

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{633 \times 10^{-9}\ \text{m}} = 1.05 \times 10^{-27}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

Cuando un fotón se refleja, su ímpetu cambia de $+p$ a $-p$, un cambio total en el ímpetu $2p$. Como 9.5×10^{15} fotones chocan con la superficie a cada segundo, se obtiene

$$\text{Cambio en el ímpetu/s} = (9.5 \times 10^{15}/\text{s})(2)(1.05 \times 10^{-27}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}) = 2.0 \times 10^{-11}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2$$

De la ecuación del impulso (capítulo 8),

$$\text{Impulso} = Ft = \text{cambio en el ímpetu}$$

tenemos

$$F = \text{cambio en el ímpetu/s} = 1.99 \times 10^{-11}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2$$

Entonces

$$\text{Presión} = \frac{F}{A} = \frac{1.99 \times 10^{-11}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2}{3.0 \times 10^{-6}\ \text{m}^2} = 6.6 \times 10^{-6}\ \text{N/m}^2$$

42.17 Una partícula de masa m está confinada a un tubo angosto de longitud L. Encuentre *a*) la longitud de onda de la onda de De Broglie que resonará en el tubo, *b*) los ímpetus de las partículas, *c*) las energías correspondientes y *d*) calcule las energías para un electrón en un tubo con una longitud $L = 0.50$ nm.

a) La onda de De Broglie resonará con un nodo en cada extremo del tubo ya que éste está cerrado en los extremos. Algunos de los posibles modos de resonancia se muestran en la Fig. 42-1. Éstos permiten visualizar que para la resonancia, $L = \frac{1}{2}\lambda_1, 2(\frac{1}{2}\lambda_2), 3(\frac{1}{2}\lambda_3), \ldots, n(\frac{1}{2}\lambda_n), \ldots$ o bien

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

b) Como las longitudes de onda de De Broglie es $\lambda_n = h/p_n$, los ímpetus en la resonancia son

$$p_n = \frac{nh}{2L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

c) Como se mostró en el problema 42.15, $p^2 = (2m)(\text{EC})$, entonces

$$(\text{EC})_n = \frac{n^2h^2}{8L^2m} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Note que las partículas sólo se pueden encontrar en ciertos estados energéticos discretos. Las energías están cuantizadas.

d) Con $m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg y $L = 5.0 \times 10^{-10}$ m, se obtiene

$$(\text{EC})_n = 2.4 \times 10^{-19}\, n^2 \text{ J} = 1.5n^2 \text{ eV}$$

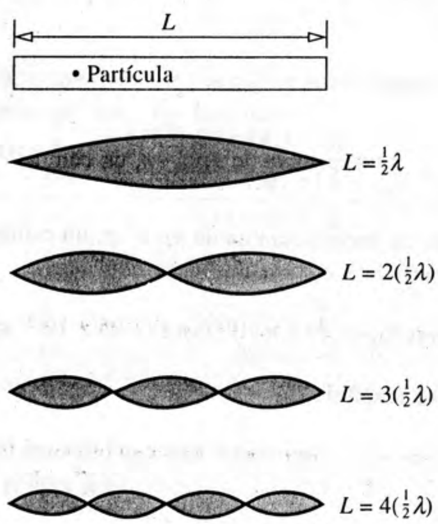


Fig. 42-1

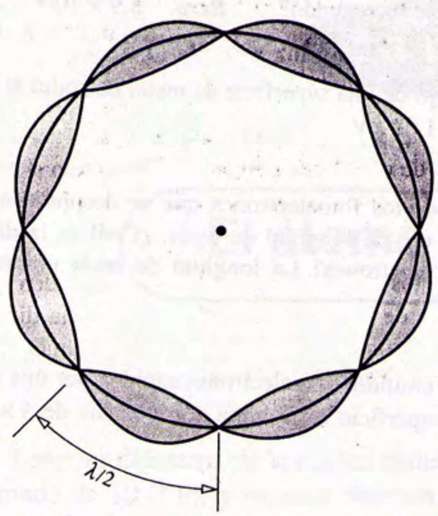


Fig. 42-2

42.18 Una partícula de masa m está confinada a moverse en una órbita de radio R. ¿Qué energía puede adquirir la partícula para que esté en resonancia en una onda de De Broglie? Efectúe el cálculo para un electrón con $R = 0.50$ nm.

Para que una onda entre en resonancia cuando se encuentra en una órbita circular las crestas deben coincidir con las crestas y los valles con los valles. Un ejemplo de resonancia (para una circunferencia con una longitud de cuatro longitudes de onda) se muestra en la Fig. 42-2. En general, se conseguirá resonancia cuando la circunferencia tenga una longitud de n longitudes de onda, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$ Para una onda de De Broglie se tiene

$$n\lambda_n = 2\pi R \quad \text{y} \quad p_n = \frac{h}{\lambda_n} = \frac{nh}{2\pi R}$$

Igual que en el problema 42.17,

$$(\text{EC})_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{n^2h^2}{8\pi^2R^2m}$$

Obviamente, las energías están cuantizadas. Al sustituir valores se obtiene

$$(\text{EC})_n = 2.4 \times 10^{-20}\ n^2\ \text{J} = 0.15n^2\ \text{eV}$$

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

42.19 Calcule la energía de un fotón de luz azul ($\lambda = 450$ nm), en joules y en eV. *Resp.* 4.41×10^{-19} J $= 2.76$ eV

42.20 ¿Cuál es la longitud de onda de una luz en la cual los fotones tienen una energía de 600 eV? *Resp.* 2.07 nm

42.21 Una lámpara de sodio de 20 W irradia luz amarilla ($\lambda = 589$ nm). ¿Cuántos fotones de luz amarilla son emitidos por la lámpara en cada segundo? *Resp.* 5.9×10^{19}

42.22 ¿Cuál es la función de trabajo de una superficie de metal de sodio si la longitud de onda umbral fotoeléctrica es de 680 nm? *Resp.* 1.82 eV

42.23 Determine la máxima EC de los fotoelectrones que se desprenden de una superficie de potasio debido a una luz ultavioleta de 200 nm de longitud de onda. ¿Cuál es la diferencia de potencial de retardo que se requiere para frenar a los electrones? La longitud de onda umbral fotoeléctrica del potasio es 440 nm. *Resp.* 3.38 eV, 3.38 V

42.24 ¿ Con qué velocidad serán emitidos fotoelectrones rápidos por una superficie cuya longitud de onda umbral es de 600 nm, cuando la superficie se ilumina con una luz de 4×10^{-7} m de longitud de onda? *Resp.* 6×10^5 m/s

42.25 Una radiación ultravioleta de 150 nm de longitud de onda, desprende electrones de una superficie metálica con una EC máxima de 3.00 eV. Determine la función de trabajo del metal, la longitud de onda umbral del metal y la diferencia de potencial retardador que se requiere para frenar la emisión de electrones. *Resp.* 5.27 eV, 235 nm, 3.00 V

42.26 ¿Cuál es la rapidez y el ímpetu de un fotón de 500 nm de longitud de onda? *Resp.* 2.998×10^8 m/s, 133×10^{-27} kg · m/s

42.27 Un haz de rayos X con una longitud de onda exacta de 5.00×10^{-14} m colisiona con un protón que se encuentra en reposo ($m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg). Si los rayos X se dispersan con un ángulo de 110°, ¿cuál es la longitud de onda de los rayos X dispersados? *Resp.* 5.18×10^{-14} m

42.28 Un par electrón positrón, cada uno con una energía cinética de 220 keV, son producidos por un fotón. Encuentre la energía y la longitud de onda del fotón. *Resp.* 1.46 MeV, 8.49×10^{-13} m

42.29 Demuestre que la longitud de onda de De Broglie de un electrón que parte del reposo y que es acelerado por una diferencia de potencial de V volts es $1.226/\sqrt{V}$ nm.

42.30 Calcule la longitud de onda de De Brogile de un electrón que ha sido acelerado por una diferencia de potencial de 9.0 kV. Desprecie los efectos relativistas. *Resp.* 1.3×10^{-11} m

42.31 ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie de un electrón que ha sido acelerado por una diferencia de potencial de 1.0 MV? (Con esta energía, que es muy grande, debes utilizar las expresiones de la masa y la energía relativista.) *Resp.* 8.7×10^{-13} m

42.32 Se desea hacer pasar un haz de electrones por una rejilla de difracción de periodo d (separación entre ranuras). Los electrones tienen una rapidez de 400 m/s. ¿Qué tan grande debe ser d para que el haz de electrones se difracte un ángulo de 25°? *Resp.* $n(4.3 \times 10^{-6}$ m), donde $n = 1, 2, 3,\ldots$

capítulo 43

El átomo de hidrógeno

EL ÁTOMO DE HIDRÓGENO tiene un diámetro de aproximadamente 0.1 nm; consiste en un protón como núcleo (con un radio aproximado de 10^{-15} m) y un solo electrón.

ÓRBITAS ELECTRÓNICAS: El primer modelo efectivo del átomo fue presentado por Niels Bohr, en 1913. Aun cuando ha sido sobrepasado por la mecánica cuántica, muchos de sus resultados sencillos todavía son válidos. En la versión más antigua del modelo de Bohr, se representaban los electrones en órbitas circulares alrededor del núcleo. Entonces, el átomo de hidrógeno era un electrón circulando alrededor de un solo protón. Para que la onda de De Broglie del electrón resonara o se "ajustara" (véase la Fig. 42-2) en una órbita de radio r, debe cumplirse lo siguiente (véase el problema 42.18):

$$m\upsilon_n r_n = \frac{nh}{2\pi}$$

donde n es un entero. La cantidad $m\upsilon_n r_n$, es el momento angular del electrón en su n-ésima órbita. La rapidez del electrón es υ, su masa es m y h es la constante de Planck, 6.63×10^{-34} J · s.

La fuerza centrípeta que mantiene en órbita al electrón es producida por la atracción de Coulomb entre el núcleo y el electrón. Por lo que, $F = ke^2/r^2 = ma = m\upsilon_n^2/r_n$ y

$$\frac{m\upsilon_n^2}{r_n} = k\frac{e^2}{r^2}$$

La solución simultánea de estas ecuaciones da los radios de las órbitas estables como $r_n = (0.053 \text{ nm})n^2$. La energía de un átomo cuando está en su n-ésimo estado (es decir, cuando su electrón se encuentra en su n-ésima órbita de configuración) es

$$E_n = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV}$$

Como en los problemas 42.17 y 42.18, la energía está cuantizada debido a la configuración estable correspondiente a la resonancia del sistema. Para núcleos con carga Ze orbitados por un solo electrón, las relaciones correspondientes son

$$r_n = (0.053 \text{ nm})\left(\frac{n^2}{Z}\right) \quad \text{y} \quad E_n = -\frac{13.6Z^2}{n^2} \text{ eV}$$

donde Z es llamado el *número atómico* del núcleo.

LOS DIAGRAMAS DE LOS NIVELES DE ENERGÍA resumen las energías permitidas de un sistema. Sobre una escala de energía vertical, las energías permitidas están representadas por líneas horizontales. El diagrama de niveles de energía para el hidrógeno se muestra en la Fig. 43-1. Cada línea horizontal representa la energía de un estado resonante del átomo. El cero de energía es tomado para cuando el átomo está ionizado, es decir, el estado en el cual el átomo tiene una órbita de radio infinito. A medida que el electrón cae, acercándose al núcleo, su energía potencial decrece hasta el nivel cero y, por lo tanto, la energía del átomo es negativa como ya se ha indicado. El estado más bajo posible, $n = 1$, corresponde a la órbita más pequeña posible de un electrón, llamada *estado base*.

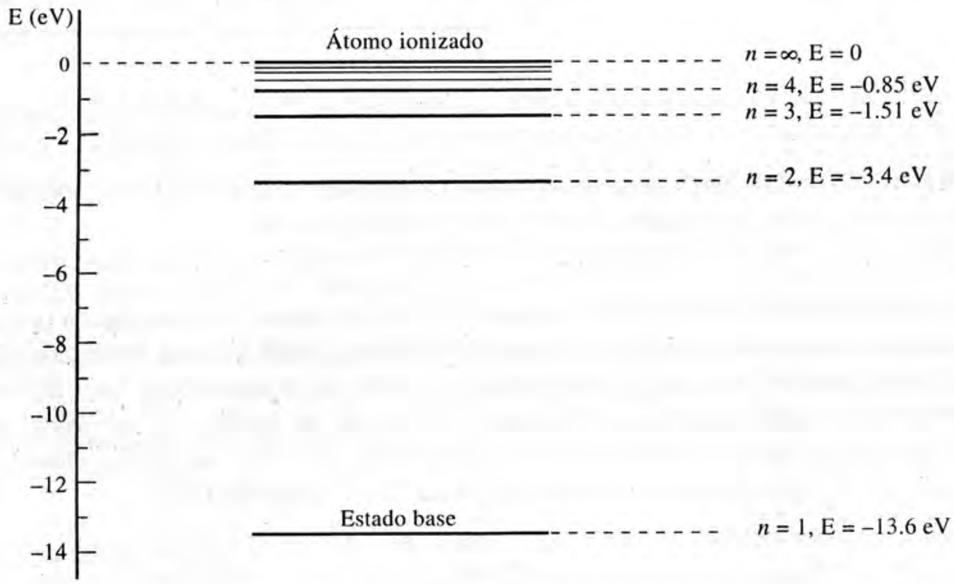


Fig. 43-1

EMISIÓN DE LUZ: Cuando un átomo aislado cae desde un nivel energético a otro menor se emite un fotón. Este fotón tiene la energía perdida por el átomo en su transición al estado más bajo de energía. La longitud de onda y la frecuencia del fotón están dadas por

$$hf = \frac{hc}{\lambda} = \text{energía perdida por el sistema}$$

La radiación emitida tiene una longitud de onda exacta y da lugar a una sola *línea espectral* del espectro de emisión del átomo. Es conveniente recordar que un fotón de 1240 nm tiene una energía de 1 eV, y que la energía del fotón varía de manera *inversamente* proporcional a la longitud de onda.

LAS LÍNEAS ESPECTRALES emitidas por los átomos de hidrógeno aislados se producen en series. La *serie de Balmer* mostrada en la Fig. 43-2 es una serie típica de las longitudes de onda visibles. Existen otras series, una en el ultravioleta, llamada la *serie de Lyman*; otras en el infrarrojo, y una cercana a la porción del espectro visible que es la *serie de Paschen*. Las longitudes de onda están dadas por las fórmulas:

$$\text{Lyman:}\quad \frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{n^2}\right)\qquad n=2,3,\ldots$$

$$\text{Balmer:}\quad \frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{n^2}\right)\qquad n=3,4,\ldots$$

$$\text{Paschen:}\quad \frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{n^2}\right)\qquad n=4,5,\ldots$$

donde $R = 1.097\,4\times 10^7\ \text{m}^{-1}$ es llamada *constante de Rydberg*.

ORIGEN DE LAS SERIES ESPECTRALES: Las líneas de serie de Balmer de la Fig. 43-2 se presentan cuando el átomo decae desde estados altos hacia el estado $n = 2$. La transición desde $n = 3$ a $n = 2$ produce un fotón de energía $\Delta E_{3,2} = 1.89$ eV, lo cual equivale a una longitud de onda de 656 nm, es decir a la primera línea de la serie. La segunda línea se origina en la transición de $n = 4$ a $n = 2$. La línea límite de la serie representa la transición de $n = \infty$ a $n = 2$. Similarmente, las transiciones que terminan en el estado $n = 1$ dan los valores de la serie de Lyman; las transiciones que terminan en el estado $n = 3$ dan las líneas de la serie de Paschen.

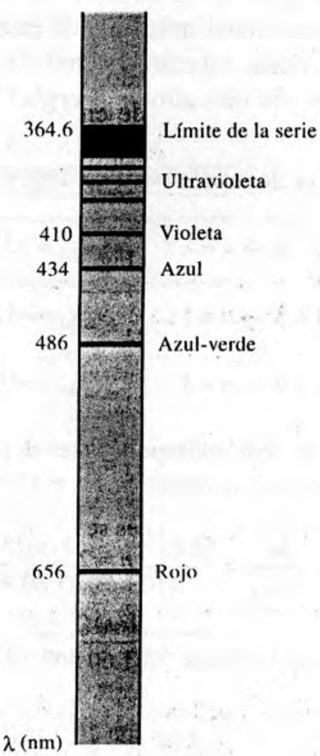


Fig. 43-2

ABSORCIÓN DE LUZ: Un átomo en su estado base puede absorber un fotón en un proceso llamado *absorción de resonancia*; el átomo sólo puede absorber aquellos fotones que lo llevarán a uno de sus niveles de energía permitidos.

PROBLEMAS RESUELTOS

43.1 ¿Qué longitud de onda emite un átomo de hidrógeno cuando cae de estado $n = 5$ al estado $n = 2$? Dé su respuesta en tres cifras significativas.

Ya que $E_n = -13.6/n^2$ eV, se tiene que

$$E_5 = -0.54 \text{ eV} \quad \text{y} \quad E_2 = -3.40 \text{ eV}$$

La diferencia de energía entre estos estados es $3.40 - 0.54 = 2.86$ eV. Ya que 1240 nm corresponden a 1.00 eV en una proporción inversa, se tiene, para la longitud de onda del fotón emitido,

$$\lambda = \left(\frac{1.00 \text{ eV}}{2.86 \text{ eV}}\right)(1240 \text{ nm}) = 434 \text{ nm}$$

43.2 Cuando un átomo de hidrógeno es bombardeado, el átomo se excita hasta su estado más alto de energía. Cuando regresa a su nivel más bajo de energía, emite luz. ¿Cuáles son las tres mayores longitudes de onda de las líneas espectrales emitidas por el átomo de hidrógeno cuando cae hasta el estado $n = 1$ desde su estado más alto de energía? Dé sus respuestas en tres cifras significativas.

La siguiente transición es de interés (véase la Fig. 43-1):

$$n = 2 \rightarrow n = 1: \quad \Delta E_{2,1} = -3.4 - (-13.6) = 10.2 \text{ eV}$$

$$n = 3 \rightarrow n = 1: \quad \Delta E_{3,1} = -1.5 - (-13.6) = 12.1 \text{ eV}$$

$$n = 4 \rightarrow n = 1: \quad \Delta E_{4,1} = -0.85 - (-13.6) = 12.8 \text{ eV}$$

Para calcular las longitudes de onda correspondientes se puede proceder como en el problema 43.1, o utilizar $\Delta E = hf = hc/\lambda$. Por ejemplo, para la transición de $n = 2$ a $n = 1$,

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E_{2,1}} = \frac{(6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(2.998 \times 10^8 \text{ m/s})}{(10.2 \text{ eV})(1.60 \times 10^{-19} \text{ J/eV})} = 1.22 \text{ nm}$$

Las otras líneas se calculan en la misma forma y son 102 nm y 96.9 nm. Éstas son las tres primeras líneas de la serie de Lyman.

43.3 La longitud de onda del límite de la serie de Balmer es emitida cuando el átomo de hidrógeno cae desde el estado $n = \infty$ al estado $n = 2$. ¿Cuál es la longitud de onda de esta línea (en tres cifras significativas)?

De la Fig. 43-1, $\Delta E = 3.40 - 0 = 3.40$ eV. Para determinar la longitud de onda correspondiente utilizamos el camino usual de $\Delta E = hc/\lambda$. El resultado es de 365 nm.

43.4 ¿Cuál es la mayor longitud de onda de radiación que puede ionizar un átomo de hidrógeno no excitado?

Los fotones incidentes deben tener una energía tal que permita elevar al átomo del nivel $n = 1$ al nivel $n = \infty$ cuando son absorbidos por éste. Dado que $E_\infty - E_1 = 13.6$ eV, se puede utilizar $E_\infty - E_1 = hc/\lambda$ para calcular la longitud de onda como 91.2 nm. Longitudes de onda más cortas no podrán sacar al electrón del átomo, pero aumentarán la EC del electrón.

43.5 Los niveles de energía de los átomos de helio simplemente ionizados (átomos a los cuales se les ha quitado uno de sus dos electrones) están dados por $E_n = (-54.4/n^2)$ eV. Construya un diagrama de niveles de energía para el sistema.

Véase la Fig. 43-3.

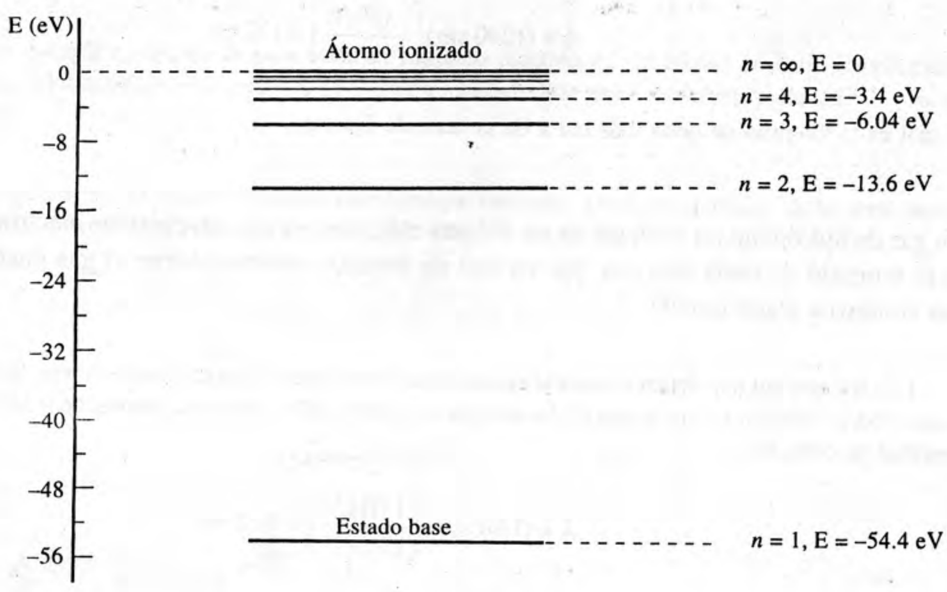


Fig. 43-3

43.6 ¿Cuáles son las dos longitudes de onda más cortas de la serie de Balmer para un átomo de helio ionizado simplemente?

El diagrama de niveles se muestra en la Fig. 43-3. Debe recordarse que la serie de Balmer corresponde a las transiciones de niveles altos al nivel $n = 2$. Del diagrama, las dos transiciones más pequeñas hasta $n = 2$ son

$$n = 3 \rightarrow n = 2 \qquad \Delta E_{3,2} = 13.6 - 6.04 = 7.6 \text{ eV}$$

$$n = 4 \rightarrow n = 2 \qquad \Delta E_{4,2} = 13.6 - 3.4 = 10.2 \text{ eV}$$

Utilizando el hecho de que 1 eV corresponde a 1240 nm, se calculan las longitudes de onda correspondientes, siendo 163 nm y 122 nm; ambas longitudes de onda son del ultravioleta lejano en la región de los rayos X largos.

43.7 Se bombardean átomos de hidrógeno no excitados con electrones que son acelerados a través de 12.0 V. ¿Cuál es la longitud de onda que emiten los átomos?

Cuando a los átomos en su estado base se les dan 12.0 eV de energía, los electrones de éstos no pueden ser excitados más allá de los 12.0 eV arriba de su estado base. Sólo existe un estado en esta región de energía, el estado $n = 2$. Por lo tanto, únicamente esta transición es posible

$$n = 2 \rightarrow n = 1: \qquad \Delta E_{2,1} = 13.6 - 3.4 = 10.2 \text{ eV}$$

Solamente se permitirá la longitud de onda

$$\lambda = (1240 \text{ nm})\left(\frac{1.00 \text{ eV}}{10.2 \text{ eV}}\right) = 122 \text{ nm}$$

la cual es la longitud de onda más corta de la serie de Lyman.

43.8 Un gas de hidrógeno no excitado es un aislante eléctrico, ya que no contiene electrones libres. ¿Cuál es la longitud de onda máxima que un haz de fotones incidente sobre el gas puede causar que el gas conduzca electricidad?

Los fotones del haz deben ionizar al átomo para que se produzcan electrones libres. (Esto se llama *efecto fotoeléctrico atómico.*) Para lograrlo, la energía del fotón debe de ser al menos de 13.6 eV, y la máxima longitud de onda es

$$\lambda = (1240 \text{ nm})\left(\frac{1.00 \text{ eV}}{13.6 \text{ eV}}\right) = 91.2 \text{ nm}$$

la cual es el límite de la serie que corresponde a Lyman.

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

43.9 Una línea espectral en el espectro del átomo de hidrógeno tiene una longitud de onda de 821 nm. ¿Cuál es la diferencia de energías entre los dos estados que dan esta línea? *Resp.* 1.51 eV

43.10 ¿Cuáles son las energías de las dos líneas de la serie de Paschen para el hidrógeno con longitud de onda más larga? ¿Cuáles son sus longitudes de onda? Dé sus respuestas en dos cifras significativas. *Resp.* 0.66 eV y 0.97 eV, 1.9×10^{-6} m y 1.3×10^{-6} m

43.11 ¿Cuál es la longitud de onda de la línea límite de la serie de Paschen para el hidrógeno? *Resp.* 821 nm

43.12 El átomo de litio tiene una carga nuclear de $+3e$. Encuentre la energía requerida para quitar el tercer electrón de un átomo de litio que ya ha perdido dos de sus electrones. Suponga que el tercer electrón se encuentra en el estado base. *Resp.* 122 eV

43.13 Los electrones de un haz electrónico son acelerados a través de una diferencia de potencial V e inciden sobre átomos de hidrógeno en su estado base. ¿Cuál es el máximo valor de V si las colisiones deben ser perfectamente elásticas? *Resp.* < 10.2 V

43.14 ¿Cuáles son las tres longitudes de onda más largas que un átomo de helio simplemente ionizado (en su estado base) absorberá más fuertemente? (Véase la Fig. 43-3.) *Resp.* 30.4 nm, 25.6 nm, 24.3 nm

43.15 ¿Cuánta energía es requerida para sacar el segundo electrón de un átomo de helio simplemente ionizado? ¿Cuál es la longitud de onda máxima de un fotón incidente que quita este electrón de ion? *Resp.* 54.4 eV, 22.8 nm

43.16 En el espectro de un átomo de helio simplemente ionizado, ¿cuál es el límite de la serie para su serie de Balmer? *Resp.* 91 nm

capítulo 44

Átomos de multielectrones

EN UN ÁTOMO NEUTRO cuyo núcleo tiene una carga Ze hay Z electrones. Cuando los electrones cuentan con la menor energía posible, se dice que el átomo está en su *estado base*. El estado de un átomo está especificado por los *números cuánticos* de cada uno de sus electrones.

LOS NÚMEROS CUÁNTICOS que se utilizan para especificar los parámetros de un electrón atómico son los siguientes:

- El *número cuántico principal n* especifica la órbita, o capa, en la cual se puede localizar el electrón. En un átomo de hidrógeno, especifica la energía del electrón por medio de $E_n = -13.6/n^2$ eV.
- El *número cuántico orbital* ℓ especifica el momento angular L del electrón en su órbita:

$$L = \left(\frac{h}{2\pi}\right)\sqrt{\ell(\ell+1)}$$

  donde h es la constante de Planck, y $\ell = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

- El *número cuántico magnético* m_ℓ describe la orientación del vector momento angular orbital con relación a la dirección z, la dirección de un campo magnético aplicado:

$$L_z = \left(\frac{h}{2\pi}\right)(m_\ell)$$

  donde $m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \ell$.

- El *número cuántico de espín* m_s tiene los valores permitidos de $\pm\frac{1}{2}$.

EL PRINCIPIO DE EXCLUSIÓN DE PAULI dice que dos electrones en el mismo átomo no pueden tener los mismos números cuánticos. En otras palabras, no pueden encontrarse dos electrones en el mismo estado.

PROBLEMAS RESUELTOS

44.1 Calcule la energía que se requiere para sacar a un electrón con $n = 1$ (esto es, la capa más interior) de un átomo de oro ($Z = 79$).

Como un electrón en la capa más interior del átomo no está muy afectado por los electrones distantes de las capas exteriores, se puede considerar como si fuera el único electrón presente. Entonces su energía está dada por la ecuación de la energía del capítulo 43. Cuando $n = 1$, esa ecuación, $E_n = -13.6Z^2/n^2$, da

$$E_1 = -13.6(79)^2 = -84\ 900\ \text{eV} = -84.9\ \text{keV}$$

Para sacar al electrón (esto es, llevarlo al nivel $E_\infty = 0$) se debe proporcionar una energía de aproximadamente 84.9 keV.

44.2 ¿Cuáles son los números cuánticos de los electrones en un átomo de litio ($Z = 3$) y cuando el átomo está en su estado base?

El principio de exclusión de Pauli dice que los tres electrones del átomo de litio sólo pueden tener los siguientes números cuánticos:

Electrón 1:	$n = 1,$	$\ell = 0,$	$m_\ell = 0,$	$m_s = +\frac{1}{2}$
Electrón 2:	$n = 1,$	$\ell = 0,$	$m_\ell = 0,$	$m_s = -\frac{1}{2}$
Electrón 3:	$n = 2,$	$\ell = 0,$	$m_\ell = 0,$	$m_s = +\frac{1}{2}$

Note que cuando $n = 1$, ℓ debe ser cero y por lo tanto m_ℓ debe ser cero (¿por qué?). Así que sólo hay dos posibilidades para $n = 1$, y el tercer electrón tiene que estar en el nivel $n = 2$. Como éste se encuentra en la segunda órbita de Bohr, es más fácil sacarlo del átomo que a un electrón que se encuentra en el estado $n = 1$. Es por esto que el litio se ioniza fácilmente en Li^+.

44.3 ¿Por qué el sodio ($Z = 11$) es el siguiente átomo univalente después del litio?

El sodio tiene un único electrón en la capa $n = 3$. Para comprobar por qué es así necesariamente, nótese que el principio de exclusión únicamente permite dos electrones en la capa $n = 1$. Los siguientes ocho electrones se pueden acomodar en la capa $n = 2$, como se muestra a continuación:

$$n = 2, \quad \ell = 0, \quad m_\ell = 0, \quad m_s = \pm\tfrac{1}{2}$$
$$n = 2, \quad \ell = 1, \quad m_\ell = 0, \quad m_s = \pm\tfrac{1}{2}$$
$$n = 2, \quad \ell = 1, \quad m_\ell = 1, \quad m_s = \pm\tfrac{1}{2}$$
$$n = 2, \quad \ell = 1, \quad m_\ell = -1, \quad m_s = \pm\tfrac{1}{2}$$

El décimo primer electrón debe entrar en la capa $n = 3$, de donde es fácil removerlo para obtener Na^+.

44.4 *a*) Calcule la longitud de onda de un fotón emitido cuando un electrón pasa de la capa $n = 2$ a la capa $n = 1$ en un átomo de oro ($Z = 79$). *b*) ¿Cuál debe ser la energía para que los electrones que bombardean al átomo de oro lo exciten y se produzca esta línea de emisión?

a) Como en el problema 44.1, en una primera aproximación las energías de los electrones más interiores de un átomo con número Z grande están dadas por $E_n = -13.6Z^2/n^2$ eV. Entonces, se tiene

$$\Delta E_{2,1} = 13.6(79)^2\left(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{4}\right) = 63\,700\text{ eV}$$

Ésta corresponde a un fotón con

$$\lambda = (1240\text{ nm})\left(\frac{1\text{ eV}}{63\,700\text{ eV}}\right) = 0.019\,5\text{ nm}$$

Es claro, a partir de este resultado, que las transiciones en las capas interiores en un átomo de número Z grande dan origen a la emisión de rayos X.

b) Antes de que un electrón en $n = 2$ caiga a la capa $n = 1$, un electrón en $n = 1$ debe pasar a un estado vacío con n grande, que se aproxima como $n = \infty$ (con $E_\infty = 0$). Esto requiere una energía

$$\Delta E_{1,\infty} = 0 - \frac{-13.6Z^2}{n^2} = \frac{13.6(79)^2}{1} = 84.9\text{ keV}$$

Los electrones que bombardean deben tener una energía de aproximadamente 84.9 keV.

44.5 Suponga que los electrones no tienen espín, de tal forma que no existe el número cuántico de espín. Si el principio de exclusión de Pauli se sigue aplicando a los otros números cuánticos, ¿cuáles serán los tres primeros átomos univalentes?

Los electrones tomarán los siguientes números cuánticos:

Electrón 1:	$n = 1,$	$\ell = 0,$	$m_\ell = 0$	(univalente)
Electrón 2:	$n = 2,$	$\ell = 0,$	$m_\ell = 0$	(univalente)
Electrón 3:	$n = 2,$	$\ell = 1,$	$m_\ell = 0$	
Electrón 4:	$n = 2,$	$\ell = 1,$	$m_\ell = +1$	
Electrón 5:	$n = 2,$	$\ell = 1,$	$m_\ell = -1$	
Electrón 6:	$n = 3,$	$\ell = 0,$	$m_\ell = 0$	(univalente)

Cada electrón marcado como "univalente" es el primer electrón de una nueva capa. Como es fácil remover un electrón cuando se encuentra en la capa más exterior de un átomo, los átomos con ese número de electrones son univalentes. Éstos son los átomos con $Z = 1$ (hidrógeno), $Z = 2$ (helio) y $Z = 6$ (carbono). ¿Podría demostrar que $Z = 15$ (fósforo) también sería univalente?

44.6 Los electrones en un átomo que tienen el mismo valor de ℓ pero diferente valor de m_ℓ y m_s están supuestamente en la misma *subcapa*. ¿Cuántos electrones existen en la subcapa $\ell = 3$?

Como m_ℓ está restringido a los valores 0, ±1, ±2, ±3, y $m_s = \pm\frac{1}{2}$ solamente, las posibilidades para $\ell = 3$ son

$$(m_\ell,\ m_s) = (0,\ \pm\tfrac{1}{2}), (1,\ \pm\tfrac{1}{2}), (-1,\ \pm\tfrac{1}{2}), (2,\ \pm\tfrac{1}{2}), (-2,\ \pm\tfrac{1}{2}), (3,\ \pm\tfrac{1}{2}), (-3,\ \pm\tfrac{1}{2})$$

que nos da 14 opciones. Por lo tanto, pueden existir 14 electrones en esta subcapa.

44.7 Un haz de electrones en un tubo de rayos X se acelera con una diferencia de potencial de 40 kV *e incide sobre un blanco de tungsteno. ¿Cuál es la longitud de onda más corta emitida por el tubo?*

Cuando un electrón en el haz es frenado por el blanco, los fotones emitidos tienen un límite superior para su energía, principalmente la energía del electrón incidente. En este caso, esa energía es 40 keV. El fotón correspondiente tiene una longitud de onda dada por

$$\lambda = (1240\ \text{nm})\left(\frac{1.0\ \text{eV}}{40\,000\ \text{eV}}\right) = 0.031\ \text{nm}$$

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

44.8 Si no existiera el número cuántico m_ℓ, ¿cuáles serían los primeros cuatro átomos univalentes? *Resp.* H, Li, N, Al

44.9 El helio tiene una capa exterior cerrada (completamente llena) y no es reactivo, ya que el átomo no pierde fácilmente un electrón. Demuestre por qué el neón ($Z = 10$) es el siguiente elemento no reactivo.

44.10 Se desea desprender un electrón de la capa $n = 1$ de un átomo de uranio ($Z = 92$) por medio del efecto fotoeléctrico atómico. ¿Cuál será la longitud de onda más grande capaz de hacerlo? *Resp.* 0.010 8 nm

44.11 Demuestre que el número máximo de electrones que pueden existir en la subcapa ℓ-ésima es $2(2\ell + 1)$.

capítulo 45

Núcleos y radiactividad

EL NÚCLEO de un átomo contiene las cargas positivas en el centro del átomo. Su radio es aproximadamente de 10^{-15} m, el cual es aproximadamente 10^{-5} tan grande como el radio del átomo. El hidrógeno es el más ligero y el más sencillo de todos los átomos. Su núcleo es un solo protón. Todos los demás núcleos contienen tanto protones como neutrones. De manera colectiva, a los protones y los neutrones se les llama *nucleones*. Aunque las cargas positivas de los protones hacen que se repelan unos a otros, una fuerza más intensa de corto alcance, la *fuerza nuclear* (la cual es una manifestación de la *fuerza intensa* más fundamental) logra que se mantengan juntos en el núcleo. La fuerza atractiva nuclear entre nucleones decrece rápidamente con la distancia de separación y es esencialmente cero para nucleones separados más de 5×10^{-15} m.

CARGA NUCLEAR Y NÚMERO ATÓMICO: Cada protón en el núcleo aporta una carga de $+e$, mientras que los neutrones no contribuyen con carga. Si existen Z protones en el núcleo, entonces la carga en éste es $+Ze$. Por lo que Z es el *número atómico* para ese núcleo.

Como los átomos normalmente son eléctricamente neutros, un átomo tiene Z electrones fuera del núcleo. Estos Z electrones determinan el comportamiento químico del átomo. Como resultado, todo átomo del mismo elemento químico tiene el mismo valor Z. Por ejemplo, todos los átomos de hidrógeno tienen $Z = 1$, de la misma forma que todos los átomos de carbono tienen $Z = 6$.

UNIDAD DE MASA ATÓMICA (u): Una unidad de masa conveniente que se utiliza en cálculos nucleares es la *unidad de masa atómica* (u). Por definición, 1 u es exactamente 1/12 de la masa de un átomo de carbono en la forma común en que se encuentra en la Tierra. Es decir:

$$1 \text{ u} = 1.660\,5 \times 10^{-27} \text{ kg} = 931.494 \text{ MeV/c}^2$$

La tabla 45-1 muestra las masas de algunas de las partículas y núcleos más comunes, así como sus cargas,

NÚMERO DE MASA (A) de un átomo es igual al número de nucleones (neutrones y protones) en el núcleo del átomo. Ya que cada nucleón tiene masa cercana a 1 u, el número de masa A es prácticamente igual a la masa nuclear en unidades de masa atómica. En resumen, debido a que los electrones tienen una masa muy pequeña, A es aproximadamente igual a la masa del átomo en unidades de masa atómica.

Tabla 45-1

Partícula	Símbolo	Masa, u	Carga
Protón	p, ${}^1_1$H	1.007 276	$+e$
Neutrón	n, ${}^1_0n$	1.008 665	0
Electrón	e^-, β^-, ${}^{\;0}_{-1}e$	0.000 548 6	$-e$
Positrón	e^+, β^+, ${}^{\;0}_{+1}e$	0.000 548 6	$+e$
Deuterón	d, ${}^2_1$H	2.013 55	$+e$
Partícula alfa	α, ${}^4_2$He	4.001 5	$+2e$

ISÓTOPOS: El número de neutrones en el núcleo tiene un pequeño efecto en el comportamiento químico del átomo. En la naturaleza, los átomos del mismo elemento (igual Z) existen a veces teniendo distintos números de neutrones en sus núcleos. A esos átomos se les llama *isótopos*. Por ejemplo, el oxígeno ordinario se presenta en tres isótopos que tienen número de masa 16, 17 y 18. Cada uno de los isótopos tiene $Z = 8$, ocho protones en su núcleo. Sin embargo, estos isótopos tienen los siguientes números de neutrones en sus núcleos: $16 - 8 = 8$, $17 - 8 = 9$, $18 - 8 = 10$. Se acostumbra representar a los isótopos de la siguiente forma: ${}^{16}_{8}$O, ${}^{17}_{8}$O, ${}^{18}_{8}$O, o simplemente como ^{16}O, ^{17}O y ^{18}O, donde se sobreentiende que el oxígeno siempre tiene $Z = 8$.

En esta notación, se designa a los núcleos con un número de masa atómica A y un número atómico Z, por el simbolismo

$${}^{A}_{Z}(\text{SÍMBOLO QUÍMICO})$$

ENERGÍAS DE ENLACE: La masa de un átomo no es igual a la suma de las masas de sus protones, neutrones y electrones que la componen. Imagine una reacción en la cual los electrones, protones y neutrones libres se combinan para formar un átomo; en dicha reacción, se podría calcular que la masa es *ligeramente menor* que la combinación de las masas de las partes componentes, y también que se libera una gran cantidad de energía cuando ocurre la reacción. La pérdida en la masa es exactamente igual a la masa equivalente de la energía liberada, de acuerdo con la ecuación de Einstein $\Delta E_0 = (\Delta m)c^2$. Recíprocamente, esta cantidad de energía, ΔE_0, tendría que dársele al átomo para separarlo completamente en sus componentes. Se denomina ΔE_0 como la *energía de enlace* del átomo. Una pérdida de masa $\Delta m = 1$ u es equivalente a

$$(1.66 \times 10^{-27}\ \text{kg})(2.99 \times 10^{8}\ \text{m/s})^2 = 1.49 \times 10^{-10}\ \text{J} = 931\ \text{MeV}$$

de energía de enlace.

El porcentaje de masa "perdida" es diferente para cada isótopo de cualquier elemento. Las masas atómicas de algunos de los isótopos más conocidos están dadas en la tabla 45-2. Estas masas corresponden a los átomos neutros e incluyen los electrones de las órbitas.

Tabla 45-2

Átomo neutro	Masa atómica, u	Átomo neutro	Masa atómica, u
$^{1}_{1}H$	1.007 83	$^{7}_{4}Be$	7.016 93
$^{2}_{1}H$	2.014 10	$^{9}_{4}Be$	9.012 19
$^{3}_{1}H$	3.016 04	$^{12}_{6}C$	12.000 00
$^{4}_{2}He$	4.002 60	$^{14}_{7}N$	14.003 07
$^{6}_{3}Li$	6.015 13	$^{16}_{8}O$	15.994 91
$^{7}_{3}Li$	7.016 00		

RADIACTIVIDAD: Son *radiactivos* los núcleos que se encuentran en la naturaleza con Z más grande que el correspondiente al plomo, 82. Muchos de los elementos con Z más pequeño, producidos por el hombre, son también radiactivos. Los núcleos radiactivos emiten espontáneamente una o más partículas para transformarse en un núcleo diferente.

La estabilidad de un núcleo radiactivo en función de su decaimiento espontáneo es medida por su *vida media* $t_{1/2}$. La vida media se define como el tiempo en el cual la mitad de cualquier muestra de núcleos decae (o se desintegra). La vida media es un número fijo para cualquier isótopo.

La desintegración o decaimiento radiactivo es un proceso azaroso. Sin importar cuándo empiece a observarse un material, sólo la mitad de éste permanecerá sin cambio después de un tiempo $t_{1/2}$; después de $t_{1/2}$, sólo $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ del material permanecerá sin cambio. Después de que han pasado n vidas-medias, sólo $(\frac{1}{2})^n$ permanecerá sin cambio.

Existe una relación simple entre el número N de átomos del material radiactivo presente y el número ΔN que se desintegrará en un corto tiempo Δt. Esta es

$$\Delta N = \lambda N \, \Delta t$$

donde λ, la *constante de decaimiento*, se relaciona con la vida media $t_{1/2}$ a través de

$$\lambda t_{1/2} = 0.693$$

La cantidad $\Delta N/\Delta t$, que es la rapidez de desintegración de la muestra, se llama la *actividad* de la muestra. Es igual a λN y, por lo tanto, decrece con el tiempo. La unidad para la actividad en el SI es el *becquerel* (Bq), donde 1 Bq = 1 decaimiento/s.

ECUACIONES NUCLEARES: En una ecuación balanceada la suma de los subíndices (números atómicos) debe ser la misma de los dos lados de la ecuación. La suma de los índices superiores (números de masa) debe también ser igual en los dos lados de la ecuación. Así la ecuación para la radiación primaria del radio es:

$$^{226}_{88}Ra \rightarrow {}^{222}_{86}Rn + {}^{4}_{2}He$$

Muchos procesos nucleares pueden indicarse con notación condensada, en la cual la partícula de radiación que bombardea y la partícula producto se representan por símbolos encerrados en paréntesis, entre los símbolos del núcleo emisor inicial y el núcleo del producto final. Los símbolos *n, p, d,* α, e^- y γ se utilizan para representar al neutrón, protón, deuterón ($^2_1$H), partícula alfa, electrón y rayo gama (fotones), respectivamente. A continuación se presentan tres ejemplos de raciones en notación larga y en condensada:

$$^{14}_{7}\mathrm{N} + ^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow ^{11}_{6}\mathrm{C} + ^{4}_{2}\mathrm{He} \qquad ^{14}\mathrm{N}(p, a)^{11}\mathrm{C}$$

$$^{27}_{13}\mathrm{Al} + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{27}_{12}\mathrm{Mg} + ^{1}_{1}\mathrm{H} \qquad ^{27}\mathrm{Al}(n, p)^{27}\mathrm{Mg}$$

$$^{55}_{25}\mathrm{Mn} + ^{2}_{1}\mathrm{H} \rightarrow ^{55}_{26}\mathrm{Fe} + 2^{1}_{0}n \qquad ^{55}\mathrm{Mn}(d, 2n)^{55}\mathrm{Fe}$$

Como no tiene carga positiva, el neutrón lento es un agente muy eficiente para causar transmutaciones y puede aproximarse al núcleo sin ser repelido. Una partícula cargada como el protón debe tener una alta energía para ocasionar una transmutación. Debido a su pequeña masa, incluso los electrones de mayor energía son relativamente ineficientes para causar transmutaciones.

PROBLEMAS RESUELTOS

45.1 El radio del núcleo del carbono es aproximadamente de 3×10^{-15} m y su masa es de 12 u. Encuentre la densidad promedio del material nuclear. ¿Cuántas veces es éste más denso que el agua?

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{4\pi r^3/3} = \frac{(12\ \mathrm{u})(1.66 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg/u})}{4\pi(3 \times 10^{-15}\ \mathrm{m})^3/3} = 1.8 \times 10^{17}\ \mathrm{kg/m^3}$$

$$\frac{\rho}{\rho_{\mathrm{agua}}} = \frac{1.8 \times 10^{17}}{1000} = 2 \times 10^{14}$$

45.2 En un *espectómetro de masas*, las masas de los iones se determinan a partir de sus deflexiones en un campo magnético. Suponga que un ion de cloro se dispara perpendicularmente a un campo magnético $B = 0.15$ T con una rapidez de 5.0×10^4 m/s. (La rapidez se puede medir con un selector de velocidades.) El cloro tiene dos isótopos, cuyas masas son 34.97 u y 36.97 u. ¿Cuáles deben ser los radios de las trayectorias circulares que describen los dos isótopos en el campo magnético? (Véase la Fig. 45-1.)

Las masas de los dos isótopos son

$$m_1 = (34.97\ \mathrm{u})(1.66 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg/u}) = 5.81 \times 10^{-26}\ \mathrm{kg}$$

$$m_2 = (36.97\ \mathrm{u})(1.66 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg/u}) = 6.14 \times 10^{-26}\ \mathrm{kg}$$

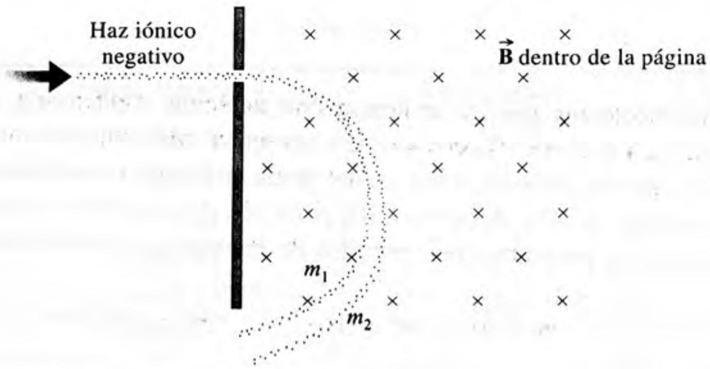


Fig. 45-1

Debido a que la fuerza magnética qvB produce la fuerza centrípeta mv^2/r, se tiene

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{m(5.0 \times 10^4 \text{ m/s})}{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(0.105 \text{ T})} = m(2.98 \times 10^{24} \text{ m/kg})$$

Al sustituir los valores de m se encuentra que los radios son 0.17 m y 0.18 m.

45.3 ¿Cuántos protones, neutrones y electrones hay en *a*) ^{3}He, *b*) ^{12}C y *c*) ^{206}Pb?

a) El número atómico del He es 2; por lo tanto el núcleo contiene 2 protones. Siendo 3 el número de masa de este isótopo, la suma de protones y neutrones es igual a 3; por lo que tiene un neutrón. El número de electrones en el átomo es igual al número atómico, 2.

b) El número atómico del carbono es 6, entonces el núcleo contiene 6 protones. El número de neutrones en el núcleo es igual a $12 - 6 = 6$. El número de electrones es el mismo que el número atómico, 6.

c) El número atómico del plomo es 82; entonces tiene 82 protones en el núcleo y 82 electrones en el átomo. El número de neutrones es $206 - 82 = 124$.

45.4 ¿Cuál es la energía de enlace del ^{12}C?

Un átomo de ^{12}C consiste de 6 protones, 6 electrones y 6 neutrones. La masa de los protones y electrones no combinados es la misma que la de seis átomos de ^{1}H (ignoramos la pequeña energía de enlace de cada par protón-electrón). Puede considerarse que las partículas que lo componen son seis átomos de ^{1}H y seis neutrones. El balance de masa puede calcularse como sigue

Masa de seis átomos de ^{1}H = 6 × 1.007 8 u	= 6.046 8 u
Masa de seis neutrones = 6 × 1.008 7 u	= <u>6.052 2 u</u>
Masa total de las partículas componentes	= 12.099 0 u
Masa del átomo ^{12}C	= <u>12.000 0 u</u>
Masa perdida al formarse el ^{12}C	= 0.099 0 u
Energía de enlace = (931 × 0.099 0) MeV	= 92 MeV

45.5 El cobalto 60 (^{60}Co) se utiliza frecuentemente como fuente radiactiva en medicina. Su vida media es 5.25 años. ¿Cuánto tiempo después de entregada una muestra nueva habrá disminuido su actividad *a*) a una octava parte del valor original; *b*) a una tercera parte de su valor original?

La actividad es proporcional al número de átomos que no han decaído ($\Delta N/\Delta t = \lambda N$).

a) En cada vida media la mitad de la muestra remanente se desintegra. Ya que $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ se requieren tres vidas medias, es decir 16 años, para que la muestra decaiga hasta una octava parte de su actividad original.

b) Al utilizar el factor de que el material decae hasta la mitad en 5.25 años, podemos trazar la gráfica mostrada en la Fig. 45-2. De aquí podemos ver que la muestra decae hasta 0.33 de su valor original después de aproximadamente 8.3 años.

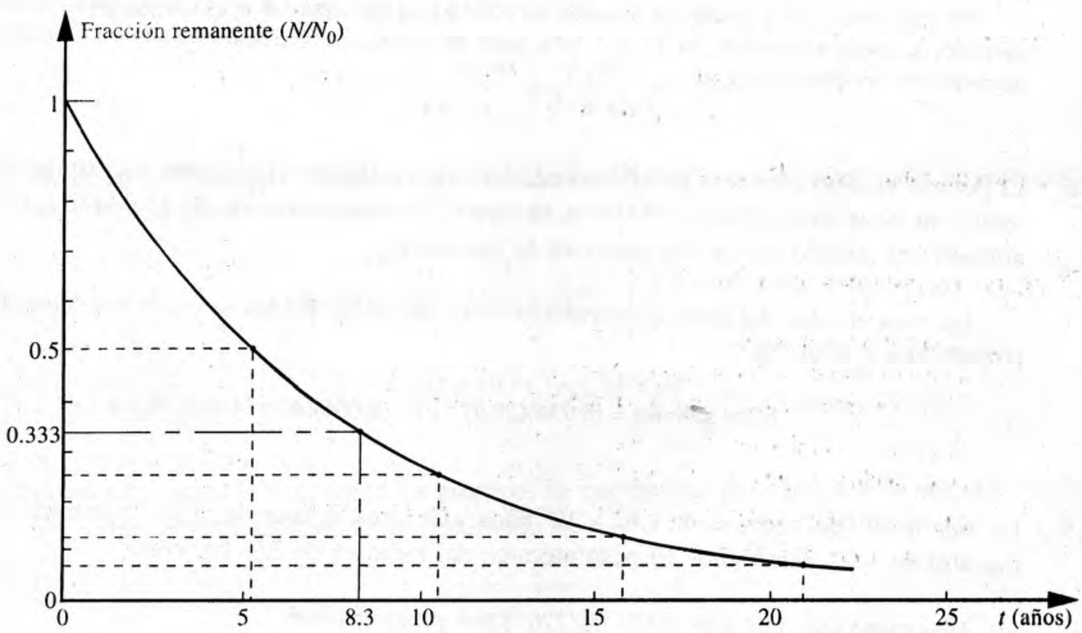


Fig. 45-2

45.6 Resuelva el problema 45.5*b*) utilizando la función exponencial.

La curva de decaimiento de la Fig. 45-2 es una *curva exponencial de decaimiento-desintegración* y es expresada por la ecuación

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t}$$

donde λ es la constante de decaimiento, N/N_0 es la fracción de las partículas originales N_0 remanentes que no han decaído después de un tiempo t. En nuestro caso, $\lambda t_{1/2} = 0.693$, $\lambda = 0.693/t_{1/2} = 0.132/\text{año}$ y $N/N_0 = 0.333$. Entonces

$$0.333 = e^{-0.132t/\text{año}}$$

Al tomar logaritmos naturales de ambos lados de la ecuación se encuentra

$$\ln(0.333) = -0.132t/\text{año}$$

con lo cual $t = 8.3$ años.

45.7 **Para la situación descrita en el problema 45.5, ¿cuál es la N/N_0 después de 20 años?**

Como en el problema anterior,

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t} = e^{-(0.132)(20)} = e^{-2.64}$$

de donde $N/N_0 = 0.071$.

En este caso y en el problema anterior, se utilizó t en años porque λ está expresada en (años)$^{-1}$. Más a menudo, λ puede expresarse en s^{-1} y t debe estar en segundos. Téngase cuidado en emplear las mismas unidades de tiempo para t y λ.

45.8 **El potasio encontrado en la naturaleza contiene dos isótopos. Un isótopo constituye el 93.4% del total y su masa atómica es de 38.975 u; el otro 6.6% tiene una masa de 40.974 u. Calcule la masa atómica del potasio que se encuentra en la naturaleza.**

La masa atómica del material encontrado en la naturaleza se obtiene por la combinación de ésta en proporción a su abundancia

$$\text{Masa atómica} = (0.934)(38.975\ \text{u}) + (0.066)(40.974\ \text{u}) = 39.1\ \text{u}$$

45.9 **La vida media del radio es de 1.62×10^3 años. ¿Cuántos átomos de radio decaen en 1.00 s en una muestra de 1.00 g de radio? El peso atómico del radio es de 226 kg/kmol.**

Una muestra de 1.00 g es (0.001 00/226) kmol y ésta contiene

$$N = \left(\frac{0.00100}{226}\ \text{kmol}\right)\left(6.02 \times 10^{26}\ \frac{\text{átomos}}{\text{kmol}}\right) = 2.66 \times 10^{21}\ \text{átomos}$$

La constante de decaimiento es

$$\lambda = \frac{0.693}{t_{1/2}} = \frac{0.693}{(1620\ \text{años})(3.156 \times 10^7\ \text{s/año})} = 1.36 \times 10^{-11}\ \text{s}^{-1}$$

Entonces

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \lambda N = (1.36 \times 10^{-11}\ \text{s}^{-1})(2.66 \times 10^{21}) = 3.61 \times 10^{10}\ \text{s}^{-1}$$

es el número de desintegraciones por segundo en 1.00 g de radio.

A propósito de este resultado, se puede definir el *curie* (Ci) como una unidad de actividad:

$$1\ \text{Ci} = 3.7 \times 10^{10}\ \text{desintegraciones/s}$$

Debido a su conveniente tamaño, algunas veces se utilizará el curie en los problemas subsecuentes, aunque la unidad oficial para la actividad sea el becquerel.

45.10 El tecnesio 99 ($^{99}_{43}$Tc) tiene un estado de excitación que se desintegra por la emisión de un rayo gama. La vida media del estado excitado es de 360 min. ¿Cuál es la actividad, en curie, de 1.00 mg de este isótopo excitado?

La actividad de la muestra es λN. En este caso,

$$\lambda = \frac{0.693}{t_{1/2}} = \frac{0.693}{21\,600\,\text{s}} = 3.21 \times 10^{-5}\ \text{s}^{-1}$$

También se sabe que 99.0 kg de Tc contienen 6.02×10^{26} átomos. Una masa m entonces contendrá $[m/(99.0\ \text{kg})](6.02 \times 10^{26})$ átomos. En este caso, $m = 1.00 \times 10^{-6}$ kg, y así

$$\text{Actividad} = \lambda N = (3.21 \times 10^{-5}\ \text{s}^{-1})\left(\frac{1.00 \times 10^{-6}\ \text{kg}}{99.0\ \text{kg}}\right)(6.02 \times 10^{26})$$

$$= 1.95 \times 10^{14}\ \text{s}^{-1} = 1.95 \times 10^{14}\ \text{Bq}$$

45.11 ¿Cuánta energía deben poseer los protones de bombardeo para producir la reacción ^{7}Li$(p, n)^7$ Be? Dé sus respuestas en tres cifras significativas.

La reacción es la siguiente:

$$^7_3\text{Li} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^7_4\text{Be} + {}^1_0n$$

donde los símbolos representan *los núcleos* de los átomos indicados. Dado que la lista de masas en la tabla 45-2 incluye las masas de los electrones, el número apropiado de masas de electrones (m_e) debe restarse de los valores dados.

	Reactivos		**Productos**
$^7_3$Li	$7.016\,00 - 3m_e$	$^7_4$Be	$7.016\,93 - 4m_e$
$^1_1$H	$1.007\,83 - 1m_e$	^1_0n	$1.008\,66$
TOTAL	$8.023\,83 - 4m_e$	TOTAL	$8.025\,59 - 4m_e$

Restando la masa total de reactantes de la masa total de productos se obtiene un incremento de masa de 0.001 76 u. (Nótese que las masas de los electrones se cancelan. Esto pasa frecuentemente, pero no siempre.)

Para crear esta masa en la reacción, la energía debe de ser proporcionada por los reactantes. La energía correspondiente a 0.001 76 u es $(931 \times 0.001\,76)$ MeV = 1.65 MeV. Esta energía es proporcionada por la EC de protones que bombardean. El protón incidente debe tener más que esta energía, ya que el sistema debe poseer algo de EC después de la reacción, en la cual se conserva en momento (ímpetu). Considerando la conservación del momento, la EC mínima que la partícula incidente debe tener puede ser calculada con la fórmula

$$\left(1+\frac{m}{M}\right)(1.65)\,\text{MeV}$$

donde M es la masa de la partícula blanco, y m es la de la partícula incidente. Por lo tanto, la partícula incidente debe tener una energía de al menos

$$(1+\tfrac{1}{7})(1.65)\,\text{MeV} = 1.89\,\text{MeV}$$

45.12 Complete las siguientes ecuaciones nucleares:

a) ${}^{14}_{7}\text{N} + {}^{4}_{2}\text{He} \rightarrow {}^{17}_{8}\text{O} + ?$ *d*) ${}^{30}_{15}\text{P} \rightarrow {}^{30}_{14}\text{Si} + ?$

b) ${}^{9}_{4}\text{Be} + {}^{4}_{2}\text{He} \rightarrow {}^{12}_{6}\text{C} + ?$ *e*) ${}^{3}_{1}\text{H} \rightarrow {}^{3}_{2}\text{He} + ?$

c) ${}^{9}_{4}\text{Be}(p, \alpha)\ ?$ *f*) ${}^{43}_{20}\text{Ca}(\alpha, ?){}^{46}_{21}\text{Sc}$

a) La suma de los subíndices del lado izquierdo es $7+2=9$. El subíndice del primer producto de la derecha es 8. Entonces el segundo producto de la derecha debe tener un subíndice (carga neta) de 1. También la suma de los superíndices de la izquierda es $14+4=18$. El superíndice del primer producto de la derecha es 17. Entonces el segundo producto de la derecha debe tener un superíndice (número de masa) de 1. La partícula con carga nuclear 1 y número de masa 1 es el protón, ${}^{1}_{1}\text{H}$.

b) La carga nuclear del segundo producto (su subíndice) es $(4+2)-6=0$. El número de masa de la partícula (su superíndice) es $(9+4)-12=1$. Por lo tanto la partícula debe ser un neutrón, ${}^{1}_{0}n$.

c) Los reactantes ${}^{9}_{4}\text{Be}$ y ${}^{1}_{1}\text{H}$ tienen una carga nuclear combinada de 5 y un número de masa de 10. Al añadir la partícula alfa, el producto que se formará debe tener una carga de $5-2=3$ y un número de masa $10-4=6$. Éste es ${}^{6}_{3}\text{Li}$.

d) La carga nuclear de la segunda partícula producto es $15-14=+1$. Su número de masa es $30-30=0$. Entonces la partícula debe ser un positrón ${}^{\;0}_{+1}e$.

e) La carga nuclear de la segunda partícula producto es $1-2=-1$. Su número de masa es $3-3=0$. Por lo tanto la partícula debe ser una partícula beta (un electrón), ${}^{\;0}_{-1}e$.

f) Los reactantes, ${}^{43}_{20}\text{Ca}$ y ${}^{4}_{2}\text{He}$, tienen una carga nuclear combinada de 22 y un número de masa de 47. El producto desconocido tendrá una carga de $22-21=1$ y un número de masa de $47-46=1$. Éste es un protón y debe representarse en el paréntesis por p.

En algunas de estas reacciones son emitidos un neutrino y/o un fotón. Éstos se ignoraron para esta discusión, ya que la masa en reposo y la carga de ambos es cero.

45.13 El uranio 238 (${}^{238}_{92}\text{U}$) es radiactivo y decae emitiendo las siguientes partículas sucesivamente antes de alcanzar su forma estable: α, β, β, α, α, α, α, α, β, β, α, β, β y α (β representa una "partícula beta", e^-). ¿Cuál es el núcleo final estable?

El núcleo inicial emite 8 partículas alfa y 6 partículas beta. Cuando una partícula alfa es emitida, Z decrece en 2, ya que una partícula alfa siempre tiene una carga de $+2e$. Una partícula siempre tiene una carga de $-1e$, por lo tanto al ser emitida la carga del núcleo se incrementa a $(Z+1)e$. Entonces tenemos, para el núcleo final,

$$Z \text{ final} = 92 + 6 - (2)(8) = 82$$

$$A \text{ final} = 238 - (6)(0) - (8)(4) = 206$$

El núcleo estable final es el $^{206}_{82}Pb$.

45.14 La vida media del uranio 238 es de aproximadamente de 4.5×10^9 años, y su producto final es plomo 206. Las rocas más viejas de uranio que se conocen sobre la Tierra contienen una mezcla aproximada de 50 : 50 de ^{238}U y ^{206}Pb. ¿Cuál es la edad aproximada de estas rocas?

Aparentemente, cerca de la mitad del ^{238}U se desintegró en ^{206}Pb durante la existencia de la roca. Por lo tanto la roca debe tener aproximadamente 4.5 miles de millones de años de haberse formado.

45.15 Una partícula alfa de 5.6 MeV se dispara directamente sobre un átomo de uranio ($Z = 92$). ¿Qué tan cerca llegará del centro del núcleo de uranio?

Para altas energías, los efectos de los electrones atómicos pueden ignorarse. También se supondrá que el átomo de uranio es lo suficientemente masivo para no sufrir un movimiento apreciable. Entonces la EC inicial de la partícula alfa se transforma en energía potencial electrostática. Esta energía para una carga q' a una distancia r de la carga puntual q es (capítulo 25)

$$\text{Energía potencial} = q'V = k\frac{qq'}{r}$$

Igualando la EC de la partícula alfa a esta energía potencial, se encuentra que

$$(5.6 \times 10^6 \text{ eV})(1.60 \times 10^{-19} \text{ J/eV}) = (8.99 \times 10^9)\frac{(2e)(92e)}{r}$$

donde $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C. Se determina a partir de esto que $r = 4.7 \times 10^{-14}$ m.

45.16 El neón 23 tiene un decaimiento beta de la siguiente forma

$$^{23}_{10}Ne \rightarrow {}^{23}_{11}Na + {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}\overline{\nu}$$

donde $\overline{\nu}$ es un antineutrino, una partícula sin carga y sin masa en reposo. Dependiendo de las circunstancias, la energía aportada por el neutrino puede tener rangos desde cero hasta el máximo permitido por la reacción. Determine el mínimo y el máximo de EC que la partícula beta ${}^{0}_{-1}e$ puede tener. Las masas atómicas pertinentes son 22.994 5 u para el ^{23}Ne, y 22.989 8 u para el ^{23}Na. La masa en reposo de la partícula beta es de 0.000 55 u.

Antes de empezar, observe cuidadosamente que la reacción dada es una reacción *nuclear*, mientras que las masas son de los *átomos* neutros. Para calcular la pérdida de masa en la reacción, debemos restar la masa de los electrones atómicos de la masa atómica dada. Tenemos las siguientes masas nucleares:

Reactivos		Productos	
$^{23}_{10}\text{Ne}$	$22.994\,5 - 10m_e$	$^{23}_{11}\text{Na}$	$22.989\,8 - 11m_e$
		$^{0}_{-1}e$	m_e
		$^{0}_{0}\overline{\nu}$	0
TOTAL	$22.994\,5 - 10m_e$	TOTAL	$22.989\,8 - 10m_e$

con lo cual la masa perdida es de $22.994\,5 - 22.989\,8 = 0.004\,7$ u. Ya que 1.00 u corresponde a 931 MeV, esta masa perdida corresponde a una energía de 4.4 MeV. La partícula beta y el neutrino compartirán esta energía. Por lo tanto la energía de la partícula beta tiene un rango de cero a 4.4 MeV.

45.17 Un núcleo $^{M}_{n}\text{P}$, el núcleo *padre*, decae en un núcleo *hijo* H por un decaimiento de positrón:

$$^{M}_{n}\text{P} \rightarrow \text{H} + {}^{0}_{+1}e + {}^{0}_{0}\nu$$

donde ν es un *neutrino*, partícula que tiene masa cero y carga igual a cero. *a*) ¿Cuáles son el subíndice y el superíndice para H? *b*) Compruebe que la pérdida de masa en la reacción es $M_p - M_h - 2m_e$, donde M_p y M_h son las masas *atómicas* del padre y del hijo.

a) Por el balance de subíndice y superíndices, se tiene $^{M}_{n-1}\text{H}$.

b) La tabla de masas para los *núcleos* involucrados es

Reactivos		Productos	
$^{M}_{n}\text{P}$	$M_p - nm_e$	$^{M}_{n-1}\text{H}$	$M_h - (n-1)m_e$
		$^{0}_{1}e$	m_e
		$^{0}_{0}\upsilon$	0
TOTAL	$M_p - nm_e$	TOTAL	$M_h - nm_e + 2m_e$

Restando se obtiene la pérdida de masa:

$$(M_p - nm_e) - (M_h - nm_e + 2m_e) = M_p - M_h - 2m_e$$

Obsérvese cómo cobra importancia la masa de los electrones en éste y en el problema previo.

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

45.18 ¿Cuántos protones, neutrones y electrones posee un átomo de $^{235}_{92}U$? *Resp.* 92, 143, 92

45.19 ¿En cuánto cambia la masa de un núcleo pesado al emitir un rayo gama de 4.8 MeV? *Resp.* 5.2×10^{-3} u $= 8.6 \times 10^{-30}$ kg

45.20 Determine la energía de enlace del $^{107}_{47}Ag$, el cual tiene una masa atómica de 106.905 u. Dé su respuesta en tres cifras significativas. *Resp.* 915 eV

45.21 La energía de enlace por nucleón para un elemento cercano al hierro en la tabla periódica es aproximadamente de 8.90 MeV por nucleón. ¿Cuál es la masa atómica, incluyendo electrones, de $^{56}_{26}Fe$? *Resp.* 55.9 u

45.22 ¿Qué masa de $^{60}_{27}Co$ tiene una actividad de 1.0 Ci? La vida media de cobalto-60 es 5.25 años. *Resp.* 8.8×10^{-7} kg

45.23 Un experimento se realiza para determinar la vida media de una sustancia radiactiva que emite una partícula beta en cada proceso de desintegración. Las medidas muestran que un promedio de 8.4 partículas beta son emitidas cada segundo por 2.5 mg de la sustancia. La masa atómica de la sustancia es 230. Determine la vida media de la sustancia. *Resp.* 1.7×10^{10} años

45.24 La vida media del carbono-14 es de 5.7×10^3 años. ¿Qué fracción de una muestra de ^{14}C permanecerá sin cambio después de un periodo de 5 vidas medias? *Resp.* 0.031

45.25 El cesio-124 tiene una vida media de 31 s. ¿Qué fracción de una muestra de cesio-124 quedará después de 0.10 h? *Resp.* 0.000 32

45.26 Cierto isótopo tiene una vida media de 7.0 h. ¿Cuántos segundos se requieren para que se desintegre 10% de la muestra? *Resp.* 3.8×10^3 s

45.27 Por radiactividad natural el ^{238}U emite una partícula alfa. El núcleo residual pesado es llamado UX_1. El UX_1 emite una partícula beta. El núcleo resultante es llamado UX_2. Determine el número atómico y el número de masa para *a*) UX_1 y *b*) UX_2. *Resp.* *a*) 90, 234; *b*) 91, 234

45.28 Por radiactividad el $^{239}_{93}Np$ emite una partícula beta. El núcleo residual pesado también es radiactivo y da lugar al ^{235}U por el proceso radiactivo. ¿Qué pequeñas partículas se emiten simultáneamente con la formación del uranio-235? *Resp.* Partículas alfa

45.29 Complete las siguientes ecuaciones. (Vea el apéndice H para la tabla de los elementos.)

a) ${}^{23}_{11}Na + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{26}_{12}Mg + ?$ *d)* ${}^{10}_{5}B + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{13}_{6}N + ?$

b) ${}^{64}_{29}Cu \rightarrow {}^{0}_{+1}e + ?$ *e)* ${}^{105}_{48}Cd + {}^{0}_{-1}e \rightarrow ?$

c) ${}^{106}Ag \rightarrow {}^{106}Cd + ?$ *f)* ${}^{238}_{92}U \rightarrow {}^{234}_{90}Th + ?$

Resp. *a)* ${}^{1}_{1}H$; *b)* ${}^{64}_{28}Ni$; *c)* ${}^{0}_{-1}e$; *d)* ${}^{1}_{0}n$; *e)* ${}^{105}_{47}Ag$; *f)* ${}^{4}_{2}He$

45.30 Complete la notación para los siguientes procesos.

a) ${}^{24}Mg(d, \alpha)?$ *e)* ${}^{130}Te(d, 2n)?$

b) ${}^{26}Mg(d, p)?$ *f)* ${}^{55}Mn(n, \gamma)?$

c) ${}^{40}Ar(\alpha, p)?$ *g)* ${}^{59}Co(n, \alpha)?$

d) ${}^{12}C(d, n)?$

Resp. *a)* ${}^{22}Na$; *b)* ${}^{27}Mg$; *c)* ${}^{43}K$; *d)* ${}^{13}N$; *e)* ${}^{130}I$; *f)* ${}^{56}Mn$; *g)* ${}^{56}Mn$

45.31 ¿Cuánta energía se libera en las siguientes reacciones: *a)* ${}^{1}_{1}H + {}^{7}_{3}Li \rightarrow 2{}^{4}_{2}He$ y *b)* ${}^{3}_{1}H + {}^{2}_{1}H \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{1}_{0}n$?
Resp. *a)* 17.4 MeV; *b)* 17.6 MeV

45.32 En la reacción ${}^{14}N(n, p){}^{14}C$ el protón es lanzado con una energía de 0.600 MeV. Se utilizan neutrones muy lentos. Calcule la masa del átomo de ${}^{14}C$. *Resp.* 14.003 u

capítulo 46

Física nuclear aplicada

LAS ENERGÍAS NUCLEARES DE ENLACE difieren de las energías atómicas de enlace discutidas en el capítulo 45 en que son un poco más pequeñas que las energías que ligan al electrón al núcleo. La *energía de enlace por núcleo* (la energía total liberada para construir al núcleo, dividida por el número de protones y neutrones) resulta ser mayor para núcleos próximos a $Z = 30$ ($A = 60$). Entonces los núcleos en los dos extremos de la tabla periódica pueden liberar más energía si de alguna manera se transforman en núcleos de tamaño medio.

REACCIÓN DE FISIÓN: Un núcleo muy grande, tal como los núcleos de un átomo de uranio, liberan energía conforme se parten en dos o tres núcleos de tamaño medio. Tal *reacción de fisión* se puede inducir bombardeando núcleos grandes con neutrones de baja o moderada energía. Las reacciones de fisión producen neutrones adicionales, que a la vez pueden producir más reacciones de fisión y por lo mismo más neutrones. Si el número de neutrones permanece constante o aumenta en el tiempo, el proceso es una *reacción en cadena* autosostenida.

REACCIÓN DE FUSIÓN: En una reacción de fusión, los núcleos pequeños, tales como los del hidrógeno o el helio, se unen para formar un núcleo más masivo, por lo tanto liberan energía.

Esta reacción es difícil de iniciar y de sostener porque los núcleos se deben fusionar a pesar de que se repelen entre sí debido a la fuerza de Coulomb. Sólo cuando las partículas se disparan una contra otra, se aproximan lo suficiente para permitir que las fuerzas de atracción las unan. En el Sol y en la estrellas, las reacciones de fusión pueden ocurrir debido a las altas energías térmicas de las partículas en estos objetos extremadamente calientes.

LA DOSIS DE RADIACIÓN se define como la cantidad de energía radiante absorbida por unidad de masa en una sustancia. Un material recibe una dosis de 1 *gray* (Gy) cuando 1 J de radiación es absorbida en cada kilogramo del material:

$$\text{Dosis en Gy} = \frac{\text{energía absorbida en J}}{\text{masa del material absorbente en kg}}$$

entonces un gray es 1 J/kg. A pesar de que el gray es la unidad de dosis de radiación en el SI, aún se utiliza otra unidad. Ésta es el *rad* (rd), donde 1 rd = 0.01 Gy.

POTENCIAL DE DAÑO POR RADIACIÓN: Cada tipo (y energía) de radiación causa su propio grado característico de daño en el tejido vivo. El daño también varía de acuerdo con el tipo de tejido. Los efectos potenciales del daño de un tipo específico de radiación se expresan como el *factor de cualidad* FQ de la radiación. Arbitrariamente, el daño potencial se determina respecto al daño causado por una radiación de rayos X de 200 keV:

$$\text{FQ} = \frac{\text{efecto biológico de 1 Gy de radiación}}{\text{efecto biológico de 1 Gy de radiación de rayos X de 200 keV}}$$

Por ejemplo, si 10 Gy de una radiación particular causara 7 veces más daño que 10 Gy de 200 keV de rayos X, entonces el FQ para esa radiación es 7. Frecuentemente, se usa la unidad RBE (efectividad biológica relativa, por sus siglas en inglés) en lugar del factor de cualidad. Los dos son equivalentes.

LA DOSIS DE RADIACIÓN EFECTIVA es la dosis de radiación modificada para designar el daño por radiación en tejido vivo. Su unidad SI es el sievert (Sv). Se define como el producto de la dosis en grays por el factor de cualidad de la radiación:

$$\text{Dosis efectiva (Sv)} = (\text{FQ})(\text{dosis en Gy})$$

Por ejemplo, suponga que un tipo de tejido está expuesto a una dosis de 5 Gy de radiación para la cual el factor de cualidad es 3. Entonces la dosis en sieverts es $3 \times 5 = 15$ Sv.

Mientras que el sievert es la unidad en el SI, otra unidad, el *rem* (radiación equivalente, hombre), se usa con frecuencia. Ellas están relacionadas por 1 rem = 0.01 Sv.

A%LERADORES DE ALTA ENERGÍA: Las partículas cargadas se pueden acelerar hasta alcanzar altas energías, esto se logra forzándolas a seguir trayectorias circulares consecutivas. Cada ocasión que una partícula (de carga q) completa una trayectoria se le forza a través de una diferencia de potencial V. Después de n vueltas, su energía es $q(nV)$.

Se utilizan campos magnéticos para proporcionar la fuerza centrípeta que se requiere para mantener a la partícula en un círculo. Igualando la fuerza magnética qvB a la fuerza centrípeta mv^2/r da

$$mv = qBr$$

En esta ecuación, m es la masa relativista de la partícula que viaja con una rapidez v en un círculo de radio r perpendicular al campo magnético B.

EL MOMENTO LINEAL DE UNA PARTÍCULA está relacionado con su EC. Con base en lo visto en el capítulo 41, dado que la energía total de una partícula es la suma de su energía cinética y su energía en reposo, $\text{E} = \text{EC} + mc^2$ y, con $\text{E}^2 = m^2c^4 + p^2c^2$, se deduce que

$$\text{EC} = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2$$

PROBLEMAS RESUELTOS

46.1 **La energía de enlace por nucleón para el ^{238}U es 7.6 MeV, mientras que para un núcleo de la mitad de esa masa es 8.6 MeV. Si un núcleo de ^{238}U se fuera a dividir en dos núcleos, ¿cuánta energía se libera en el proceso?**

Hay 238 núcleos. Cada núcleo liberará aproximadamente $8.6 - 7.6 = 1.0$ MeV de energía cuando el núcleo entra en fisión. La energía total liberada es de aproximadamente 238 MeV o 2.4×10^2 MeV.

46.2 **¿Cuál es la energía de amarre por nucleón para los núcleos $^{238}_{92}$U? La masa *atómica* del ^{238}U es 238.050 79 u; también, $m_p = 1.007\ 276$ u y $m_n = 1.008\ 665$ u.**

La masa de los 92 protones más $238 - 92 = 146$ neutrones es

$$(92)(1.007\ 276\ \text{u}) + (146)(1.008\ 665\ \text{u}) = 239.934\ 48\ \text{u}$$

La masa de los *núcleos* ^{238}U es de

$$238.050\ 79 - 92m_e = 238.050\ 79 - (92)(0.000\ 549) = 238.000\ 28\ \text{u}$$

Entonces la masa perdida al construir un núcleo es

$$\Delta m = 239.934\ 48 - 238.000\ 28 = 1.934\ 2\ \text{u}$$

Como 1.00 u equivale a 931 MeV, tenemos

$$\text{Energía de enlace} = (1.934\ 2\ \text{u})(931\ \text{MeV/u}) = 1800\ \text{MeV}$$

y

$$\text{Energía de enlace por nucleón} = \frac{1800\ \text{MeV}}{238} = 7.57\ \text{MeV}$$

46.3 **Cuando un átomo de ^{235}U entra en la fisión en un reactor, alrededor de 200 MeV de energía se liberan. Suponga que el reactor que usa uranio 235 suministra 700 MW y tiene una eficiencia de 20%. *a*) ¿Cuántos átomos de uranio se consumen en un día? *b*) ¿Cuánta masa de uranio se consume por cada día?**

a) Cada fisión proporciona

$$200\ \text{MeV} = (200 \times 10^6)(1.6 \times 10^{-19})\ \text{J}$$

de energía. Sólo 20% se utiliza eficientemente, y por tanto

$$\text{Energía utilizable por fisión} = (200 \times 10^6)(1.6 \times 10^{-19})(0.20) = 6.4 \times 10^{-12}\ \text{J}$$

Como la energía utilizable del reactor es de 700×10^6 J/s, las fisiones que se requieren por segundo es

$$\text{Fisiones/s} = \frac{7 \times 10^8 \text{ J/s}}{6.4 \times 10^{-12} \text{ J}} = 1.1 \times 10^{20} \text{ s}^{-1}$$

y

$$\text{Fisiones/día} = (86\,400 \text{ s/d})(1.1 \times 10^{20} \text{ s}^{-1}) = 9.5 \times 10^{24} \text{ d}^{-1}$$

b) Hay 6.02×10^{26} átomos en 235 kg de uranio-235. Por eso, la masa de uranio-235 consumida en un día es

$$\text{Masa} = \left(\frac{9.5 \times 10^{24}}{6.02 \times 10^{26}}\right)(235 \text{ kg}) = 3.7 \text{ kg}$$

46.4 **Los neutrones producidos por una reacción de fisión deben ser frenados por núcleos moderadores antes de que produzcan más fisiones. Suponga que un neutrón de 800 keV pierde 40% de su energía en cada colisión ¿Cuántas colisiones se requieren para disminuir la energía a 0.040 eV? (Ésta es la energía térmica promedio de un gas de partículas a 35°C.)**

Después de una colisión, la energía del neutrón baja a (0.6)(800 keV). Después de dos colisiones, ésta es (0.6)(0.6)(800 keV); después de tres, ésta es $(0.6)^3$(800 keV). Después de n colisiones, la energía del neutrón es $(0.6)^n$(800 keV). Queremos que n sea lo suficientemente grande para que

$$(0.6)^n(8 \times 10^5 \text{ eV}) = 0.040 \text{ eV}$$

Tomando logaritmos en ambos lados de la ecuación da

$$n \log 0.6 + \log(8 \times 10^5) = \log 0.04$$

$$(n)(-0.222) + 5.903 = -1.398$$

de donde encontramos que n es 32.9. Se requieren 33 colisiones.

46.5 **Para examinar la estructura de un núcleo, se deben utilizar partículas puntuales con longitud de onda de De Broglie abajo de 10^{-16} m, para poder eliminar los efectos de difracción. ¿Cuál debe ser la diferencia de potencial para que los electrones tengan esta longitud de onda? Suponga que el electrón se mueve de una manera relativista.**

La EC y el ímpetu del electrón se relacionan:

$$\text{EC} = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2$$

Como la longitud de onda de De Broglie es $\lambda = h/p$, esta ecuación se convierte en

$$\text{EC} = \sqrt{\left(\frac{hc}{\lambda}\right)^2 + m^2c^4} - mc^2$$

Usando $\lambda = 10^{-16}$ m, $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J · s, y $m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg, encontramos que

$$EC = 1.99 \times 10^{-9}\ \text{J} = 1.24 \times 10^{10}\ \text{eV}$$

El electrón se debe acelerar con una diferencia de potencial de aproximadamente 10^{10} eV.

46.6 Las siguientes reacciones de fusión se llevan a cabo en el Sol y proporcionan la mayor parte de su energía:

$$4\,{}^{1}_{1}\text{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + 2\,{}^{0}_{+1}e + \text{energía}$$

donde ${}^{0}_{+1}e$ es un positrón, un electrón positivo; ¿cuánta energía se libera conforme se consume 1.00 kg de hidrógeno? Las masas de ^{1}H, ^{4}He, y ${}^{0}_{+1}e$ son, respectivamente, 1.007 825, 4.002 604, y 0.000 549 u, donde los electrones atómicos están incluidos en los dos primeros valores.

La masa de los reactivos, 4 protones, es 4 veces la masa atómica del hidrógeno (^{1}H) menos la masa de los 4 electrones:

$$\begin{aligned}\text{Masa de reactivo} &= (4)(1.007\ 825\ \text{u}) - 4m_e\\ &= 4.031\ 300\ \text{u} - 4m_e\end{aligned}$$

donde m_e es la masa del electrón (o positrón). Los productos de la reacción tienen una masa combinada

$$\begin{aligned}\text{Masa de producto} &= (\text{masa de núcleo } {}^{4}_{2}\text{He}) + 2m_e\\ &= (4.002\ 604\ \text{u} - 2m_e) + 2m_e\\ &= 4.002\ 604\ \text{u}\end{aligned}$$

Entonces la masa perdida es

$$(\text{masa de reactivos}) - (\text{masa del producto}) = (4.031\ 3\ \text{u} - 4m_e) - 4.002\ 6\ \text{u}$$

Sustituyendo $m_e = 0.000\ 549$ u se obtiene la masa perdida 0.026 5 u.

Pero 1.00 kg de ^{1}H contiene 6.02×10^{26} átomos. Por cada cuatro átomos que entran en fusión, se pierde 0.026 5 u. La masa perdida cuando 1.00 kg entra en fusión es

$$\begin{aligned}\text{Masa perdida/kg} &= (0.026\ 5\ \text{u})(6.02 \times 10^{26}/4) = 3.99 \times 10^{24}\ \text{u}\\ &= (3.99 \times 10^{24}\ \text{u})(1.66 \times 10^{-27}\ \text{kg/u}) = 0.006\ 63\ \text{kg}\end{aligned}$$

Entonces, de la relación de Einstein,

$$\Delta E = (\Delta m)c^2 = (0.006\ 63\ \text{kg})(2.998 \times 10^8\ \text{m/s})^2 = 5.96 \times 10^{14}\ \text{J}$$

46.7 El hidruro de litio, LiH, se ha propuesto como combustible nuclear. El núcleo a utilizar y la reacción involucrada son los siguientes:

$$\begin{array}{ccccc} {}^{6}_{3}\text{Li} & + & {}^{2}_{1}\text{H} & \rightarrow & 2\,{}^{4}_{2}\text{He}\\ 6.015\ 13 & & 2.014\ 10 & & 4.002\ 60\end{array}$$

las masas listadas son aquéllas de los átomos neutros. Calcular la producción de potencia esperada, en megawatts, con un consumo de 1.00 g de LiH por día. Suponga una eficiencia del 100%.

Primero se debe calcular el cambio de masa para la reacción:

	Reactivos		Productos
$^{6}_{3}Li$	$6.015\ 13\ u - 3m_e$	$2\ ^{4}_{2}He$	$2(4.002\ 60\ u - 2m_e)$
$^{2}_{1}H$	$2.014\ 10\ u - 1m_e$		
TOTAL	$8.029\ 23\ u - 4m_e$	TOTAL	$8.005\ 20\ u - 4m_e$

Encontramos la pérdida de masa restando la masa producto de la masa de reacción. En el proceso, la masa de los electrones se cancela y se encuentra que la masa perdida es 0.024 03 u.

La fracción de masa perdida es $0.024\ 0/8.029 = 2.99 \times 10^{-3}$. Por lo tanto 1.00 g reacciona, la masa perdida es

$$(2.99 \times 10^{-3})(1.00 \times 10^{-3}\ \text{kg}) = 2.99 \times 10^{-6}\ \text{kg}$$

Ésta corresponde a una energía de

$$\Delta E = (\Delta m)c^2 = (2.99 \times 10^{-6}\ \text{kg})(2.998 \times 10^{8}\ \text{m/s})^2 = 2.687 \times 10^{11}\ \text{J}$$

Entonces

$$\text{Potencia} = \frac{\text{energía}}{\text{tiempo}} = \frac{2.687 \times 10^{11}\ \text{J}}{86\,400\ \text{s}} = 3.11\ \text{MW}$$

46.8 **Los rayos cósmicos bombardean al CO_2 en la atmósfera y, por reacción nuclear, se produce el isótopo radiactivo de carbono $^{14}_{6}C$. Este isótopo tiene una vida media de 5730 años. Se mezcla uniformemente en la atmósfera y es captado por las plantas en su crecimiento. Después de que muere una planta, el ^{14}C decae en los años siguientes. ¿Qué tan antiguo es un pedazo de madera que tiene un contenido de ^{14}C de sólo 9% del contenido promedio de C^{14}?**

A través de los años, el ^{14}C ha decaido 0.090 de su valor original. Entonces (ver el problema 45.6),

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t} \quad \text{se transforma en} \quad 0.090 = e^{-0.693t/(5730\ \text{años})}$$

Después de tomar el logaritmo natural en ambos lados, tenemos

$$\ln 0.090 = \frac{-0.693t}{5730\ \text{años}}$$

de donde

$$t = \left(\frac{5730\ \text{años}}{-0.693}\right)(-2.41) = 1.99 \times 10^{4}\ \text{años}$$

El pedazo de madera tiene aproximadamente 20 000 años de antigüedad.

46.9 El yodo-131 tiene un promedio de vida media de aproximadamente 8.0 días. Cuando se consume con los alimentos, se concentra en la tiroides. Suponga que el 7.0% del ^{131}I se acumula en tiroides y que se detecta el 20% de la desintegración contando rayos gama. ¿Cuánto ^{131}I se debe ingerir para tener conteo de 50 cuentas por segundo?

Como sólo 20% de la desintegración se puede contar, debe haber 50/0.20 = 250 desintegraciones por segundo. Del capítulo 45,

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \lambda N = \frac{0.693\,N}{t_{1/2}} \quad \text{o} \quad 250\,\text{s}^{-1} = \frac{0.693\,N}{(8.0\,\text{d})(3600\,\text{s/h})(24\,\text{h/d})}$$

de donde $N = 2.49 \times 10^8$.

Sin embargo, éste es sólo 7.0% del ^{131}I ingerido. El número de átomos ingeridos es $N/0.070 = 3.56 \times 10^9$. Y como 1.00 kmol de yodo-131 tiene aproximadamente 131 kg, este número de átomos representa

$$\left(\frac{3.56 \times 10^9 \text{ átomos}}{6.02 \times 10^{26} \text{ átomos/kmol}}\right)(131\,\text{kg/kmol}) = 7.8 \times 10^{-16}\,\text{kg}$$

que es la masa de yodo-131 que se debe ingerir.

46.10 Un haz de rayos gama tiene un área en la sección transversal de 2.0 cm^2 y transporta 7.0×10^8 fotones por la sección transversal en cada segundo. Cada fotón tiene una energía de 1.25 MeV. El haz pasa a través de un pedazo de carne ($\rho = 0.95$ g/cm^3) de 0.75 cm de espesor y pierde 5.0% de su intensidad en el proceso. ¿Cuál es la dosis promedio (en Gy y en rd) aplicada a la carne en cada segundo?

En este caso, la dosis es la energía absorbida por kilogramo de carne. Tenemos

$$\text{Número de fotones absorbidos/s} = (7.0 \times 10^8\,\text{s}^{-1})(0.050) = 3.5 \times 10^7\,\text{s}^{-1}$$

$$\text{Energía absorbida/s} = (3.5 \times 10^7\,\text{s}^{-1})(1.25\,\text{MeV}) = 4.4 \times 10^7\,\text{MeV/s}$$

Necesitamos la masa de la carne en la cual esta energía fue absorbida, y es

$$\text{Masa} = \rho V = (0.95\,\text{g/cm}^3)[(2.0\,\text{cm}^3)(0.75\,\text{cm})] = 1.43\,\text{g}$$

Entonces tenemos

$$\text{Dosis/s} = \frac{\text{energía/s}}{\text{masa}} = \frac{(4.4 \times 10^7\,\text{MeV/s})(1.6 \times 10^{-13}\,\text{J/MeV})}{1.43 \times 10^{-3}\,\text{kg}} = 4.9\,\text{mGy/s} = 0.49\,\text{rd/s}$$

46.11 Un haz de partículas alfa pasa por un pedazo de carne y deposita 0.20 J de energía en cada kilogramo de carne. La FQ para estas partículas es 12 Sv/Gy. Encuentre la dosis en Gy y rd, así como la dosis efectiva en Sv y rem.

$$\text{Dosis} = \frac{\text{energía absorbida}}{\text{masa}} = 0.20\,\text{J/kg} = 0.20\,\text{Gy} = 20\,\text{rd}$$

$$\text{Dosis efectiva} = (\text{FQ})(\text{dosis}) = (12\,\text{Sv/Gy})(0.20\,\text{Gy}) = 2.4\,\text{Sv} = 2.4 \times 10^2\,\text{rem}$$

46.12 Un tumor en la pierna de una persona tiene una masa de 3.0 g. ¿Cuál es la actividad mínima que debe tener una fuente de radiación si debe proporcionar al tumor una dosis de 10 Gy en 14 min? Suponga que cada desintegración dentro de la fuente, en promedio, proporciona al tumor una energía de 0.70 MeV.

Una dosis de 10 Gy corresponde a 10 J de energía radiante depositada por kilogramo. Como el tumor tiene una masa de 0.003 0 kg, la energía que se requiere para dar una dosis de 10 Gy es (0.003 0 kg) (10 J/kg) = 0.030 J.

Cada desintegración proporciona 0.70 MeV, que es

$$(0.70 \times 10^6 \text{ eV})(1.60 \times 10^{-19} \text{ J/eV}) = 1.12 \times 10^{-13} \text{ J}$$

Para proporcionar 0.030 J, necesitamos

$$\frac{0.030 \text{ J}}{1.12 \times 10^{-13} \text{ J/desintegración}} = 2.68 \times 10^{11} \text{ desintegraciones}$$

Éstas deben ocurrir en 14 min (u 840 s), por lo que requerimos

$$\frac{2.68 \times 10^{11}}{840 \text{ s}} \text{desintegraciones} = 3.2 \times 10^8 \text{ desintegraciones/s}$$

Por lo que la actividad de la fuente debe ser de al menos 3.2×10^8 Bq. Como 1 Ci = 3.70×10^{10} Bq, la actividad de la fuente es 8.6 mCi.

46.13 Un haz de partículas alfa ($q = 2e$) de 5.0 MeV tiene un área en la sección transversal de 150 cm². Éste incide sobre un tejido ($\rho = 950$ kg/m³) y penetra a una profundidad de 0.70 mm. *a*) ¿Qué dosis (en Gy) le suministra el haz al tejido en un tiempo de 3.0 s? *b*) ¿Cuál es la dosis efectiva que se suministra? Suponga que el haz transporta una corriente de 2.50×10^{-9} A y tiene un FQ = 14.

Primero encontramos el número de partículas que se depositan en el tejido en 3.0 s:

$$\text{Número en } 3.0 \text{ s} = \frac{It}{a} = \frac{(2.50 \times 10^{-9} \text{ C/s})(3.0 \text{ s})}{3.2 \times 10^{-19} \text{ C}} = 2.34 \times 10^{10} \text{ partículas}$$

Cada una deposita una energía de $(5.0 \times 10^6 \text{ eV})(1.60 \times 10^{-19} \text{ J/eV}) = 8.0 \times 10^{-13}$ J. Entonces,

$$\text{Dosis} = \frac{\text{energía}}{\text{masa}} = \frac{(2.34 \times 10^{10})(8.0 \times 10^{-13} \text{ J})}{(950 \text{ kg/m}^3)(0.070 \times 1.5 \times 10^{-6} \text{ m}^{3)})} = 188 \text{ Gy} = 1.9 \times 10^2 \text{ Gy}$$

$$\text{Dosis efectiva} = (\text{FQ})(\text{dosis}) = (14)(188) = 2.6 \times 10^3 \text{ Sv}$$

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

46.14 Considere las siguientes reacciones de fisión:

$$\begin{array}{ccccccccccc} {}^{1}_{0}n & + & {}^{235}_{92}\mathrm{U} & \rightarrow & {}^{138}_{56}\mathrm{Ba} & + & {}^{93}_{41}\mathrm{Nb} & + & 5\,{}^{1}_{0}n & + & 5\,{}^{0}_{-1}e \\ 1.008\,7 & & 235.043\,9 & & 137.905\,0 & & 92.906\,0 & & 1.008\,7 & & 0.000\,55 \end{array}$$

donde se dan las masas atómicas neutras. ¿Cuánta energía se libera cuando *a*) 1 átomo entra en este tipo de fisión y *b*) 1.0 kg de átomos entran en fisión? *Resp.* *a*) 182 MeV; *b*) 7.5×10^{13} J

46.15 Se propone utilizar la reacción de fusión nuclear

$$\begin{array}{ccc} 2\,{}^{2}_{1}\mathrm{H} & \rightarrow & {}^{4}_{2}\mathrm{He} \\ 2.014\,102 & & 4.002\,604 \end{array}$$

para producir potencia industrial (se dan las masas atómicas neutras). Si la potencia aprovechada debe ser de 150 MW y la energía de la reacción se utilizará con un 30% de eficiencia, ¿cuántos gramos de combustible de deuterio se necesitarán por día? *Resp.* 75 g/día

46.16 Una de las reacciones de fusión más prometedoras para generar potencia involucra deuterio (^{2}H) y tritio (^{3}H):

$$\begin{array}{ccccccc} {}^{2}_{1}\mathrm{H} & + & {}^{3}_{1}\mathrm{H} & \rightarrow & {}^{4}_{2}\mathrm{He} & + & {}^{1}_{0}n \\ 2.014\,10 & & 3.016\,05 & & 4.002\,60 & & 1.008\,67 \end{array}$$

donde se dan las masas atómicas incluyendo los electrones. ¿Cuánta energía se produce cuando 2.0 kg de ^{2}H se fusiona con 3.0 kg de ^{3}H para formar ^{4}He? *Resp.* 1.70×10^{15} J

46.17 ¿Cuál es la EC promedio de un neutrón en el centro del Sol, donde la temperatura es de 10^{7} K? Dé su respuesta en dos cifras significativas. *Resp.* 1.3 keV

46.18 Encontrar la energía liberada cuando dos deuterones (${}^{2}_{1}$H, masa atómica = 2.014 10 u) se fusionan para formar ${}^{3}_{2}$He (masa atómica = 3.016 03 u) con la emisión de un neutrón. Dé su respuesta en tres cifras significativas. *Resp.* 3.27 MeV

46.19 La brea encontrada en un recipiente antiguo tiene una actividad de ^{14}C con sólo el 4.00% del encontrado en madera nueva de la misma densidad. ¿Cuál es la edad aproximada de la brea? *Resp.* 26.6×10^{3} años

46.20 El rubidio-87 tiene un promedio de vida media de 4.9×10^{10} años y decae a estroncio-87, que es estable. En una roca antigua, la razón del ^{87}Sr a ^{87}Rb es 0.005 0. Si suponemos que todo el estroncio viene del decaimiento del rubidio, ¿qué tan antigua es la piedra? Repetir para una razón de 0.210. *Resp.* 3.5×10^{8} años, 1.35×10^{10} años

46.21 La carátula luminosa de un reloj emite 130 electrones rápidos cada minuto. Suponga que cada electrón tiene una energía de 0.50 MeV y deposita esa energía en un volumen de piel que tiene 2.0 cm^2 en área y 0.20 cm de espesor. Encontrar la dosis (en Gy y rd) que recibe el volumen en 1.0 día. Tome la densidad de la piel como 900 kg/m^3. *Resp.* 42 μGy, 4.2 mrd

46.22 Un haz de partículas alfa entra a un colector de carga y se mide que transporta 2.0×10^{-14} C de carga dentro del colector en cada segundo. El haz tiene un área en su sección transversal de 150 mm^2, y penetra la piel humana a una profundidad de 0.14 mm. Cada partícula tiene una energía inicial de 4.0 MeV. El FQ para cada partícula es de aproximadamente 15. ¿Cuál es la dosis efectiva, en Sv y en rem, que recibe la piel de una persona cuando está expuesta a este haz por 20 s? Tome $\rho = 900$ kg/m^3 para la piel. *Resp.* 0.63 Sv, 63 rem

apéndice A

Cifras significativas

INTRODUCCIÓN: El valor numérico de cada medida observada es una aproximación. Considérese que la longitud de un objeto se registró como 15.7 cm. Por convencionalismo, esto significa que la longitud se midió con *una precisión* de décimos de centímetro y que su valor exacto cae entre 15.65 y 15.75 cm. Si su medida fuera exacta a la aproximación de centésimos de centímetro, se tendría que haber registrado como 15.70 cm. El valor 15.7 cm representa *tres cifras significativas* (1, 5, 7), mientras que el valor 15.70 representa *cuatro cifras significativas* (1, 5, 7, 0). Una cifra significativa es aquella que se sabe es razonablemente confiable.

De manera semejante, una masa registrada de 3.406 2 kg significa que la masa se determinó a la precisión de décimos de gramo y representa cinco cifras significativas (3, 4, 0, 6, 2); la última cifra (2) es razonablemente correcta y garantiza la certeza de las cuatro cifras precedentes.

En mediciones elementales en física y química, la última cifra se estima y también se considera como cifra significativa.

LOS CEROS pueden ser significativos o pueden servir tan sólo para localizar el punto decimal. Los ceros a la izquierda de la posición normal del punto decimal (en números 100, 2500, 40, etc.) se tomarán como significativos. Por ejemplo, la expresión de que un cuerpo de mineral pesa 9800 N no indica la precisión de la medida, se entenderá que quiere decir que se conoce el peso hasta el newton más cercano: en este caso, se tienen cuatro cifras significativas. Si fue pesado con la precisión de centenas de newtons, el peso contiene sólo dos cifras significativas (9, 8) y puede escribirse exponencialmente como 9.8×10^3 N. Si se pesa con la precisión de decenas de newtons, el peso debe escribirse como 9.80×10^3 N, mostrando las tres cifras significativas. Si el objeto se pesa a la precisión de newtons, el peso debería escribirse como 9.800×10^3 N (cuatro cifras significativas). Por supuesto, si se presenta un cero entre dos cifras significativas, es en sí mismo significativo. Los ceros que se encuentran a la derecha inmediata del punto decimal son significativos sólo cuando se tiene una cifra significativa para el texto del decimal. De este modo, los números 0.001, 0.001 0, 0.001 00 y 1.001 tienen una, dos, tres y cuatro cifras significativas, respectivamente.

REDONDEO: Un número se redondea al número deseado de cifras significativas haciendo ceros uno o más dígitos a la derecha. Cuando el primer dígito que se hace cero es menor que 5, el último dígito retenido quedará sin cambio; cuando es mayor que 5, se suma 1 al último dígito retenido.

SUMA Y RESTA: El resultado de la suma o resta es lo que se redondea, de tal manera que se retengan todos los dígitos para que sólo una columna contenga cifras estimadas. (Recuérdese que la última cifra significativa es estimada.) En otras palabras, la respuesta debe tener el mismo número de cifras a la derecha del punto decimal como el que tiene el número conocido con menos precisión de los que se están sumando o restando.

Ejemplos. Súmense las siguientes cantidades expresadas en metros.

a)	*b*)	*c*)	*d*)
25.340	58.0	4.20	415.5
5.465	0.003 8	1.652 3	3.64
0.322	0.000 01	0.015	0.238
31.127 m (*Resp.*)	58.003 81	5.867 3	419.378
	= 58.0 m (*Resp.*)	= 5.87 m (*Resp.*)	= 419.4 m (*Resp.*)

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN: Aquí el resultado debe ser redondeado para que contenga sólo las cifras significativas que están contenidas en el mínimo factor exacto.

Sin embargo, hay excepciones. Considérese la división $9.84 \div 9.3 = 1.06$, a tres cifras. Por la regla anterior, el resultado debe ser 1.1 (dos cifras significativas). Sin embargo, una diferencia de 1 en el último lugar de 9.3 (9.3 ± 0.1) daría por resultado un error aproximado del 1%, mientras que la diferencia de 1 en el último lugar de 1.1 (1.1 ± 0.1) daría un error de aproximadamente un 10%. De este modo, la respuesta 1.1 tiene un porcentaje de exactitud mucho más bajo que 9.3. Así que el resultado deberá ser 1.06, ya que una diferencia de 1 en el último lugar del mínimo factor utilizado en el cálculo (9.3) daría un porcentaje de error aproximadamente igual (1%) que la diferencia de 1 en el último lugar de 1.06 (1.06 ± 0.01). De la misma manera, $0.92 \times 1.13 = 1.04$.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS: Como regla, los valores de los senos, cosenos, tangentes, etc., deben tener el mismo número de cifras significativas que sus argumentos. Por ejemplo, sen $35° = 0.57$, mientras que sen $35.0° = 0.574$.

EJERCICIOS

1 ¿Cuántas cifras significativas se dan en las siguientes cantidades?

a) 454 g	*e*) 0.035 3 m	*i*) 1.118×10^{-3} V
b) 2.2 N	*f*) 1.008 0 hr	*j*) 1030 kg/m^3
c) 2.205 N	*g*) 14.0 A	*k*) 125 000 N
d) 0.393 7 s	*h*) 9.3×10^7 km	

Resp.

a) 3	*e*) 3	*i*) 4
b) 2	*f*) 5	*j*) 4
c) 4	*g*) 3	*k*) 6
d) 4	*h*) 2	

2 Sume:

a)		*b*)		*c*)		*d*)	
703	h	18.425	cm	0.003 5	s	4.0	N
7	h	7.21	cm	0.097	s	0.632	N
0.66	h	5.0	cm	0.225	s	0.148	N

Resp. *a*) 711 h; *b*) 30.6 cm, *c*) 0.326 s, *d*) 4.8 N

3 Reste:

a)		*b*)		*c*)	
7.26	J	562.4	m	34	kg
0.2	J	16.8	m	0.2	kg

Resp. *a*) 7.1 J, *b*) 545.6 m, *c*) 34 kg

4 Multiplique: *a*) 2.21×0.3 *d*) 107.88×0.610
b) 72.4×0.084 *e*) 12.4×84.0
c) 2.02×4.113 *f*) 72.4×8.6

Resp. *a*) 0.7 *d*) 65.8
b) 6.1 *e*) 1.04×10^3
c) 8.31 *f*) 6.2×10^2

5 Divida: *a*) $\dfrac{97.52}{2.54}$ *b*) $\dfrac{14.28}{0.714}$ *c*) $\dfrac{0.032}{0.004}$ *d*) $\dfrac{9.80}{9.30}$

Resp. *a*) 38.4, *b*) 20.0, *c*) 8, *d*) 1.05

apéndice B

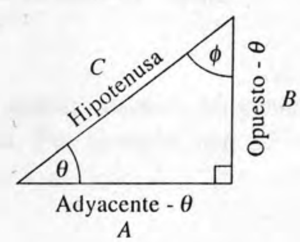
Trigonometría que se requiere para física universitaria

FUNCIONES EN UN ÁNGULO AGUDO: Las funciones trigonométricas que con más frecuencia se utilizan son seno, coseno y tangente. Es conveniente establecer las definiciones de las funciones en un ángulo agudo en términos de los lados de un triángulo rectángulo.

En cualquier triángulo rectángulo el *seno* de cada ángulo agudo es igual a longitud del lado opuesto al ángulo dividido entre la longitud de la hipotenusa. El *coseno* de cada ángulo es igual a la longitud del lado adyacente al ángulo, dividida entre la longitud de la hipotenusa. La *tangente* de cada ángulo agudo es igual a la longitud del lado opuesto al ángulo dividido entre la longitud del lado adyacente a ese ángulo.

Si θ y ϕ son los ángulos agudos de cualquier triángulo rectángulo y *A, B* y *C* son los lados, como se muestra en el diagrama, entonces

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{B}{C} \qquad \operatorname{sen}\phi = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{A}{C}$$



$$\cos\theta = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{A}{C} \qquad \cos\phi = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{B}{C}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{lado adyacente}} = \frac{B}{A} \qquad \tan\phi = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{lado adyacente}} = \frac{A}{B}$$

Nótese que sen $\theta = \cos\phi$; por lo tanto, el seno de cualquier ángulo es igual al coseno de su ángulo complementario. Por ejemplo,

$$\text{sen } 30° = \cos (90° - 30°) = \cos 60° \qquad \cos 50° = \text{sen } (90° - 50°) = \text{sen } 40°$$

A medida que el ángulo se incrementa de 0° a 90°, su seno se incrementa de 0 a 1, su tangente de 0 al infinito y su coseno disminuye de 1 a 0.

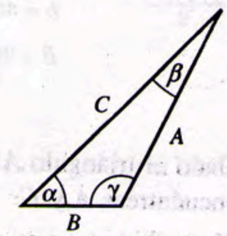
LEYES DE LOS SENOS Y LOS COSENOS: Estas dos leyes dan las relaciones entre los lados y los ángulos de *cualquier* triángulo plano. En cualquier triángulo plano con ángulo α, β, γ y lados opuestos A, B, y C, respectivamente, se aplican las siguientes relaciones:

Ley de los senos

$$\frac{A}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{B}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{C}{\operatorname{sen}\gamma}$$

o bien

$$\frac{A}{B}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}\quad\frac{B}{C}=\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma}\quad\frac{C}{A}=\frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}$$



Ley de los cosenos

$$A^2=B^2+C^2-2BC\cos\alpha$$

$$B^2=A^2+C^2-2AC\cos\beta$$

$$C^2=A^2+B^2-2AB\cos\gamma$$

Si el ángulo θ está entre 90° y 180°, como en el caso del ángulo C en el diagrama anterior, entonces

$$\operatorname{sen}\theta=\operatorname{sen}(180^\circ-\theta)\quad\text{y}\quad\cos\theta=-\cos(180^\circ-\theta)$$

Entonces

$$\operatorname{sen}120^\circ=\operatorname{sen}(180^\circ-120^\circ)=\operatorname{sen}60^\circ=0.866$$

$$\cos 120^\circ=-\cos(180^\circ-120^\circ)=-\cos 60^\circ=-0.500$$

PROBLEMAS RESUELTOS

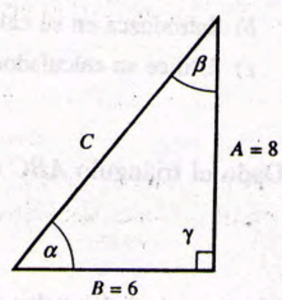
1 En el triángulo rectángulo ABC, dados $A=8$, $B=6$, $\gamma=90°$. Encuéntrese los valores del seno, coseno y tangente del ángulo α y del ángulo β.

$$C=\sqrt{8.0^2+6.0^2}=\sqrt{100}=10$$

$\operatorname{sen}\alpha=A/C=8.0/10=0.80$ $\quad$ $\operatorname{sen}\beta=B/C=6.0/10=0.60$

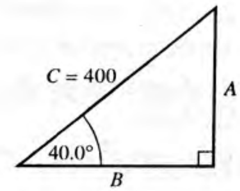
$\cos\alpha=B/C=6.0/10=0.60$ $\quad$ $\cos\beta=A/C=8.0/10=0.80$

$\tan\alpha=A/B=8.0/6.0=1.3$ $\quad$ $\tan\beta=B/A=6.0/8.0=0.75$



2 Dado un triángulo rectángulo con un ángulo agudo de 40.0° y una hipotenusa de 400, encuéntrese los otros lados y ángulos.

$$\text{sen}\,40.0° = \frac{A}{400} \quad \text{y} \quad \cos 40.0° = \frac{B}{400}$$



Por medio de una calculadora, se encuentra que sen 40.0° = 0.642 8 y que cos 40.0° = 0.766 0. Entonces

$$a = 400\ \text{sen}\ 40.0° = 400(0.642\,8) = 257$$

$$b = 400\cos 40.0° = 400(0.766\,0) = 306$$

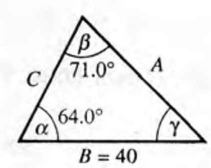
$$B = 90.0° - 40.0° = 50.0°$$

3 Dado el triángulo ABC con $\alpha = 64.0°$, $\beta = 71.0°$, $B = 40.0°$, encuéntrese A y C.

$$\gamma = 180.0° - (\alpha + \beta) = 180.0° - (64.0° + 71.0°) = 45.0°$$

Por la ley de los senos,

$$\frac{A}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{B}{\text{sen}\,\beta} \quad \text{y} \quad \frac{C}{\text{sen}\,\gamma} = \frac{B}{\text{sen}\,\beta}$$



entonces

$$A = \frac{B\ \text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\beta} = \frac{40.0\,\text{sen}\,64.0°}{\text{sen}\,71.0°} = \frac{40.0(0.898\,8)}{0.945\,5} = 38.0$$

y

$$C = \frac{B\,\text{sen}\,\gamma}{\text{sen}\,\beta} = \frac{40.0\,\text{sen}\,45.0°}{\text{sen}\,71.0°} = \frac{40.0(0.707\,1)}{0.945\,5} = 29.9$$

4 *a*) Si cos $\alpha = 0.438$, encontrar α al más bajo grado. *b*) Si sen $\beta = 0.800\,0$, encontrar β a la más cercana décima de grado. *c*) Si cos $\gamma = 0.712\,0$, encontrar γ con precisión de décimas de grado.

a) Introduzca 0.438 en su calculadora y utilice la tecla del inverso del coseno para obtener $\alpha = 64°$.
b) Introduzca en su calculadora 0.800 0 y utilice las teclas inverso y seno para obtener $\beta = 53.1°$.
c) Utilice su calculadora como en *a*) para obtener 44.6°.

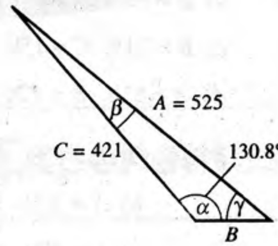
5 Dado el triángulo ABC con $\alpha = 130.8°$, $A = 525$, $C = 421$, encuentre B, β y γ.

$$\text{sen}\ 130.8° = \text{sen}\ (180° - 130.8°) = \text{sen}\ 49.2° = 0.757$$

Muchas calculadoras dan el seno de 130.8° directamente.

Para γ: $\quad \operatorname{sen}\gamma = \dfrac{C \operatorname{sen}\alpha}{A} = \dfrac{421 \operatorname{sen} 30.8°}{525} = \dfrac{421(0.757)}{525} = 0.607$

de donde $\gamma = 37.4°$.



Para β: $\quad \beta = 180° - (\gamma + \alpha) = 180° - (37.4° + 130.8°) = 11.8°$

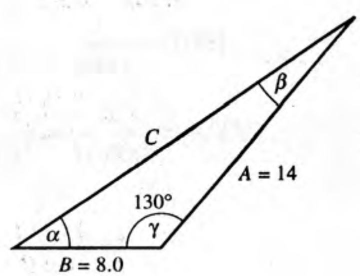
Para B: $\quad B = \dfrac{A \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{525 \operatorname{sen} 11.8°}{\operatorname{sen} 130.8°} = \dfrac{525(0.204)}{0.757} = 142$

6 Dado el triángulo ABC con $A = 14$, $B = 8.0$, y $\gamma = 130°$, encuentre C, α y β.

$$\cos 130° = -\cos(180° - 130°) = -\cos 50° = -0.64$$

Para C: Por la ley de los cosenos,

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos 130°$$
$$= 14^2 + 8.0^2 - 2(14)(8.0)(-0.643) = 404$$



y $C = \sqrt{404} = 20$.
Para α: Por la ley de senos,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{A \operatorname{sen}\gamma}{C} = \frac{14(0.766)}{20.1} = 0.533$$

y $\alpha = 32°$.
Para β: $\quad \beta = 180° - (\alpha + \gamma) = 180° - (32° + 130°) = 18°$

EJERCICIOS

7 Resuélvase cada triángulo rectángulo ABC, con $\gamma = 90°$.

a) $\alpha = 23.3°, C = 346$ *d*) $A = 25.4, B = 38.2$
b) $\beta = 49.2°, B = 222$ *e*) $B = 673,\ C = 888$
c) $\alpha = 66.6°, A = 113$

Resp. *a*) $\beta = 66.7°,\ A = 137,\ B = 318$ *d*) $\alpha = 33.6°,\ \beta = 56.4°,\ C = 45.9$
b) $\alpha = 40.8°,\ A = 192,\ C = 293$ *e*) $\alpha = 40.7°,\ \beta = 49.3°,\ A = 579$
c) $\beta = 23.4°,\ B = 48.9,\ C = 123$

8 Resuélvase cada uno de los triángulos oblicuos ABC.

a) $A = 125,\ \alpha = 54.6°,\ \beta = 65.2°$
b) $B = 321,\ \alpha = 75.3°,\ \gamma = 38.5°$
c) $B = 215,\ C = 150,\ \beta = 42.7°$
d) $A = 512,\ B = 426,\ \alpha = 48.8°$
e) $B = 50.4, C = 33.3, \beta = 118.5°$
f) $B = 120,\ C = 270,\ \alpha = 118.7°$
g) $A = 24.5, B = 18.6, C = 26.4$
h) $A = 6.34, B = 7.30, C = 9.98$

Resp. *a*) $B = 139,\ C = 133,\ \gamma = 60.2°$
b) $A = 339,\ C = 218,\ \beta = 66.2°$
c) $A = 300,\ \alpha = 109.1°,\ \gamma = 28.2°$
d) $C = 680,\ \beta = 38.8°,\ \gamma = 92.4°$
e) $A = 25.1,\ \alpha = 26.0°,\ \gamma = 35.5°$
f) $A = 344,\ \beta = 17.8°,\ \gamma = 43.5°$
g) $\alpha = 63.2°,\ \beta = 42.7°,\ \gamma = 74.1°$
h) $\alpha = 39.3°,\ \beta = 46.9°,\ \gamma = 93.8°$

apéndice C

Exponentes

POTENCIAS DE 10: La siguiente es una lista parcial de potencias de 10. (Véase también el apéndice E.)

$$10^0 = 1 \qquad 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 10 \times 10 = 100 \qquad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0.01$$

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$$

$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000 \qquad 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0.001$$

$$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$$

$$10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1\,000\,000 \qquad 10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10\,000} = 0.0001$$

En la expresión 10^5, la *base* es 10 y el *exponente* es 5.

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN: En la multiplicación, los exponentes con la misma base se suman:

$$a^3 \times a^5 = a^{3+5} = a^8 \qquad 10^7 \times 10^{-3} = 10^{7-3} = 10^4$$

$$10^2 \times 10^3 = 10^{2+3} = 10^5 \qquad (4 \times 10^4)(2 \times 10^{-6}) = 8 \times 10^{4-6} = 8 \times 10^{-2}$$

$$10 \times 10 = 10^{1+1} = 10^2 \qquad (2 \times 10^5)(3 \times 10^{-2}) = 6 \times 10^{5-2} = 6 \times 10^3$$

En la división, exponentes de la misma base se restan:

$$\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2 \qquad \frac{8 \times 10^2}{2 \times 10^{-6}} = \frac{8}{2} \times 10^{2+6} = 4 \times 10^8$$

$$\frac{10^2}{10^5} = 10^{2-5} = 10^{-3} \qquad \frac{5.6 \times 10^{-2}}{1.6 \times 10^4} = \frac{5.6}{1.6} \times 10^{-2-4} = 3.5 \times 10^{-6}$$

NOTACIÓN CIENTÍFICA: Cualquier número puede ser expresado como potencia entera de 10, o como el producto de dos números, uno de los cuales es una potencia de 10. Por ejemplo,

$$2806 = 2.806 \times 10^3 \qquad 0.045\,4 = 4.54 \times 10^{-2}$$

$$22\,406 = 2.240\,6 \times 10^4 \qquad 0.000\,06 = 6 \times 10^{-5}$$

$$454 = 4.54 \times 10^2 \qquad 0.003\,06 = 3.06 \times 10^{-3}$$

$$0.454 = 4.54 \times 10^{-1} \qquad 0.000\,000\,5 = 5 \times 10^{-7}$$

OTRAS OPERACIONES: Cualquier expresión diferente de cero, con exponente cero es igual a 1. Entonces,

$$a^0 = 1 \qquad 10^0 = 1 \qquad (3 \times 10)^0 = 1 \qquad 8.2 \times 10^0 = 8.2$$

Una potencia puede ser transferida del numerador al denominador en una fracción, o viceversa, cambiando el signo del exponente. Por ejemplo,

$$10^{-4} = \frac{1}{10^4} \qquad 5 \times 10^{-3} = \frac{5}{10^3} \qquad \frac{7}{10^{-2}} = 7 \times 10^2 \qquad -5a^{-2} = -\frac{5}{a^2}$$

El significado de un exponente fraccional es ilustrado como sigue:

$$10^{2/3} = \sqrt[3]{10^2} \qquad 10^{3/2} = \sqrt{10^3} \qquad 10^{1/2} = \sqrt{10} \qquad 4^{3/2} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$$

Para elevar una potencia a una potencia, se multiplican los exponentes:

$$(10^3)^2 = 10^{3\times 2} = 10^6 \qquad (10^{-2})^3 = 10^{-2\times 3} = 10^{-6} \qquad (a^3)^{-2} = a^{-6}$$

Para sacar raíz cuadrada se divide el exponente por 2. Si el exponente es un número non, deberá primero incrementarse o disminuirse en 1, ajustando el coeficiente adecuadamente. Para obtener la raíz cúbica divídase el exponente entre 3. Los coeficientes se tratan en forma independiente. Así que,

$$\sqrt{9 \times 10^4} = 3 \times 10^2 \qquad \sqrt{4.9 \times 10^{-5}} = \sqrt{49 \times 10^{-6}} = 7.0 \times 10^{-3}$$

$$\sqrt{3.6 \times 10^7} = \sqrt{36 \times 10^6} = 6.0 \times 10^3 \qquad \sqrt[3]{1.25 \times 10^8} = \sqrt[3]{125 \times 10^6} = 5.00 \times 10^2$$

Algunas calculadoras de bolsillo obtienen raíz cuadrada directamente. La raíz cúbica y otras raíces se obtienen fácilmente utilizando la tecla y^x.

EJERCICIOS

1 Exprese lo siguiente en potencias de 10.

a) 326 *d*) 36 000 008 *g*) 0.000 002 *i*) $\sqrt{0.000\,081}$

b) 32 608 *e*) 0.831 *h*) 0.000 706 *j*) $\sqrt[3]{0.000\,027}$

c) 1006 *f*) 0.03

Resp. *a*) 3.26×10^2 *d*) $3.600\,000\,8 \times 10^7$ *g*) 2×10^{-6} *i*) 9.0×10^{-3}
b) $3.260\,8 \times 10^4$ *e*) 8.31×10^{-1} *h*) 7.06×10^{-4} *j*) 3.0×10^{-2}
c) 1.006×10^3 *f*) 3×10^{-2}

2 Evalúe las siguientes operaciones y exprese los resultados en potencias de 10.

a) 1500×260 *e*) $\dfrac{1.728 \times 17.28}{0.000\,172\,8}$ *i*) $(\sqrt[3]{2.7 \times 10^7})(\sqrt[3]{1.25 \times 10^{-4}})$

b) $220 \times 35\,000$ *f*) $\dfrac{(16\,000)(0.000\,2)(1.2)}{(2000)(0.006)(0.000\,32)}$ *j*) $(1 \times 10^{-3})(2 \times 10^5)^2$

c) $40 \div 20\,000$ *g*) $\dfrac{0.004 \times 32\,000 \times 0.6}{6400 \times 3000 \times 0.08}$ *k*) $\dfrac{(3 \times 10^2)^3\,(2 \times 10^{-5})^2}{3.6 \times 10^{-8}}$

d) $82\,800 \div 0.12$ *h*) $(\sqrt{14\,400})(\sqrt{0.000\,025})$ *l*) $8(2 \times 10^{-2})^{-3}$

Resp. *a*) 3.90×10^5 *e*) 1.728×10^5 *i*) 1.5×10^1
b) 7.70×10^6 *f*) 1×10^3 *j*) 4×10^7
c) 2.0×10^{-3} *g*) 5×10^{-5} *k*) 3×10^5
d) 6.9×10^5 *h*) 6.0×10^{-1} *l*) 1×10^6

apéndice D

Logaritmos

EL LOGARITMO BASE 10 de un número es el exponente o potencia a la cual se debe elevar 10 para obtener el número. Ya que 1000 es 10^3, el logaritmo base 10 de 1000 (se escribe log 1000) es 3. Similarmente, log 10 000 = 4, log 10 = 1, log 0.1 = −1, y log 0.001 = −3.

La mayoría de las calculadoras de bolsillo tiene una tecla log. Cuando un número se introduce en la calculadora, su logaritmo base 10 se puede obtener presionando la tecla log. En esta forma se encuentra que log 50 = 1.698 97 y log 0.035 = −1.455 93. También, log 1 = 0, lo cual refleja el hecho de que $10^0 = 1$.

LOS LOGARITMOS NATURALES se toman considerando la base $e = 2.718$, en lugar de la de 10. Éstos se determinan en las calculadoras presionando la tecla ln. Ya que $e^0 = 1$, se tiene que ln 1 = 0.

Ejemplos:

$$\log 971 = 2.987\,2 \qquad \ln 971 = 6.878\,3$$

$$\log 9.71 = 0.987\,2 \qquad \ln 9.71 = 2.273\,2$$

$$\log 0.097\,1 = -1.012\,8 \qquad \ln 0.097\,1 = -2.332\,0$$

Ejercicios: Encuentre los logaritmos base 10 de los siguientes números.

a) 454 *f*) 0.621
b) 5280 *g*) 0.946 3
c) 96 500 *h*) 0.035 3
d) 30.48 *i*) 0.002 2
e) 1.057 *j*) 0.000 264 5

Resp. *a*) 2.657 1 *f*) −0.206 9
b) 3.722 6 *g*) −0.023 97
c) 4.984 5 *h*) −1.452 2
d) 1.484 0 *i*) −2.657 6
e) 0.024 1 *j*) −3.577 6

ANTILOGARITMOS: Supóngase que tiene una ecuación tal que $3.5 = 10^{0.544}$, entonces sabemos que 0.544 es el log base 10 de 3.5. O viceversa, se puede decir que 3.5 es el *antilogaritmo* (o *logaritmo inverso*) de 0.544. Determinar el antilogaritmo de un número es simple con una calculadora: simplemente introduzca el número; entonces, primero presione la tecla de inverso y luego la tecla log. Si es en base e en lugar de 10, presione las teclas inverso y ln.

Ejercicios: Determine el número correspondiente a los siguientes logaritmos.

a) 3.156 8	*f*) 0.914 2
b) 1.693 4	*g*) 0.000 8
c) 5.693 4	*h*) –0.249 3
d) 2.500 0	*i*) –1.996 5
e) 2.043 6	*j*) –2.799 4

Resp.

a) 1435	*f*) 8.208
b) 49.37	*g*) 1.002
c) 4.937×10^5	*h*) 0.563 2
d) 316.2	*i*) 0.010 08
e) 110.6	*j*) 0.001 587

PROPIEDADES BÁSICAS DE LOS LOGARITMOS: Ya que los logaritmos son exponentes, todas las propiedades de los exponentes son también propiedades de los logaritmos.

1) El logaritmo de un producto de dos números es la suma de sus logaritmos. Así que,

$$\log ab = \log a + \log b \qquad \log (5280 \times 48) = \log 5280 + \log 48$$

2) El logaritmo de un cociente de dos números es el logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador. Por ejemplo,

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b \qquad \log \frac{536}{24.5} = \log 536 - \log 24.5$$

3) El logaritmo de la n-ésima potencia de un número es n veces el logaritmo del número. Es decir

$$\log a^n = n \log a \qquad \log (4.28)^3 = 3 \log 4.28$$

4) El logaritmo de la raíz n-ésima de un número es $1/n$ veces el logaritmo del número. Entonces,

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a \qquad \log \sqrt{32} = \frac{1}{2} \log 32 \qquad \log \sqrt[3]{792} = \frac{1}{3} \log 792$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1 Use una calculadora para evaluar *a*) $(5.2)^{0.4}$, *b*) $(6.138)^3$, *c*) $\sqrt[3]{5}$, *d*) $(7.25 \times 10^{-11})^{0.25}$.

a) Introduzca 5.2; presione la tecla y^x; introduzca 0.4; presione la tecla =. La respuesta en la pantalla es 1.934.

b) Introduzca 6.138; presione la tecla y^x; introduzca 3; presione la tecla =. La respuesta en la pantalla es 231.2.

c) Introduzca 5; presione la tecla y^x; introduzca 0.333 3; presione la tecla =. La respuesta en la pantalla es 1.710.

d) Introduzca 7.25×10^{-11}; presione la tecla y^x; introduzca 0.25; presione la tecla =. La respuesta en la pantalla es 2.918×10^{-3}.

EJERCICIOS

2 Evalúe cada una de las siguientes operaciones:

1) $28.32 \times 0.082\,54$

2) $573 \times 6.96 \times 0.004\,81$

3) $\dfrac{79.28}{63.57}$

4) $\dfrac{65.38}{225.2}$

5) $\dfrac{1}{239}$

6) $\dfrac{0.572 \times 31.8}{96.2}$

7) $47.5 \times \dfrac{779}{760} \times \dfrac{273}{300}$

8) $(8.642)^2$

9) $(0.086\,42)^2$

10) $(11.72)^3$

11) $(0.052\,3)^3$

12) $\sqrt{9463}$

13) $\sqrt{946.3}$

14) $\sqrt{0.006\,61}$

15) $\sqrt[3]{1.79}$

16) $\sqrt[4]{0.182}$

17) $\sqrt{643} \times (1.91)^3$

18) $(8.73 \times 10^{-2})(7.49 \times 10^{6})$

19) $(3.8 \times 10^{-5})^2(1.9 \times 10^{-5})$

20) $\dfrac{8.5 \times 10^{-45}}{1.6 \times 10^{-22}}$

21) $\sqrt{2.54\times10^{6}}$

22) $\sqrt{9.44\times10^{5}}$

23) $\sqrt{7.2\times10^{-13}}$

24) $\sqrt[3]{7.3\times10^{-14}}$

25) $\sqrt{\dfrac{(1.1\times10^{-23})(6.8\times10^{-2})}{1.4\times10^{-24}}}$

26) 2.04 log 97.2

27) 37 log 0.029 8

28) 6.30 log (2.95×10^{3})

29) 8.09 log (5.68×10^{-16})

30) $(2.00)^{0.714}$

Resp.

1) 2.337	9) 0.007 467	17) 177	25) 0.73
2) 19.2	10) 1611	18) 6.54×10^{5}	26) 4.05
3) 1.247	11) 0.000 143	19) 2.7×10^{-14}	27) −56
4) 0.290 2	12) 97.27	20) 5.3×10^{-23}	28) 21.9
5) 0.004 18	13) 30.76	21) 1.59×10^{3}	29) −123
6) 0.189	14) 0.081 3	22) 9.72×10^{2}	30) 1.64
7) 44.3	15) 1.21	23) 8.5×10^{-7}	
8) 74.67	16) 0.653	24) 4.2×10^{-5}	

apéndice E

Prefijos para los múltiplos de las unidades del SI

Factor de multiplicación	Prefijo	Símbolo
10^{24}	YOTTA	
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto	h
10	deka	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

El alfabeto griego

A	α	alpha	H	η	eta	N	ν	ny	T	τ	tau
B	β	beta	Θ	θ	theta	Ξ	ξ	xi	Y	υ	ípsilon
Γ	γ	gamma	I	ι	iota	O	o	ómicron	Φ	ϕ	phi
Δ	δ	delta	K	κ	kappa	Π	π	pi	X	χ	chi
E	ϵ	épsilon	Λ	λ	lambda	P	ρ	rho	Ψ	ψ	psi
Z	ζ	zeta	M	μ	my	Σ	σ	sigma	Ω	ω	omega

apéndice F

Factores de conversión de unidades al SI

Aceleración
1 pie/s^2 = 0.304 8 m/s^2
g = 9.807 m/s^2

Área
1 acre = 4047 m^2
1 pie^2 = 9.290 × 10^{-2} m^2
1 pulg^2 = 6.45 × 10^{-4} m^2
1 mi^2 = 2.59 × 10^6 m^2

Densidad
1 g/cm^3 = 10^3 kg/m^3

Energía
1 Btu = 1054 J
1 caloría (cal) = 4.184 J
1 electrón volt (eV) = 1.602 × 10^{-19} J
1 libra pie (lb · pie) = 1.356 J
1 kilowatt-hora (kW · h) = 3.60 × 10^6 J

Fuerza
1 dina = 10^{-5} N
1 lb = 4.448 N

Longitud
1 angstrom (Å) = 10^{-10} m
1 pie = 0.304 8 m
1 pulg = 2.54 × 10^{-2} m
1 año luz = 9.461 × 10^{15} m
1 milla = 1069 m

Masa
1 unidad de masa atómica (u) = 1.660 6 × 10^{-27} kg
1 gramo = 10^{-3} kg

Potencia
1 Btu/s = 1054 W
1 cal/s = 4.184 W
1 pie · libra/s = 1.356 W
1 caballo de fuerza (hp) = 746 W

Presión
1 atmósfera (atm) = 1.013 × 10^5 Pa
1 bar = 10^5 Pa
1 cmHg = 1333 Pa
1 lb/pie^2 = 47.88 Pa
1 lb/pulg^2 (psi) = 6895 Pa
1 N/m^2 = 1 pascal (Pa)
1 torr = 133.3 Pa

Velocidad
1 pie/s (fps) = 0.304 8 m/s
1 km/h = 0.277 8 m/s
1 mi/h (mph) = 0.447 04 m/s

Temperatura
$T_{\text{Kelvin}} = T_{\text{Celsius}} + 273.15$
$T_{\text{Kelvin}} = \frac{5}{9}(T_{\text{Fahrenheit}} + 459.67)$
$T_{\text{Celsius}} = \frac{5}{9}(T_{\text{Fahrenheit}} - 32)$
$T_{\text{Kelvin}} = \frac{5}{9}T_{\text{Rankine}}$

Tiempo
1 día = 86 400 s
1 año = 3.16 × 10^7 s

Volumen
1 pie^3 = 2.832 × 10^{-2} m^3
1 galón (gal) = 3.785 × 10^{-3} m^3
1 pulg^3 = 1.639 × 10^{-5} m^3
1 litro = 10^{-3} m^3

apéndice G

Constantes físicas

Rapidez de la luz en el espacio libre	c	$= 2.997\,924\,58 \times 10^{8}$ m/s
Aceleración debida a la gravedad (normal)	g	$= 9.807$ m/s^2
Constante de gravitación universal	G	$= 6.672\,59 \times 10^{-11}$ N · m^2/kg^2
Constante de Coulomb	k_0	$= 8.988 \times 10^{9}$ N · m^2/C^2
Densidad del agua (máxima)		$= 0.999\,972 \times 10^{3}$ kg/m^3
Densidad del mercurio (TPE)		$= 13.595 \times 10^{3}$ kg/m^3
Atmósfera estándar		$= 1.013\,2 \times 10^{5}$ N/m^2
Volumen del gas ideal en TPE		$= 22.4$ m^3/kmol
Número de Avogadro	N_A	$= 6.022 \times 10^{26}$ kmol^{-1}
Constante universal de los gases	R	$= 8314$ J/kmol · K
Punto de congelación		$= 273.15$ K
Equivalente mecánico del calor		$= 4.184$ J/cal
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$= 5.67 \times 10^{-8}$ W/m^2 · K^4
Constante de Planck	h	$= 6.626 \times 10^{-34}$ J · s
Faraday	F	$= 9.648\,5 \times 10^{4}$ C/mol
Carga del electrón	e	$= 1.602\,2 \times 10^{-19}$ C
Constante de Boltzmann	k_B	$= 1.38 \times 10^{-23}$ J/K
Razón de la carga a la masa del electrón	e/m_e	$= 1.758\,8 \times 10^{11}$ C/kg
Masa en reposo del electrón	m_e	$= 9.109 \times 10^{-31}$ kg
Masa en reposo del protón	m_p	$= 1.672\,6 \times 10^{-27}$ kg
Masa en reposo del neutrón	m_n	$= 1.674\,9 \times 10^{-27}$ kg
Masa en reposo de la particula alfa		$= 6.645 \times 10^{-27}$ kg
Unidad de masa atómica (1/12 de masa de ^{12}C)	u	$= 1.660\,6 \times 10^{-27}$ kg
Energía en reposo de 1 u		$= 931.5$ MeV

apéndice H

Tabla de elementos

Las masas listadas están basadas en el $^{12}_{6}C = 12$ u. Un valor en paréntesis es el número de masa del más estable (mayor vida) de los isótopos conocidos.

Elemento	Símbolo	Número atómico Z	Masa atómica, u
Actinio	Ac	89	(227)
Aluminio	Al	13	26.981 5
Americio	Am	95	(243)
Antimonio	Sb	51	121.75
Argón	Ar	18	39.948
Arsénico	As	33	74.921 6
Ástato	At	85	(210)
Azufre	S	16	32.064
Bario	Ba	56	137.34
Berilio	Be	4	9.012 2
Berkelio	Bk	97	(247)
Bismuto	Bi	83	208.980
Boro	B	5	10.811
Bromo	Br	35	79.904
Cadmio	Cd	48	112.40
Calcio	Ca	20	40.08
Californio	Cf	98	(251)
Carbono	C	6	12.011 2
Cerio	Ce	58	140.12
Cesio	Cs	55	132.905
Cloro	Cl	17	35.453
Cobalto	Co	27	58.933 2
Cobre	Cu	29	63.546
Cromo	Cr	24	51.996
Curio	Cm	96	(247)
Disprosio	Dy	66	162.50
Einstenio	Es	99	(254)
Erbio	Er	68	167.26
Escandio	Sc	21	44.956

Elemento	Símbolo	Número atómico Z	Masa atómica, u
Estaño	Sn	50	118.69
Estroncio	Sr	38	87.62
Europio	Eu	63	151.96
Fermio	Fm	100	(257)
Flúor	F	9	18.998 4
Fósforo	P	15	30.973 8
Francio	Fr	87	(223)
Gadolinio	Gd	64	157.25
Galio	Ga	31	69.72
Germanio	Ge	32	72.59
Hafnio	Hf	72	178.49
Hahnio	Ha	105	(260)
Helio	He	2	4.002 6
Hidrógeno	H	1	1.008 0
Hierro	Fe	26	55.847
Holmio	Ho	67	164.930
Indio	In	49	114.82
Iridio	Ir	77	192.2
Iterbio	Yb	70	173.04
Itrio	Y	39	88.905
Kriptón	Kr	36	83.80
Kurchatovio	Ku	104	(257)
Lantano	La	57	138.91
Laurencio	Lr	103	(257)
Litio	Li	3	6.939
Lutecio	Lu	71	174.97
Magnesio	Mg	12	24.312
Manganeso	Mn	25	54.938 0
Mendelevio	Md	101	(256)
Mercurio	Hg	80	200.59
Molibdeno	Mo	42	95.94
Neodimio	Nd	60	144.24
Neón	Ne	10	20.183
Neptunio	Np	93	(237)
Niobio	Nb	41	92.906
Níquel	Ni	28	58.71
Nitrógeno	N	7	14.006 7
Nobelio	No	102	(254)
Oro	Au	79	196.967
Osmio	Os	76	190.2
Oxígeno	O	8	15.999 4
Paladio	Pd	46	106.4
Plata	Ag	47	107.868
Platino	Pt	78	195.09
Plomo	Pb	82	207.19
Plutonio	Pu	94	(244)

Elemento	Símbolo	Número atómico Z	Masa atómica, u
Polonio	Po	84	(209)
Potasio	K	19	39.102
Praseodimio	Pr	59	140.907
Prometio	Pm	61	(145)
Protactinio	Pa	91	(231)
Radio	Ra	88	(226)
Radón	Rn	86	222
Renio	Re	75	186.2
Rodio	Rh	45	102.905
Rubidio	Rb	37	85.47
Rutenio	Ru	44	101.07
Samario	Sm	62	150.35
Selenio	Se	34	78.96
Silicio	Si	14	28.086
Sodio	Na	11	22.989 8
Talio	Tl	81	204.37
Tántalo	Ta	73	180.948
Tecnecio	Tc	43	(97)
Telurio	Te	52	127.60
Terbio	Tb	65	158.924
Titanio	Ti	22	47.90
Torio	Th	90	232.038 1
Tulio	Tm	69	168.934
Tungsteno	W	74	183.85
Uranio	U	92	238.03
Vanadio	V	23	50.942
Xenón	Xe	54	131.30
Yodo	I	53	126.904 4
Zinc	Zn	30	65.37
Zirconio	Zr	40	91.22

Índice analítico

Física general es un clásico de la serie Schaum, que en su novena edición, mantiene las características que han logrado ganarse la confianza y respeto de profesores y alumnos. Gracias a un método que consiste en reafirmar la comprensión de los conceptos mediante la solución de un gran número de problemas, cuidadosamente seleccionados, este libro se convierte en una excelente guía de estudio que ayuda al lector a tener éxito en sus cursos de física.

- Contiene 984 problemas enunciados con un lenguaje claro que permiten al alumno avanzar paso a paso.
- Incluye repasos básicos de álgebra, trigonometría y análisis vectorial para cursos que requieran de matemáticas.
- Cada uno de sus capítulos inicia con una exposición muy accesible de las definiciones y leyes que se utilizarán.
- El grado de dificultad es progresivo, pues se incrementa conforme el alumno avanza.
- Su didáctica permite mejorar el nivel académico del alumno y promueve la autoenseñanza.

Contenido: Introducción a los vectores • Movimiento uniformemente acelerado • Leyes de Newton • Equilibrio bajo la acción de fuerzas concurrentes • Equilibrio de un cuerpo rígido bajo la acción de fuerzas coplanares • Trabajo, energía y potencia • Máquinas simples • Impulso y cantidad de movimiento • Movimiento angular en un plano • Rotación de un rígido • Movimiento armónico simple y resortes • Densidad; elasticidad • Fluidos en reposo • Fluidos en movimiento • Dilatación térmica • Gases ideales • Teoría cinética • Calorimetría • Transferencia de energía calorífica • Primera ley de la termodinámica • Entropía y la segunda ley • Movimiento ondulatorio • Sonido • Ley de Coulomb y campos eléctricos • Potencial y capacitancia • Corriente, resistencia y ley de Ohm • Potencia eléctrica • Resistencia equivalente; circuitos simples • Leyes de Kirchhoff • Fuerzas en campos magnéticos • Fuentes de campos magnéticos • FEM inducida; flujo magnético • Generadores y motores eléctricos • Inductancia; constantes de tiempo *R-C* y *R-L* • Corriente alterna • Reflexión de la luz • Refracción de la luz • Lentes delgadas • Instrumentos ópticos • Interferencia y difracción de la luz • Relatividad • Física cuántica y mecánica ondulatoria • El átomo de hidrógeno • Átomos de multielectrones • Núcleos y radiactividad • Física nuclear aplicada • Apéndices: Cifras significativas • Trigonometría que se requiere para física universitaria • Exponentes • Logaritmos • Prefijos para los múltiplos de las unidades del SI; el alfabeto griego • Factores de conversión de unidades al SI • Constantes físicas • Tabla de elementos • Índice analítico

McGraw-Hill Interamericana
Editores, S.A. de C.V.
A Subsidiary of The McGraw-Hill Companies
www.mcgraw-hill.com.mx